

4 WELLENAUSBREITUNG

Schallwellen, die sich in einem Medium ausbreiten, verursachen eine zeitlich und örtlich periodische Änderung von Dichte, Druck und Temperatur. Die allgemeine Wellengleichung beschreibt die Ausbreitung einer Welle in einem ungedämpften Medium:

$$\Delta p = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}. \quad (4-1)$$

$p=p(x,t)$ ist der von Ort x und Zeit t abhängige Überschuss- oder Schalldruck und v die Schallgeschwindigkeit. Die Herleitung erfolgt mit Hilfe von Zustands-, Kontinuitäts- und Bewegungsgleichung. Dichteänderungen werden durch die Zustandsgleichung beschrieben:

$$p = \rho_e v^2. \quad (4-2)$$

ρ_e ist die durch die Komprimierung hervorgerufene Überschussdichte. Die Kontinuitätsgleichung basiert auf dem Gesetz der Erhaltung der Masse und beschreibt die Bewegung der Teilchen, welche die Dichteänderung verursachen:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{u} = 0, \quad (4-3)$$

wobei $s = \rho_e / \rho$ die Kompression und \vec{u} der Vektor der Teilchenverschiebungsgeschwindigkeit sind. Die Kopplung von Dichteänderung und Teilchenbewegung erfolgt durch die Bewegungsgleichung:

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\nabla p. \quad (4-4)$$

ρ_0 ist die Gleichgewichtsdichte. Die räumliche Ausbreitung der periodischen Dichte-, Druck- und Temperaturschwankungen ist durch die Schallausbreitungsgeschwindigkeit bestimmt:

$$v = \lambda \cdot f. \quad (4-5)$$

λ ist die Wellenlänge und f die Frequenz.

4.1 Transmission und Reflexion

Die Phänomene beim Übergang einer ebenen akustischen Welle zwischen zwei verschiedenen Medien lassen sich am einfachsten mit Hilfe der akustischen Impedanz beschreiben. Diese ist definiert als das negative Verhältnis von Zugspannung zur Teilchenverschiebungsgeschwindigkeit:

$$Z = -\frac{\sigma_T}{\partial u / \partial t}. \quad (4-6)$$

4. Wellenausbreitung

Die Zugspannung σ_T ist die senkrecht auf die Oberfläche wirkende Kraft pro Flächeneinheit. Daraus ergibt sich die Einheit $1 \text{ rayl} = 1 \text{ kgm}^{-2}\text{s}^{-1}$. Die üblicherweise verwendete Einheit ist das Mrayl. Die Impedanz ist gleich dem Produkt aus Massendichte ρ und der longitudinalen Schallausbreitungsgeschwindigkeit v_l in diesem Medium:

$$Z = \rho \cdot v_l. \quad (4-7)$$

Trifft eine ebene Welle senkrecht auf eine Grenzfläche, dann müssen die Bedingungen der Stetigkeit von Zugspannung und Verschiebung an der Grenzfläche erfüllt sein. Wenn die normierte Amplitude der auf die Oberfläche wirkenden Zugspannung der einfallenden Welle 1 und die Spannungsamplituden von transmittierter und reflektierter Welle T und R sind, dann erfordert die Stetigkeit der Zugspannung, dass

$$1 + R = T, \quad (4-8)$$

und aus der Stetigkeit der Verschiebungsgeschwindigkeit folgt, dass

$$\frac{1 - R}{Z_1} = \frac{T}{Z_2}, \quad (4-9)$$

wobei Z_1 und Z_2 die akustischen Impedanzen der beiden Medien sind. Die Vorzeichenumkehr kommt durch die entgegengesetzte Ausbreitungsrichtung der reflektierten Welle zustande. Setzt man (4-8) in (4-9) ein, so ergibt sich ein Reflexionskoeffizient der Spannungsamplitude:

$$R = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}, \quad (4-10)$$

und ein Transmissionskoeffizient der Spannungsamplitude:

$$T = \frac{2Z_2}{Z_2 + Z_1}. \quad (4-11)$$

Der Energiefluss ist das Skalarprodukt aus Verschiebungsgeschwindigkeit und Zugspannung. In einem isotropen Medium ohne Viskosität sind diese parallel zueinander, und der mittlere Energiefluss ist

$$\langle P \rangle = \left\langle \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \cdot \sigma_T \right\rangle = Z \left\langle \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \right)^2 \right\rangle = \frac{1}{Z} \langle \sigma_T^2 \rangle. \quad (4-12)$$

