Kapitel 1

Einleitung

Supersymmetrische Stringtheorien stellen die zur Zeit vielversprechendsten Erweiterungen des Standardmodells der Elementarteilchen dar [1–8]. Elementarteilchen gelten in dem Sinne als elementar, als daß sie aus keinen weiteren Teilchen aufgebaut sein sollen, und werden im Standardmodell als punktförmig angesehen.[1] Das Standardmodell beschreibt außer der Gravitation, welche Gegenstand von Einsteins Allgemeiner Relativitätstheorie ist, alle in der Natur beobachtete Materie sowie die bekannten Wechselwirkungskräfte im Rahmen einer sog. Quantenfeldtheorie, und steht in bestem Einklang mit experimentellen Daten. Dennoch kann es nicht als fundamentale Theorie angesehen werden: zum einen ist bisher jeder Versuch einer quantenfeldtheoretischen Beschreibung der Gravitation gescheitert (die Theorie ist „nicht renormierbar"). Zum anderen besitzt das Standardmodell viele freie Parameter (wie z.B. die Massen der Quarks und Leptonen), deren Herkunft und Beziehung untereinander durch eine fundamentale Theorie erklärt werden sollten.

In der Stringtheorie wird das Konzept der Elementarteilchen als punktförmige Objekte aufgegeben, und statt dessen die eindimensionalen Strings als fundamentale Konstituenten der Materie angesehen. Alle bekannten Elementarteilchen lassen sich dann als unterschiedliche Schwingungsmoden der Strings deuten. Auf den ersten Blick scheint dies der Beobachtung zu widersprechen, daß sich die Elementarteilchen im Experiment eher als Teilchen denn als eindimensional ausgedehnte Objekte verhalten. Berechnet man aber die Länge eines Strings, so findet man, daß diese von der Größenordnung 10^{-33} cm ist: diese Länge ist viel zu klein, als daß sie von heutigen Teilchenbeschleunigern aufgelöst werden könnte, so daß Strings als punktförmig erscheinen und es keinen direkten Widerspruch zu bisher vorgenommenen Experimenten gibt.

Einer der Hauptgründe, warum Stringtheorie in der heutigen theoretischen Hochenergiephysik eine so prominente Rolle spielt, besteht darin, daß sich bei der Berechnung des Spektrums supersymmetrischer Stringtheorien insbesondere

[1]Das derart gegebene Verständnis von „elementar" ist natürlich von dem zur Verfügung stehenden Auflösungsvermögen der Teilchenbeschleuniger abhängig: so gelten z.B. bei einer heutzutage erreichten Auflösung von ca. 10^{-16} cm die Elektronen und Quarks noch als elementar, was sich jedoch durch zukünftige Experimente bei höheren Energien ändern könnte.

immer ein Spin-2 Teilchen findet, welches mit dem für die gravitative Wechselwirkung verantwortlichen Teilchen (dem Graviton) identifiziert werden kann: somit ist Gravitation auf natürliche Weise inkorporiert. Außerdem findet man bei Quantisierung keine ultravioletten Divergenzen, welche zuvor zur Nicht-Renormierbarkeit der Quantengravitationstheorien geführt hatten. Insgesamt enthalten supersymmetrische Stringtheorien somit eine endliche Quantentheorie der Gravitation.

Allerdings zeigt sich, daß es fünf verschiedene konsistente supersymmetrische Stringtheorien gibt (von denen eine Typ IIB genannt wird), deren Beziehungen untereinander noch nicht vollständig verstanden sind. Darüber hinaus führen Konsistenzbedingungen dazu, daß diese Theorien zunächst nur in zehn Raum-Zeit Dimensionen formuliert werden können, wohingegen die uns umgebende Raum-Zeit vierdimensional zu sein scheint. Als ein fruchtbarer Ansatz zur Erklärung der anscheinend überzähligen Raum Dimensionen hat sich ein Mechanismus herausgestellt, den man *Kompaktifizierung* nennt. Die Grundidee besteht darin, daß sechs der insgesamt neun Raum Dimensionen kompakt und sehr klein sind: und zwar so klein, daß ihre Größe durch die bis heute zur Verfügung stehenden Teilchenbeschleuniger noch nicht aufgelöst werden konnte, und der uns umgebende Raum somit dreidimensional erscheint. Für die Typ IIB Theorie werden in dieser Arbeit bestimmte Klassen von Kompaktifizierungen untersucht, die nach den beiden Mathematikern E. Calabi und S.T. Yau benannt sind.