Aus (4-10) - (4-12) ergeben sich die Koeffizienten für die reflektierten und transmittierten Wellenintensitäten

$$\langle P_R \rangle = \left(\frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \right)^2, \quad (4-13)$$

$$\langle P_T \rangle = \frac{4Z_2 Z_1}{(Z_2 + Z_1)^2}. \quad (4-14)$$

4. Wellenausbreitung

Lässt man eine ebene Welle mit der Intensität I_0 aus einem Medium mit der Impedanz Z_1 senkrecht auf einen Körper der Dicke d und der Impedanz Z_2 einfallen (Abbildung 4-1), so sind die Intensitäten der transmittierten und reflektierten Wellen

$$I_{R1} = I_0 \cdot \langle P_{R_{12}} \rangle, \quad (4-15)$$

$$I_{T1} = I_0 \cdot \langle P_{T_{12}} \rangle, \quad (4-16)$$

$$I_{R2} = I_0 \cdot \langle P_{T_{12}} \rangle \cdot \langle P_{R_{21}} \rangle \cdot \langle P_{T_{21}} \rangle \cdot e^{-2\alpha d}. \quad (4-17)$$

Die Indizes kennzeichnen die Richtung des Überganges, und α ist der Schwächungskoeffizient.

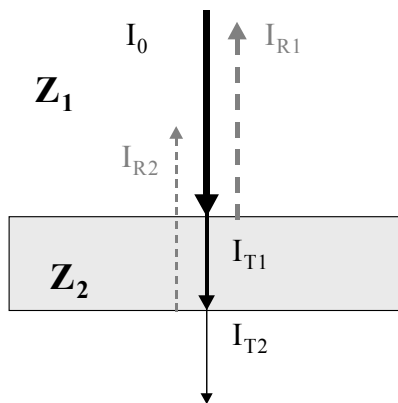


Abbildung 4-1 *Transmission und Reflexion einer ebenen Welle an einer Grenzschicht bei senkrechtem Einfall.*

Fällt die Welle nicht senkrecht auf die Grenzfläche, so wird sie gemäß dem SNELL'schen Brechungsgesetz gebrochen:

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{v_1}{v_2}, \quad (4-18)$$

θ_1 und θ_2 sind die Ein- und Ausfallswinkel. Dieses Gesetz kann auch in der Form aufgefasst werden, dass die tangentielle Komponente des Wellenvektors an der Grenzfläche erhalten bleibt, so dass

$$k_1 \cdot \sin\theta_1 = k_2 \cdot \sin\theta_2. \quad (4-19)$$

Die akustische Impedanz in Richtung der Oberflächennormalen ist dann

$$Z \equiv -\frac{\sigma_T}{\partial u_z / \partial t} = \frac{\rho v}{\cos\theta} \quad (4-20)$$

Wenn ein oder zwei der angrenzenden Medien Festkörper sind, folgt daraus, dass jede beliebige einfallende Welle prinzipiell eine longitudinale und ein oder zwei transversale Wellen im Festkörper erzeugen kann. Von besonderer Bedeutung in der akustischen Mikroskopie ist der Fall, dass eine longitudinale Welle aus einem flüssigen Kopplungsmedium auf einen festen Körper trifft.

4.2 Reflexion an einer flüssig-festen Grenzschicht

Die Reflexions- und Transmissionskoeffizienten lassen sich mit Hilfe der Winkel θ , θ_l und θ_s ausdrücken, welche einfallende sowie die transmittierten Longitudinal- und Scherwellen mit der Oberflächennormalen bilden (Abbildung 4-2).

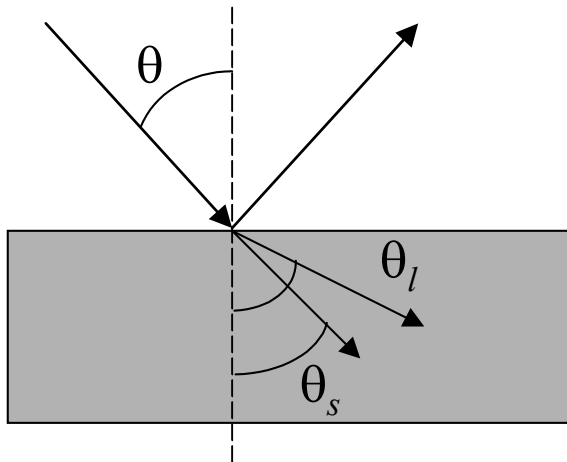


Abbildung 4-2 Transmission und Reflexion an einer flüssig-festen Grenzschicht bei schrägem Einfall.

Aus dem SNELL'schen Brechungsgesetz folgt

$$k \cdot \sin\theta = k_l \cdot \sin\theta_l = k_s \cdot \sin\theta_s. \quad (4-21)$$

Die Impedanzen in Richtung der Oberflächennormalen sind dann

$$Z = \frac{\rho_0 v_0}{\cos\theta}, \quad Z_l = \frac{\rho_l v_l}{\cos\theta_l}, \quad Z_s = \frac{\rho_s v_s}{\cos\theta_s}, \quad (4-22)$$

und die resultierenden Reflexions- und Transmissionskoeffizienten sind

$$R(\theta) = \frac{Z_l \cos^2 2\theta_s + Z_s \sin^2 2\theta_s - Z}{Z_l \cos^2 2\theta_s + Z_s \sin^2 2\theta_s + Z}, \quad (4-23)$$

$$T_l(\theta) = \frac{2Z_l \cos^2 2\theta_s}{Z_l \cos^2 2\theta_s + Z_s \sin^2 2\theta_s + Z}, \quad (4-24)$$

$$T_s(\theta) = \frac{-2Z_s \sin^2 2\theta_s}{Z_l \cos^2 2\theta_s + Z_s \sin^2 2\theta_s + Z}. \quad (4-25)$$

(4-23) bis (4-25) sind komplexwertige Funktionen und werden im Folgenden als komplexe Reflektanzfunktion sowie komplexe Transmissionsfunktionen für die Longitudinal- bzw. Transversalwelle bezeichnet.