1.1 Grundlagen der Supersymmetrie

Das Konzept von *Supersymmetrie* [9–11] ist unabhängig von dem der Stringtheorie und kann ohne weitere Annahmen als zusätzliche Symmetrie auch in jeder Quantenfeldtheorie eingeführt werden. Dabei ist Supersymmetrie per Definition eine Symmetrie zwischen Fermionen (den Konstituenten der Materie) und Bosonen (den Trägern der Wechselwirkungskräfte); entsprechend gibt es einen Operator Q (den man auch *Superladung* nennt), der die beiden Teilchensorten zueinander in Beziehung setzt, indem er fermionische Zustände auf bosonische abbildet und umgekehrt:

$$Q|\text{Fermion}\rangle = |\text{Boson}\rangle \quad ; \quad Q|\text{Boson}\rangle = |\text{Fermion}\rangle \,. \tag{1.1}$$

Gemäß dieser Abbildung besitzt also jedes Teilchen einen sog. *Superpartner*, wobei die Notation folgendermaßen festgelegt ist: die bosonischen Superpartner der bekannten Fermionen werden durch das Präfix „s-“ gekennzeichnet (z.B. *Squark, Slepton*), wohingegen die fermionischen Superpartner der bekannten Bosonen durch das Suffix „-ino“ kenntlich gemacht sind (z.B. *Gluino, Gravitino*). Die von Supersymmetrie vorhergesagte Existenz dieser Superpartner konnte bis zum jetzigen Zeitpunkt noch nicht experimentell verifiziert werden. Es besteht aber die berechtigte Hoffnung, daß sich dies mit der nächsten Generation von Teilchenbeschleunigern ändern könnte.

Die Zustände einer supersymmetrischen Theorie lassen sich in sog. *Supermultipletts* anordnen: diese sind dadurch charakterisiert, daß die in ihnen enthaltenden

Zustände durch eine oder mehrere Supersymmetrietransformationen auseinander hervorgehen. Dabei enthält jedes Supermultiplett mindestens ein Boson und ein Fermion, deren Spin sich um $\frac{1}{2}$ unterscheidet. Eine wesentliche Eigenschaft von Q als dem Generator von Supersymmetrietransformationen besteht darin, daß er translationsinvariant ist; das bedeutet, daß Q mit dem Energieoperator E und Impulsoperator $\mathbf{P}$ (als dem Generator von Raum-Zeit Translationen) kommutiert:

$$[\,Q\,,\,E\,] = [\,Q\,,\,\mathbf{P}\,] = 0\,. \tag{1.2}$$

Als Folge ändert die Anwendung von Q auf einen Zustand also weder dessen Energie noch Impuls, so daß im Fall von *ungebrochener* Supersymmetrie alle Zustände innerhalb eines Supermultipletts dieselbe Masse besitzen. Da dies experimentell ausgeschlossen ist, kann Supersymmetrie in der Natur bestenfalls (falls überhaupt) als *spontan gebrochene Symmetrie* realisiert sein.[2] Während der Mechanismus der spontanen Symmetriebrechung die Massenentartung innerhalb von Supermultipletts aufheben kann, bleibt deren Struktur ansonsten bestehen.

Aus (1.1) ist ersichtlich, daß die Anwendung von Q den Spin eines Zustandes ändert: daraus folgt, daß Q selbst ein *Spinoperator* ist (d.h. Q ist fermionisch und transformiert unter der Lorentz Gruppe als Spinor). Die Superladungen erfüllen untereinander *Antikommutationsrelationen*, und die wichtigste solche Relation ist in d Raum-Zeit Dimensionen durch

$$\{Q_\alpha\,,\,\bar{Q}_\beta\} \equiv Q_\alpha \bar{Q}_\beta + \bar{Q}_\beta Q_\alpha = 2(\Gamma^\mu)_{\alpha\beta} P_\mu \tag{1.3}$$

gegeben, wobei P_μ den Impulsvektor bezeichnet und Γ^μ die Diracschen Gamma Matrizen mit $\{\Gamma^\mu, \Gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} = 2\,\mathrm{diag}(-1, \underbrace{+1, \ldots, +1}_{d-1})$ sind. Die Indizes α und β sind Spinorindizes, und die Q_α's bezeichnen entsprechend die unabhängigen Spinorkomponenten von Q.[3] In (1.3) ist der einfachste Fall betrachtet, in dem lediglich ein Supersymmetriegenerator Q mit Komponenten Q_α vorhanden ist: diesen Fall nennt man *minimale Supersymmetrie* oder auch $N = 1$ *Supersymmetrie*. Gibt es hingegen N verschiedene Supersymmetriegeneratoren mit Komponenten Q^i_α $(i = 1, \ldots, N)$, so spricht man von N*-erweiterter Supersymmetrie*, und die für diese Arbeit relevanten Fälle sind in den Abschnitten 4.1 und 5.1 dargestellt.

Wie sich herausstellen wird, sind im Kontext von Stringtheorien die masselosen ($\mathbf{P}^2 = 0$) Supermultipletts von besonderem Interesse. Diese erhält man, indem man im Standardsystem (in welchem der Impulsgenerator von der Form $\mathbf{P} = (-E, 0, \ldots, 0, E)$ ist) aus den Q_α's Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren bildet, und anschließend die Methode der *induzierten Darstellung* durch sukzessive Anwendung der Erzeugungsoperatoren auf den Grundzustand anwendet [11]. Die Größe der Supermultipletts ist dabei insbesondere von der Anzahl der unabhängigen Spinorkomponenten von Q abhängig, welche je nach betrachteter Raum-Zeit Dimension d variiert. So gibt es in geraden Dimensionen (in denen

[2] Von einer *spontan gebrochenen Symmetrie* spricht man, wenn im Gegensatz zum Wechselwirkungspotential einer Theorie deren Grundzustand nicht symmetrisch ist.

[3] Die genaue Definition von $\bar{Q}_\beta$ hängt vom Spinortyp und somit von der betrachteten Raum-Zeit Dimension d ab.

sich Spinoren von bestimmter Chiralität, sog. *Weyl Spinoren*, definieren lassen) drei mögliche Fälle, welche in Tab. 1.1 zusammengefaßt sind: in $d = 4, 8 \bmod 8$

d	Anzahl der unabhängigen Q_α's	Spinortyp
4, 8 mod 8	$2^{d/2}$	M oder W
6 mod 8	$2^{d/2}$	W
2 mod 8	$2^{d/2-1}$	MW

Tabelle 1.1: Die minimale Anzahl unabhängiger Superladungen in verschiedenen Raum-Zeit Dimensionen d. Als Spinortypen finden sich Majorana (M), Weyl (W) oder Majorana-Weyl (MW) Spinoren.

setzt Ladungskonjugation Spinoren unterschiedlicher Chiralität zueinander in Beziehung, und ein Spinor kann entweder die Weyl- oder die *Majorana*- Bedingung erfüllen (ein Majorana Spinor ist invariant unter Ladungskonjugation). In den zwei verbleibenden Fällen erhält Ladungskonjugation die Chiralität eines Spinors: in $d = 6 \bmod 8$ gibt es allerdings keine Majorana Spinoren, wohingegen in $d = 2 \bmod 8$ Spinoren sowohl die Majorana- als auch die Weyl-Bedingung erfüllen können (sog. *Majorana-Weyl Spinoren*). Die Fälle für ungerades d werden in dieser Arbeit nicht benötigt; sie finden sich ausführlich in [7] diskutiert.

Wegen ihrer Relevanz für Stringtheorien sei schließlich noch die *Supergravitation* erläutert: als solche bezeichnet man eine supersymmetrische Theorie, die kovariant unter allgemeinen Koordinatentransformationen ist. In Supergravitationstheorien ist Supersymmetrie notwendigerweise *lokal* realisiert (d.h. die Supersymmetrie Transformationen sind Raum-Zeit abhängig): dies macht schon der für alle supersymmetrischen Theorien charakteristische Antikommutator aus (1.3) deutlich, da lokale Raum-Zeit Translationen eine allgemeine Koordinatentransformation darstellen. Im Spektrum einer Supergravitation findet sich immer das Spin-2 Graviton $g_{\mu\nu}$ zusammen mit seinem Superpartner, dem Spin-3/2 Gravitino ψ_μ^α: das Gravitino ist ein Vektor-Spinor, und wird auch *Rarita-Schwinger Feld* genannt.

1.2 Grundlagen der Stringtheorie

Ausgangspunkt der Stringtheorie ist die Idee, anstelle von Punktteilchen die im Raum eindimensional ausgedehnten Strings als fundamental anzusehen. Je nachdem, ob ein String zwei freie Endpunkte besitzt oder nicht, spricht man von einem *offenen* bzw. *geschlossenen* String. Im folgenden werden nur Theorien geschlossener Strings behandelt.

Während sich ein Punktteilchen in der Raum-Zeit entlang seiner eindimensionalen *Weltlinie* bewegt, ergibt die Bewegung eines Strings eine zweidimensionale *Weltfläche* W. Dies kann durch Funktionen $X^\mu(\sigma, \tau)$ beschrieben werden, welche angeben, wie die durch σ und τ parametrisierte Weltfläche in die Raum-Zeit (mit Koordinaten X^μ) eingebettet ist. Dabei bezeichnet σ die räumliche Koordinate auf W und ist für geschlossene Strings periodisch mit $\sigma \in [0, 2\pi)$, und τ ist die zweidimensionale Zeitkoordinate. Für einen freien (d.h. nicht-wechselwirkenden) geschlossenen String ist die Topologie der Weltfläche die eines Zylinders, wie in Abb. 1.1 dargestellt. Die relativistische Wirkung eines Punktteilchens generali-