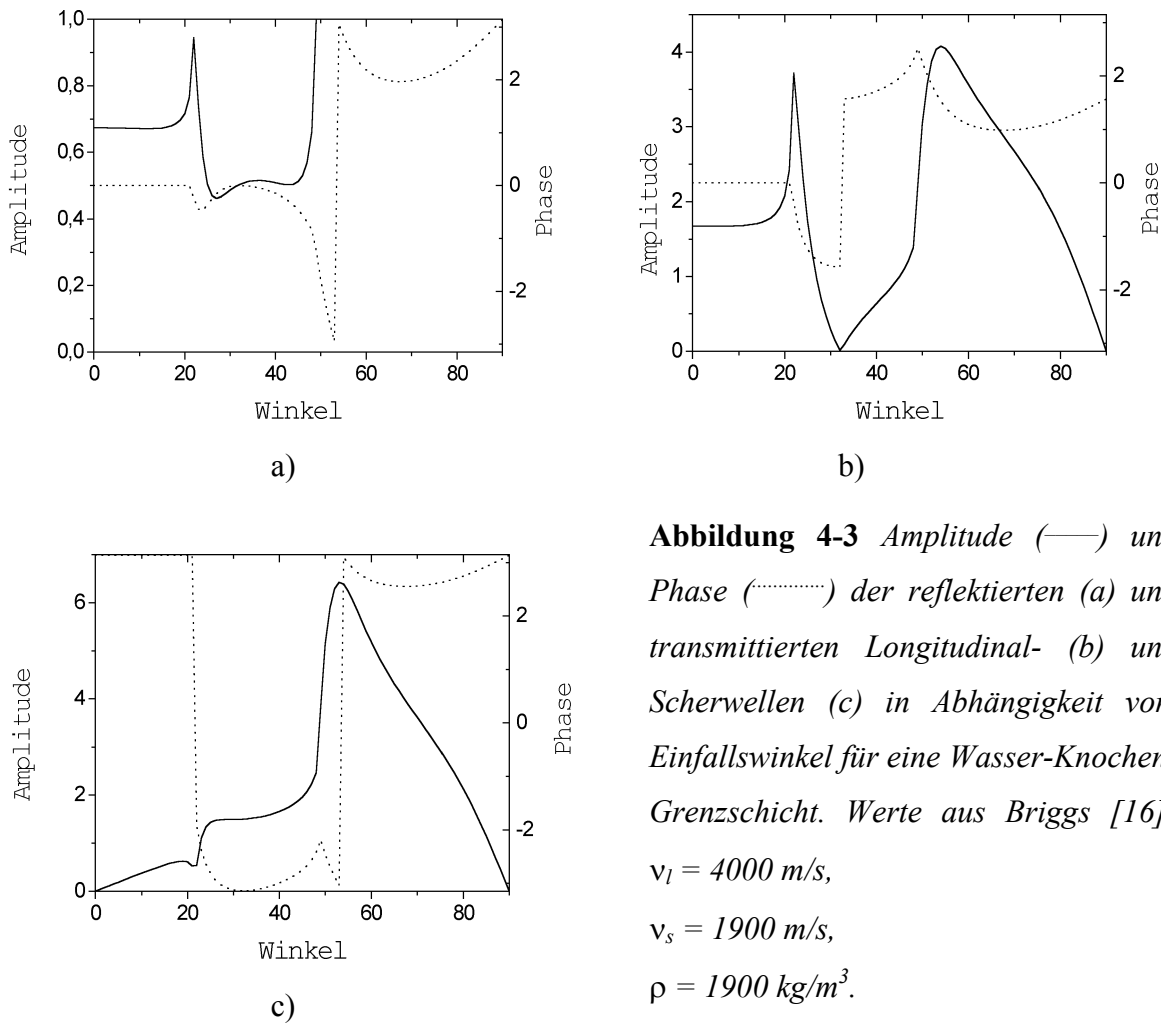


Abbildung 4-3 Amplitude (—) und Phase (·····) der reflektierten (a) und transmittierten Longitudinal- (b) und Scherwellen (c) in Abhängigkeit vom Einfallswinkel für eine Wasser-Knochen-Grenzschicht. Werte aus Briggs [16]:
 $v_l = 4000 \text{ m/s}$,
 $v_s = 1900 \text{ m/s}$,
 $\rho = 1900 \text{ kg/m}^3$.

Das Verhältnis der von der Grenzfläche wegtransportierten Energie zur Energie der einfallenden Welle ist:

$$\frac{E_r}{E} = |R(\theta)|^2, \tag{4-26}$$

$$\frac{E_l}{E} = \frac{\rho_0 \tan \theta}{\rho_1 \tan \theta_l} |T_l(\theta)|^2, \tag{4-27}$$

$$\frac{E_s}{E} = \frac{\rho_0 \tan \theta}{\rho_1 \tan \theta_s} |T_s(\theta)|^2. \tag{4-28}$$

Die Indizes r , l und s bezeichnen die reflektierte Longitudinal- sowie transmittierte Longitudinal- und Scherwellen.

4.3 Schallfeld

Das laterale Auflösungsvermögen hängt maßgeblich vom Schallfelddurchmesser ab. Deshalb werden in der akustischen Mikroskopie in der Regel runde Einzelelementwandler mit starker sphärischer oder zylindrischer Fokussierung eingesetzt. Die Fokussierung erreicht man

durch eine Phasenverschiebung zwischen zentralen und peripheren Wellenanteilen des runden Kolbenschwingers, entweder durch gekrümmte Wandleroberflächen oder den Einsatz einer akustischen Linse. Betrachtet man einen Wandler mit dem Radius a und einem Krümmungsradius ROC (**R**adius **O**f **C**urvatur), dessen Mittelpunkt sich im Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems befindet, so strahlt dieser ein Schallfeld entsprechend Abbildung 4-4 aus.