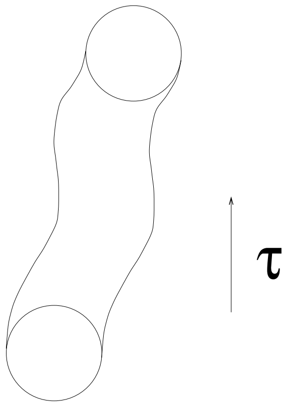

Abbildung 1.1: Weltfläche eines geschlossenen Strings.

sierend erhält man für den freien bosonischen String (der keine fermionischen Freiheitsgrade beinhaltet) die sog. *Nambu-Goto Wirkung*:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{NG} &= -\frac{1}{2\pi\alpha'} \,(\text{Fläche von } W) \\ &= -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int d\tau \, d\sigma \, (-\det \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \eta_{\mu\nu})^{1/2} \,, \end{aligned} \tag{1.4}$$

wobei $\partial_a \equiv \frac{\partial}{\partial \sigma^a}$ mit $\sigma^a = (\sigma, \tau)$, und die Raum-Zeit als flacher Minkowski-Raum mit Metrik $\eta_{\mu\nu}$ betrachtet wird. α' ist eine Konstante, welche die Dimension $[\text{Länge}]^2$ bzw. $[\text{Masse}]^{-2}$ haben muß, damit die Wirkung $\mathcal{S}_{NG}$ dimensionslos ist.[4] Als einziger dimensionsbehafteter Parameter von Stringtheorie gibt α' die charakteristische Skala dieser Theorie an; so ist z.B. die fundamentale Massenskala m_S in Stringtheorie durch $m_S = (\alpha')^{-\frac{1}{2}}$ gegeben. Die Größenordnung von α' läßt sich dabei durch Dimensionsanalyse ermitteln: als relativistische Quantentheorie, welche auch die Gravitation enthält, muß Stringtheorie als fundamentale Konstanten die Lichtgeschwindigkeit c, das Plancksche Wirkungsquantum $\hbar$ sowie die Newtonsche Gravitationskonstante G enthalten. Aus diesen Konstanten lassen sich die sog. *Planck Länge*

$$l_P = \left(\frac{\hbar G}{c^3}\right)^{1/2} = 1.6 \times 10^{-33}\text{cm} \tag{1.5}$$

und *Planck Masse*

$$m_P = \left(\frac{\hbar c}{G}\right)^{1/2} = 1.22 \times 10^{19}\text{GeV}/c^2 \tag{1.6}$$

[4] In dieser Arbeit werden Einheiten verwendet, in denen $\hbar = c = 1$, und in diesen Einheiten gilt $[\text{Länge}]^2 \sim [\text{Masse}]^{-2}$.

bilden, wobei in den hier verwendeten Einheiten $\hbar = c = 1$ gilt, daß $l_P = m_P^{-1}$. Für die in dieser Arbeit betrachteten Stringtheorien ist α' von der Größenordnung der durch die Planck Masse m_P aus (1.6) gesetzten Skala, d.h. $\alpha' \propto m_P^{-2}$, und insbesondere sind nichtverschwindende Massen von der Ordnung $m_S \sim m_P$ (eine genauere Diskussion der Proportionalität zwischen der String- und Planck-Skala findet sich in [7]).

Es erweist sich als nützlich, die Wirkung aus (1.4) in einer klassisch äquivalenten Form anzugeben, in der sie quadratisch in den Ableitungen von $X^\mu(\sigma,\tau)$ ist. Dies geschieht durch die Einführung einer Metrik $h_{ab}(\sigma,\tau)$ auf der Weltfläche, und die entsprechende Wirkung wird als die *Polyakov Wirkung* bezeichnet:

$$\mathcal{S}_P = -\frac{1}{4\pi\alpha'}\int d\tau d\sigma \sqrt{-h}h^{ab}\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \eta_{\mu\nu}\,. \tag{1.7}$$

Hierbei gibt h^{ab} die zu h_{ab} inverse Metrik an, und $h = \det h_{ab}$. Die sich aus (1.7) für die Metrik h_{ab} ergebende Bewegungsgleichung lautet, daß diese konform äquivalent zur Metrik $\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \eta_{\mu\nu}$ ist:

$$h_{ab} \propto \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \eta_{\mu\nu}\,; \tag{1.8}$$

setzt man dies zurück in die Polyakov Wirkung ein, so ergibt sich die Nambu-Goto Wirkung.