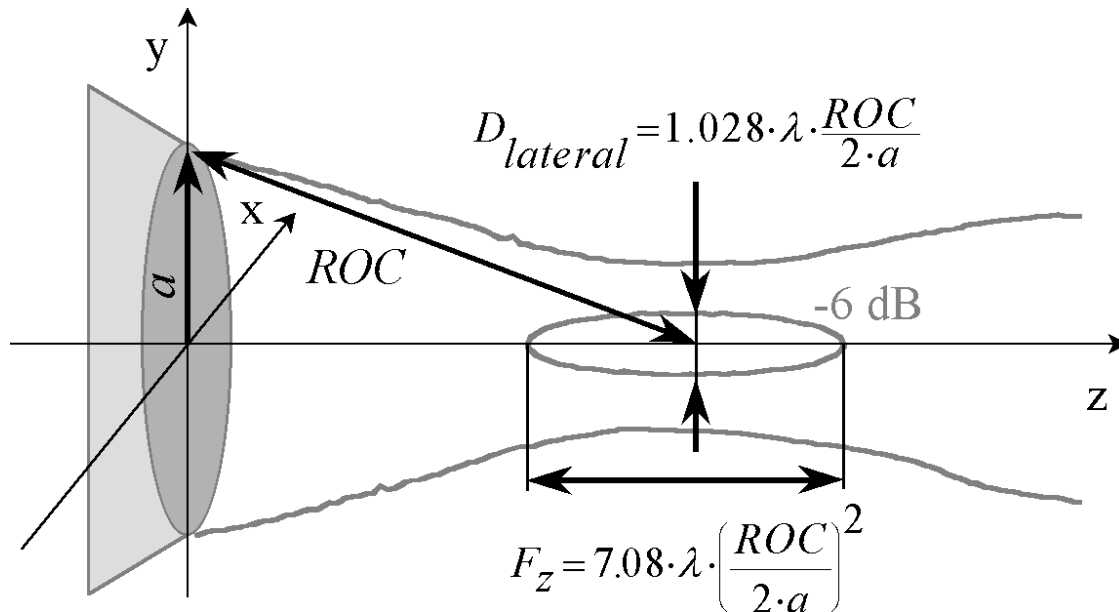


Abbildung 4-4 Die Kenngrößen eines sphärisch fokussierten Schallfeldes.

Unter der Voraussetzung, dass $a^2 \ll ROC^2$ ist, lässt sich das emittierte Schallfeld mit Hilfe der paraxialen Wellentheorie (FRESNEL-Näherung) beschreiben. Die laterale Druckverteilung in der Fokusebene ist nach [53]

$$\left| \frac{p(r)}{p(0)} \right| = \left| \frac{2J_1\left(\frac{kar}{ROC}\right)}{\frac{kar}{ROC}} \right|, \quad (4-29)$$

wobei $p(0)$ der Maximaldruck auf der Schallstrahlachse an der Stelle $z = ROC$ ist. J_1 ist die Besselfunktion erster Ordnung und r ist der laterale Abstand von der Schallstrahlachse (z -Achse). ROC wird auch als Fokusabstand oder geometrischer Fokus bezeichnet. Der wahre Fokus F liegt aufgrund von Beugungseffekten immer näher am Wandler [53]. Das laterale Auflösungsvermögen $D_{lateral}$ wird durch den Schallfelddurchmesser in der geometrischen Fokusebene definiert, an dem die Druckamplitude um -3 dB abgefallen ist:

$$D_{lateral} = 1.028 \cdot \lambda \cdot f^\# . \quad (4-30)$$

Die f -Nummer $f^\# (= ROC/2a)$ beschreibt das Verhältnis von Krümmungsradius zu Wandlerdurchmesser. Die axiale Druckverteilung ist nach [53]

$$\left| \frac{p(z)}{p(0)} \right| = \frac{ROC}{z} \operatorname{sinc} \left(\frac{a^2}{2\lambda ROC} \left(\frac{ROC}{z} - 1 \right) \right). \quad (4-31)$$

Die Fokustiefe, welche die Entfernung zwischen Punkten auf der Schallstrahlachse vor und hinter der Fokusposition beschreibt, an denen die Druckamplitude um -3 dB relativ zum Maximum abgefallen ist, ergibt sich aus (4-31):

$$F_z = 7.08 \cdot \lambda \cdot f^{\#2}. \quad (4-32)$$

4.4 Sphärische Aberration

Aufgrund der hohen Schallgeschwindigkeitsunterschiede zwischen Wandler (z.B. Saphir-Vorlaufstrecke) und dem Kopplungsmedium ist die sphärische Aberration im Kopplungsmedium zu vernachlässigen [16]. Der entgegengesetzte Effekt tritt jedoch auf, wenn die Schallwellen aus der Flüssigkeit in den Festkörper eintreten.

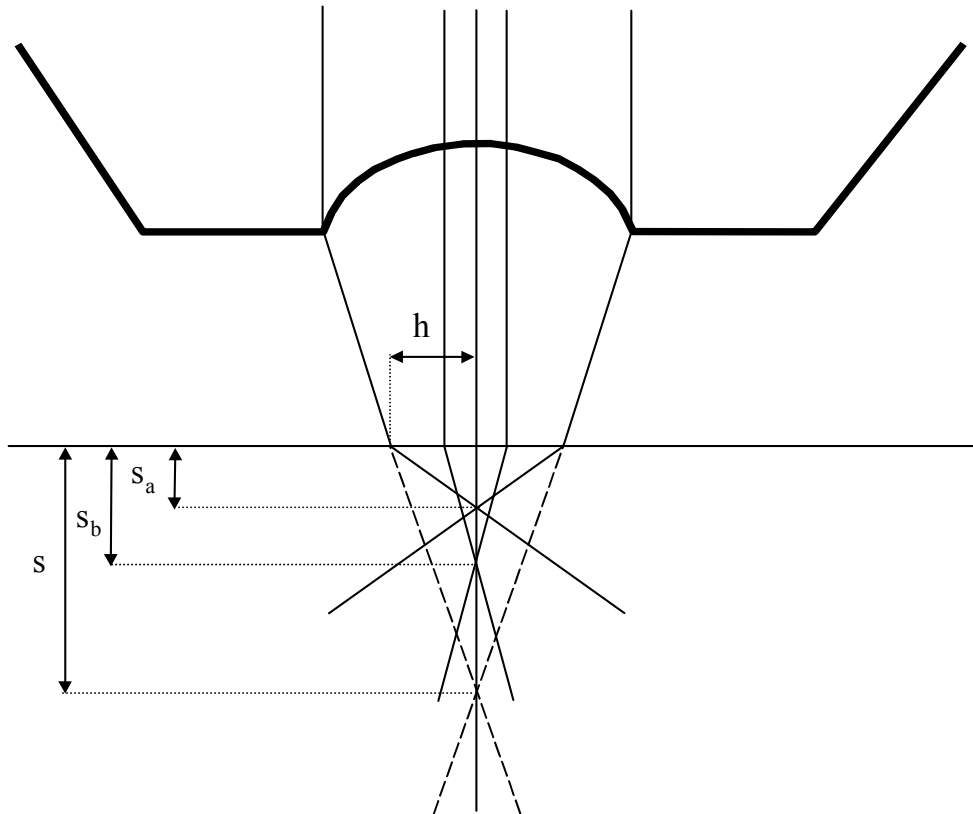


Abbildung 4-5 Sphärische Aberration bei der Fokussierung unterhalb der Oberfläche eines Festkörpers, hervorgerufen durch Brechung an der Grenzfläche.

Strahlen mit dem virtuellen Fokus im Abstand s werden an der Oberfläche gebrochen, so dass Strahlen, welche im Abstand h von der Schallstrahlachse die Grenzfläche passieren, die Achse im Abstand s_a kreuzen, während sich der Fokus der paraxialen Strahlen im Abstand s_b befindet (Abbildung 4-5). Unter Verwendung des Brechungsindex n (Verhältnis der

Schallgeschwindigkeiten von Kopplungsmedium und Festkörper) und den Gesetzen der geometrischen Optik sind diese Größen verknüpft durch

$$\frac{1}{s} + \frac{n}{s_a} = \frac{h^2(1-n)^2}{2} \frac{1}{s^3}, \quad (4-33)$$

$$\frac{1}{s} + \frac{n}{s_b} = 0. \quad (4-34)$$

Unter der Annahme, dass die Größenordnung der Beugungseffekte vergleichbar mit der geometrischen Aberration sind, liegt der wahre Fokus auf der halben Strecke zwischen paraxialem Fokus s_b und dem Fokus der Strahlen mit dem größten Einfallswinkel s_a [16]. Unter Verwendung von (4-33), (4-34) und

$$\tan \alpha = \frac{h}{s} \quad (4-35)$$

erhält man

$$s_a - s_b = n \cdot s \left[1 - \frac{1}{1 - \frac{(1-n)^2 \tan^2 \alpha}{2}} \right]. \quad (4-36)$$

Die Verschiebung der wahren Fokusposition relativ zum paraxialen Fokus hängt demnach sowohl vom Verhältnis der Schallgeschwindigkeiten als auch vom Öffnungswinkel und dem Abstand zur Oberfläche ab.