Zusätzlich zur Invarianz unter globalen Poincaré Transformationen und lokalen Reparametrisierungen der Weltfläche besitzt die Polyakov Wirkung noch eine weitere lokale Symmetrie. So ist sie *konform invariant*, d.h. invariant unter sog. *Weyl-Reskalierungen* der Weltflächenmetrik h_{ab}:

$$\begin{aligned} \delta h_{ab} &= \Lambda(\sigma,\tau)h_{ab} \\ \delta X^\mu &= 0\,. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Die Wirkung aus (1.7) läßt sich leicht auf den Fall einer gekrümmten Raum-Zeit verallgemeinern : dazu ersetzt man die Minkowski-Metrik $\eta_{\mu\nu}$ durch eine allgemeine Metrik $g_{\mu\nu}(X)$, und in dieser Form stellt die Wirkung ein nicht-lineares Sigma-Modell dar. Die Wahl $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ ist dann der erste Term einer Metrikentwicklung um einen flachen Hintergrund. Da das nicht-lineare Sigma-Modell nicht mehr quadratisch in X^μ ist, wird durch es auch keine freie Theorie beschrieben. Zusätzlich zu dieser Verallgemeinerung auf gekrümmte Raum-Zeit läßt sich zur Polyakov Wirkung ein weiterer Term addieren, der von der Form $\Phi_0\chi$ und topologisch invariant ist; Φ_0 ist dabei ein freier Parameter, und χ bezeichnet die Eulerzahl von W:

$$\chi(W) = \frac{1}{4\pi}\int_W \sqrt{-h}\mathcal{R}^{(2)}\,, \tag{1.10}$$

wobei $\mathcal{R}^{(2)}$ der Ricci Skalar der Weltfläche ist. Zusammen mit diesem Zusatzterm stellt das nicht-lineare Sigma-Modell die für die wechselwirkende bosonische

Stringtheorie relevante Wirkung dar. Der freie Parameter Φ_0 ist dabei der konstante Vakuumerwartungswert eines masselosen Skalarfeldes ϕ, welches im Spektrum jeder Stringtheorie enthalten ist und *Dilaton* genannt wird. Es stellt sich heraus, daß Φ_0 gemäß

$$g_S = e^{\Phi_0} \tag{1.11}$$

die Größe der Stringkopplungskonstanten g_S angibt, welche ein Maß für die Stärke der in Abb. 1.2 dargestellten fundamentalen Wechselwirkung ist. Die Stringkopplungskonstante g_S ist ein dimensionsloser Parameter, in welchem die Störungsentwicklung wechselwirkender Strings angegeben wird (für kleine Werte von g_S, also $g_S < 1$): so lassen sich mit Hilfe des fundamentalen Vertex aus Abb. 1.2 alle möglichen Streuamplituden geschlossener Strings bilden. Dabei zeigt sich, daß die Reihenentwicklung in Potenzen von g_S äquivalent zur Summation über die möglichen Topologien der Weltfläche ist. Hierzu ist anzumerken, daß sich die Eulerzahl aus (1.10) auch als

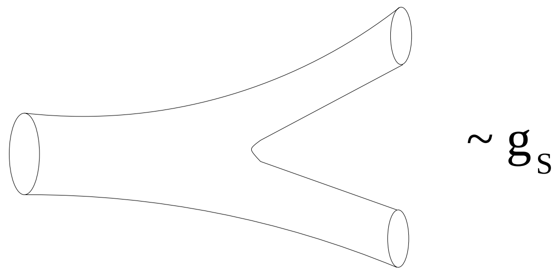

Abbildung 1.2: Der fundamentale Vertex eines geschlossenen Strings.

$$\chi(W) = 2 - 2g - r \tag{1.12}$$

schreiben läßt, wobei g das sog. Genus (die Anzahl der Löcher) von W bezeichnet, und r die Anzahl der Ränder von W angibt. Zur Veranschaulichung sind in Abb. 1.3 die ersten Terme der Störungsreihe für die Stringzweipunktfunktion angegeben, für die $r = 2$ gilt (gem. jeweils einem String als Anfangs- und Endzustand).

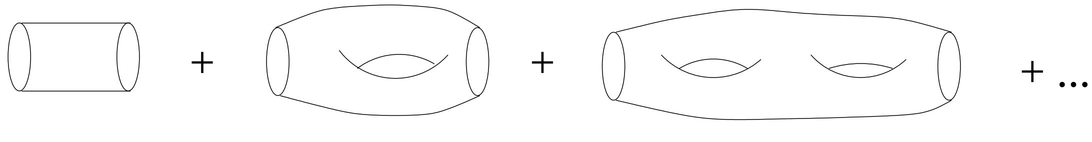

Abbildung 1.3: Störungsentwicklung der Stringzweipunktfunktion als Summe über die Topologien der Weltfläche.

Bisher wurde nur die bosonische Stringtheorie betrachtet: da diese jedoch keine Raum-Zeit Fermionen in ihrem masselosen Spektrum aufweist, und darüber hinaus ein Teilchen mit negativem Massenquadrat (ein sog. *Tachyon*) beinhaltet, stellt sie eine unrealistische Theorie dar. Die Probleme des bosonischen Strings können dadurch gelöst werden, indem man auf der Weltfläche Supersymmetrie und damit Fermionen einführt: die Weltflächen Fermionen χ^μ gruppieren sich dann mit den Bosonen zu Supermultipletts. Superkonforme Invarianz der Weltflächentheorie ergibt als Einschränkung an die Dimension d der Raum-Zeit, in welcher sich der String bewegt, daß $d \leqslant 10$. Im folgenden werden die Stringtheorien betrachtet, die in der *kritischen Dimension* $d = 10$ formuliert sind; in dieser Dimension gibt es insgesamt vier konsistente geschlossene Stringtheorien: die Typ IIA und Typ IIB Superstringtheorie, sowie den $E_8 \times E_8$ bzw. $SO(32)$ heterotischen String.[5] Alle vier Theorien besitzen Raum-Zeit Supersymmetrie und beinhalten kein Tachyon in ihrem Spektrum.

Die Typ II Superstringtheorien sind invariant unter 32 Superladungen und beinhalten rechtslaufende und linkslaufende Weltflächen Fermionen χ^μ. Demgegenüber sind die heterotischen Stringtheorien bloß invariant unter 16 Superladungen mit entweder nur rechts- oder linkslaufenden Weltflächen Fermionen. Für geschlossene Strings können die Weltflächen Fermionen zwei unterschiedliche Randbedingungen erfüllen, und je nach Randbedingung nennt man sie zum *Ramond* bzw. *Neveu-Schwarz Sektor* zugehörig:

$$\chi^\mu(\sigma) = \begin{cases} +\chi^\mu(\sigma + 2\pi) & \text{Ramond (R)}\,, \\ -\chi^\mu(\sigma + 2\pi) & \text{Neveu-Schwarz (NS)}\,. \end{cases} \tag{1.13}$$

Für die Typ II Superstrings ergeben sich Raum-Zeit Bosonen und Fermionen als das direkte Produkt von rechtslaufenden (r) mit linkslaufenden (l) Weltflächen Fermionen aus den entsprechenden Sektoren.[6] So ergeben die Kombinationen $\mathrm{NS_r} \otimes \mathrm{NS_l}$ (NS-NS) und $\mathrm{R_r} \otimes \mathrm{R_l}$ (R-R) Raum-Zeit Bosonen, wohingegen $\mathrm{NS_r} \otimes \mathrm{R_l}$ und $\mathrm{R_r} \otimes \mathrm{NS_l}$ Raum-Zeit Fermionen liefern. Die heterotischen Stringtheorien besitzen nicht-abelsche Eichsymmetrien, und haben damit Vektorbosonen (zusammen mit ihren Superpartnern, den *Gauginos*) in der adjungierten Dartellung der entsprechenden Eichgruppe in ihrem Raum-Zeit Spektrum. Das Spektrum der masselosen Raum-Zeit Bosonen aller vier Theorien ist in Tabelle 1.2 zusammengefaßt (da sich aufgrund von Supersymmetrie die fermionischen Anteile einer Theorie immer rekonstruieren lassen, werden in dieser Arbeit nur die bosonischen Anteile untersucht). Dabei beinhaltet jede Theorie einen Skalar ϕ (das Dilaton), ein antisymmetrisches Tensorfeld $B_{\mu\nu}$ und ein symmetrisches Tensorfeld $g_{\mu\nu}$ (das Graviton). Darüber hinaus bezeichnet A_μ einen Vektor, $C_{\mu\nu\rho}$ ist eine 3-Form (d.h. vollständig antisymmetrisch in allen 3 Indizes) und $\mathcal{D}^*_{\mu\nu\rho\sigma}$ ist eine 4-Form mit selbstdualer Feldstärke. Die Typ II Theorien enthalten als Superpartner des Gravitons zwei *Gravitinos* ψ_μ, die in der Typ IIA Theorie entgegengesetzte und in der Typ IIB Theorie gleiche Chiralität besitzen: entsprechend spricht man von einer *nicht-chiralen* (Typ IIA) bzw. *chiralen* (Typ IIB) Theorie.

[5] Es gibt noch eine fünfte konsistente Theorie, die sog. *Typ I SO(32) Stringtheorie*, welche aber eine Theorie offener Strings ist.

[6] Weltflächen Bosonen erfüllen periodische Randbedingungen und tragen nicht zum Raum-Zeit Spektrum bei.