4.5 Schallschwächung

Die Dämpfung einer Schallwelle setzt sich hauptsächlich aus zwei Mechanismen zusammen, der Schallabsorption und der Streuung.

4.5.1 Absorption

Die Herleitung der verlustfreien Wellengleichung vernachlässigt Absorptionseffekte, bei denen akustische Energie in Wärme umgewandelt wird. Die hauptsächlichsten Absorptionsmechanismen sind viskose Verluste, Wärmeleitung und Relaxationsprozesse. Viskose Verluste werden dadurch verursacht, dass Flüssigkeiten der durch Kompression und Expansion hervorgerufenen Störung einen Widerstand entgegensetzen, was man als Viskosität bezeichnet. Die so hervorgerufene Absorption α wird bestimmt durch

$$\alpha = \frac{\omega}{v} \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2} - 1}{1 + (\omega\tau)^2} \right]^{1/2}, \quad (4-37)$$

$$v_p = v \sqrt{2} \left[\frac{1 + (\omega\tau)^2}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2 + 1}} \right]^{1/2}, \quad (4-38)$$

wobei ω die Kreisfrequenz der Welle, v_p die Phasengeschwindigkeit und τ die Relaxationszeit sind. Jeder Absorptionsprozess ist durch eine Relaxationszeit charakterisiert. Die Abhängigkeit der Phasengeschwindigkeit v_p von der Frequenz ist ein Indiz dafür, dass dissipative Medien dispersiv sind. Ein weiterer Absorptionsmechanismus entsteht durch Wärmeleitung. Der klassische Absorptionskoeffizient setzt sich aus der Summe der beiden von STOKES und KIRCHOFF abgeleiteten Koeffizienten zusammen und berücksichtigt folglich Verluste durch Scherviskosität und Wärmeleitung:

$$\alpha_{\text{klassisch}} = \frac{\omega^2}{2\rho_0 v^3} \left[\frac{4}{3}\eta + (\gamma - 1) \frac{\kappa}{v_p} \right]. \quad (4-39)$$

η ist die Scherviskosität, κ die Wärmeleitfähigkeit und γ das Verhältnis der spezifischen Wärmekapazitäten bei konstantem Druck c_p und bei konstantem Volumen c_v . Experimentelle Daten zeigen jedoch eine Diskrepanz zum klassisch berechneten Absorptionskoeffizienten, der z.B. im Falle von Azeton bis zum einem Faktor von 4,3 abweicht [54]. Der größte Teil der nicht durch klassische Absorption zu beschreibenden Energieverluste wird durch strukturelle, thermische und chemische Relaxationsprozesse verursacht, welche man auch als Volumenviskosität bezeichnet.

4.5.2 Streuung

Streuung kann als eine Änderung von Amplitude, Frequenz, Phasengeschwindigkeit und/oder Ausbreitungsrichtung aufgrund einer Störung oder Unregelmäßigkeit im Ausbreitungsmedium definiert werden. Die für die Streuprozesse notwendige Energie wird der einfallenden Primärwelle entnommen, und es kommt es zur Schallschwächung. Eine Abhandlung der Streutheorie ist in einer Reihe herausragender Texte umfassend diskutiert [65,67,73,95,100]. Das grundlegende Konzept beschreibt die Streuwelle, die sich ergibt aus der Differenz der tatsächlichen Druckwelle und der Welle, die ohne die Störung vorhanden gewesen wäre. Ausgehend von diesem Punkt kann die Behandlung in verschiedene Richtungen führen. Die Form des Streufeldes hängt von der Form des Streuers, seiner Kompressibilität und Dichte sowie der Größe relativ zur Wellenlänge ab. Für große Teilchen ist $ka \gg 1$ ($k = 2\pi / \lambda$ ist die Wellenzahl und a der Radius des Teilchens), und man kann die Streuung gemäß den Gesetzen der geometrischen Akustik betrachten, die im Abschnitt 4.1 behandelt

werden. Der Begriff Streuung im engeren Sinne bezieht sich auf die Fälle, bei denen $ka \approx 1$ (MIE-Streuung) oder wesentlich kleiner als 1 (RAYLEIGH - Streuung) ist.