Stringtheorie	Anzahl der Q's	masseloses bosonisches Spektrum	
IIA	32	NS-NS	$g_{\mu\nu}, B_{\mu\nu}, \phi$
		R-R	$A_\mu, C_{\mu\nu\rho}$
IIB	32	NS-NS	$g_{\mu\nu}, B^1_{\mu\nu}, \phi$
		R-R	$l, B^2_{\mu\nu}, \mathcal{D}^*_{\mu\nu\rho\sigma}$
Heterotisch $E_8 \times E_8$	16	$g_{\mu\nu}, B_{\mu\nu}, \phi$ A^a_μ in der Adjungierten von $E_8 \times E_8$	
Heterotisch $SO(32)$	16	$g_{\mu\nu}, B_{\mu\nu}, \phi$ A^a_μ in der Adjungierten von $SO(32)$	

Tabelle 1.2: Die Spektren der masselosen bosonischen Zustände der vier konsistenten Theorien geschlossener Strings in $d = 10$.

Neben den in Tabelle 1.2 dargestellten masselosen Spektren enthält jede Stringtheorie unendlich viele massive Anregungen: diese sind in Einheiten der für Strings charakteristischen Masse quantisiert, welche durch die Planck Masse m_P aus (1.6) gegeben ist. Im Vergleich zu den experimentell zur Verfügung stehenden Energien ist m_P aber so groß, daß die massiven Moden nur in virtuellen Zuständen auftreten. Zur Beschreibung von Stringtheorien bei niedrigen Energien stellt sich ein Zugang als besonders fruchtbar heraus, der durch die sog. *Niederenergie effektive Wirkung* gegeben ist, welche nur von den masselosen Feldern abhängt: die massiven Zustände sind „ausintegriert“, wobei der Austausch von massiven Moden durch eine effektive Wechselwirkung der masselosen Moden ersetzt [12] wird. Die Niederenergie effektive Wirkung kann dabei mit Hilfe der Forderung konstruiert werden, daß ihre klassischen Streuamplituden die String S-Matrix Elemente für Energien $p \ll m_P$ reproduzieren [13,14]. Dazu berechnet man zunächst die String S-Matrix Elemente als Entwicklung in der Kopplungskonstanten g_S; anschließend wird die Niederenergie effektive Wirkung als Funktion nur der masselosen Felder derart in Potenzen von $p^2\alpha'$ konstruiert, daß ihre S-Matrix für $p^2\alpha' \ll 1$ die String S-Matrix ergibt. Auf diese Weise ergibt sich die Niederenergie effektive Wirkung als Reihenentwicklung sowohl in der Stringkopplungskonstanten g_S als auch in $p^2\alpha'$. Letzteres entspricht einer Entwicklung in Raum-Zeit Ableitungen, und für niedrige Energien genügt üblicherweise die Betrachtung nur der ersten beiden Terme: dabei bezeichnet man den $(p^2\alpha')^0$-Term als *effektives Potential*, und der $(p^2\alpha')^1$-Beitrag beinhaltet die kinetischen Terme für die masselosen Felder.

Für die zehndimensionalen geschlossenen Stringtheorien stellt sich heraus, daß ihre Niederenergie effektiven Wirkungen durch die Typ IIA bzw. Typ IIB Supergravitation (den beiden Typ II Superstringtheorien entsprechend), sowie der an eine $SO(32)$ bzw. $E_8 \times E_8$ Super-Yang-Mills Theorie gekoppelten zehndimensionalen Supergravitation mit 16 Superladungen (den beiden heterotischen Stringtheorien entsprechend) gegeben sind.

1.3 Aufbau und Gliederung der Arbeit

In dieser Arbeit werden die Kompaktifizierungen der zehndimensionalen Typ IIB Supergravitation, als die Niederenergie effektive Wirkung der Typ IIB Superstring Theorie, auf einer Calabi-Yau 3-faltigkeit CY_3 und Calabi-Yau 4-faltigkeit CY_4 im Limes großen Volumens untersucht. Dazu ist in Kapitel 2 zunächst die Typ IIB Supergravitation in $d = 10$ vorgestellt: neben der Darstellung des Feldinhaltes und der Symmetrieeigenschaften wird insbesondere auf die Präsenz der 4-Form mit selbstdualer Feldstärke im Spektrum eingegangen, was in [23] zur Formulierung einer nicht-selbstdualen Wirkung (der *NSD-Wirkung*) geführt hat. Aus ihr lassen sich nach Implementierung der Selbstdualitätsbedingung auf der Ebene der Euler-Lagrange Gleichungen die richtigen Typ IIB Bewegungsgleichungen herleiten.

Kapitel 3 stellt das Grundkonzept von Kompaktifizierungen vor, mit deren Hilfe sich aus einer in einem höherdimensionalen Raum formulierten Theorie eine entsprechend niederdimensionalere Theorie ergibt. Dabei ist der Hauptfokus auf die in dieser Arbeit betrachteten Calabi-Yau Kompaktifizierungen gerichtet, und die in diesem Zusammenhang besonders wichtigen Metrik-Moduli werden in einem eigenen Abschnitt gesondert behandelt.

In Kapitel 4 wird die Kompaktifizierung der zehndimensionalen Typ IIB Supergravitation auf einer generischen Calabi-Yau 3-faltigkeit mit $SU(3)$-Holonomie betrachtet. Zu diesem Zweck wird als erstes die $N = 2$ Supergravitation in $d = 4$ zusammen mit den relevanten masselosen Supermultipletts erläutert, und anschließend auf CY_3-spezifische Eigenschaften eingegangen, welche in den darauffolgenden Abschnitten immer wieder benutzt werden. Nach Analyse des sich in $d = 4$ ergebenden Spektrums werden im folgenden Calabi-Yau 3-faltigkeiten mit eindeutiger komplexer Struktur, d.h. $h^{(2,1)} = 0$, untersucht. Der Fall $h^{(2,1)} \neq 0$ ist schon zuvor in der Literatur [15–19] behandelt worden, und gibt die Kopplungen der entsprechenden Vektormultipletts an. Noch nicht bekannt waren hingegen die allgemeinen Kopplungen der $h^{(1,1)}$ Tensormultipletts und des Doppel-Tensor Multipletts, die an dieser Stelle für beliebige Wahl von $h^{(1,1)}$ hergeleitet werden, und in [20] veröffentlicht worden sind. Dabei wird die zehndimensionale NSD-Wirkung ohne Benutzung der Selbstdualitätsbedingung kompaktifiziert, was eine NSD-Wirkung für Typ IIB in $d = 4$ ergibt. Setzt man in den Euler-Lagrange Gleichungen die kompaktifizierte Selbstdualitätsbedingung ein, so müssen sich die richtigen vierdimensionalen Bewegungsgleichungen ergeben: dies wird für den Fall der antisymmetrischen Tensorfelder im Limes $l = 0$, $\phi = \text{const.}$ und $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ dazu benutzt, die richtige vierdimensionale NSD-Wirkung anzugeben. Anschließend werden die antisymmetrischen Tensorfelder zu Skalaren dualisiert, und die Lagrange-Dichte in dieser dualen Feldbasis angegeben: in dieser Form konnte die Lagrange-Dichte in [20] auf diejenige der auf der Mirrormannigfaltigkeit kompaktifizierten Typ IIA Theorie abgebildet werden. Schließlich werden noch die Symmetrieeigenschaften der Wirkung in beiden Feldbasen untersucht.

Im darauffolgenden Kapitel werden Kompaktifizierungen der zehndimensionalen NSD-Wirkung auf Calabi-Yau 4-faltigkeiten mit $SU(4)$-Holonomie betrachtet, was eine entsprechende NSD-Wirkung in $d = 2$ ergibt. Nach Erörterung von

$N = (4,0)$ Supergravitation in $d = 2$, Zusammenstellung der CY_4-Charakteristika sowie Spektrumsanalyse wird diese Wirkung hergeleitet und gezeigt, daß die sich aus ihr ergebenden Euler-Lagrange Gleichungen für die antisymmetrischen Tensorfelder im Limes $l = 0$, $\phi =$ const. und $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ nach Implementierung der Selbstdualitätsbedingung mit den kompaktifizierten Bewegungsgleichungen übereinstimmen. Anschließend wird der Fall $h^{(4,0)} = h^{(0,4)} = h^{(1,1)} = 1$, $h^{(2,2)} = h^{(3,1)} = 0$ genauer untersucht, der auf ein Gravitationsmultiplett sowie ein chirales Materiemultiplett führt.

Das letzte Kapitel schließlich befaßt sich mit der $K3 \times K3$-Kompaktifizierung der Niederenergie effektiven Wirkung des zehndimensionalen heterotischen Strings. Dazu wird in zwei Schritten vorgegangen, und nach einer ersten (im Anhang F durchgeführten) $K3$-Kompaktifizierung zu sechs Raum-Zeit Dimensionen eine weitere $K3$-Kompaktifizierung vorgenommen: dies ergibt, wie schon Typ IIB auf CY_4, eine zweidimensionale Theorie mit $N = (4,0)$ Supersymmetrie. Es wird insbesondere untersucht, welcher der nicht-chiralen Skalare zusammen mit der zweidimensionalen Metrik das Gravitationsmultiplett bildet, was in Kapitel 5 aufgrund der in $d = 2$ nicht möglichen Weyl-Reskalierung problematisch war; die insgesamt in Kapitel 5 und 6 vorgestellten Ergebnisse sind in [21] zur Veröffentlichung vorgesehen.

Der Anhang enthält neben einem allgemeinen Teil über die den Calabi-Yau Mannigfaltigkeiten zugrunde liegenden mathematischen Konzepte noch Detailrechnungen zu den einzelnen Kapiteln.