Als Maß zur Charakterisierung der Streuung verwendet man häufig das Verhältnis von gesamter gestreuter Leistung D_{Str} zur Intensität der einfallenden Welle I_0 :

$$\sigma_{eff} = D_{Str}/I_0, \quad (4-40)$$

was die Dimension einer Fläche hat und deshalb auch als effektiver Streuquerschnitt bezeichnet wird. Für den Fall der geometrischen Streuung an einer Kugel ist dieser gleich der doppelten Fläche des diametralen Kugelschnittes [100]:

$$\sigma_{eff} = 2\pi a^2. \quad (4-41)$$

Für den Fall $kr \gg 1$ (große Entfernung zum Beobachtungspunkt r) und $ka \ll 1$ (RAYLEIGH-Streuung) ergibt sich für die Intensität der an einer Kugel gestreuten Welle die Form

$$I_{Rayleigh} = I_0 \frac{\omega^4 a^6}{9\nu^4 r^2} \left(\frac{K_1 - K_2}{K_1} + 3 \frac{\rho_2 - \rho_1}{2\rho_2 + \rho_1} \cos\theta \right)^2. \quad (4-42)$$

Charakteristisch hierfür sind das Überwiegen der Rückstreuung und die Proportionalität der Intensität der Streuung zur vierten Potenz der Frequenz sowie zur sechsten Potenz des Radius der Kugel. Die Kompressibilitäten K_i und Dichten ρ_i beeinflussen lediglich den Winkel θ , bei dem die Streuung Null ist. Der effektive Streuquerschnitt ist

$$\sigma_{eff} = \frac{4\pi\omega^4 a^6}{9\nu^4 r^2} \left(\left| \frac{K_1 - K_2}{K_1} \right|^2 + \frac{1}{3} \left| \frac{3\rho_2 - 3\rho_1}{2\rho_2 + \rho_1} \right|^2 \right). \quad (4-43)$$

Für $ka \ll 1$ ist demzufolge σ_{eff} nur ein Bruchteil der Kugelquerschnittsfläche.

Die MIE-Streuung lässt sich nicht einfach beschreiben. Die einfachste Lösung erhält man für den Fall der nichtkomprimierbaren Kugel für $ka \gg 1$ und $kr \gg 1$:

$$I_{Mie} = I_0 \frac{a^2}{4r^2} \left(1 + \cot \frac{\theta}{2} J_1^2(ka \sin\theta) \right), \quad (4-44)$$

wobei J_1 die BESSEL-Funktion erster Ordnung ist. Im Unterschied zur RAYLEIGH-Streuung ist hier die Frequenzabhängigkeit durch eine komplizierte Form im Quadrat der BESSEL-Funktion enthalten. Auch der Streuparameter ka hat entscheidenden Einfluss auf die Form des Streufeldes. Während es für kleine Werte von ka noch annähernd der Form der Rayleigh-Streuung entspricht, wächst mit steigenden Werten von ka auch der Anteil in Richtung der einfallenden Welle. Eine wichtige Besonderheit für den Fall der komprimierbaren Kugel ist die Möglichkeit der Resonanzanregung von Eigenschwingungen der elastischen Kugel, was für charakteristische Werte von ka zu einem starken Anstieg des effektiven Streuquerschnittes führt.

Die Beschreibung unter Berücksichtigung von Vielfachstreuung, das heißt der Streuung einer Streuwelle an einem weiteren Streuteilchen, ist außerordentlich kompliziert. Unter den Annahmen, dass das Streufeld klein ist im Vergleich zum anregenden Primärfeld, die Anzahl der streuenden Teilchen nicht allzu groß und deren Abstände nicht allzu klein sind, lässt sich das Gesamtfeld aus der Überlagerung der Einzelstreufelder finden (BORN-Näherung).

4.6 Eigenschaften des Kopplungsmediums

Die durch dissipative Prozesse hervorgerufene Dispersion nimmt einen relativ kleinen Frequenzbereich ein, so dass die Größe v_0 als praktisch unabhängig von der Frequenz betrachtet werden kann. Während jedoch in den meisten Flüssigkeiten eine monotone Abnahme der Schallgeschwindigkeit bei steigender Temperatur zu verzeichnen ist, wächst sie im Wasser bis zu einem maximalen Wert von 1550 m/s bei 67°C an und fällt erst danach wieder ab [16].

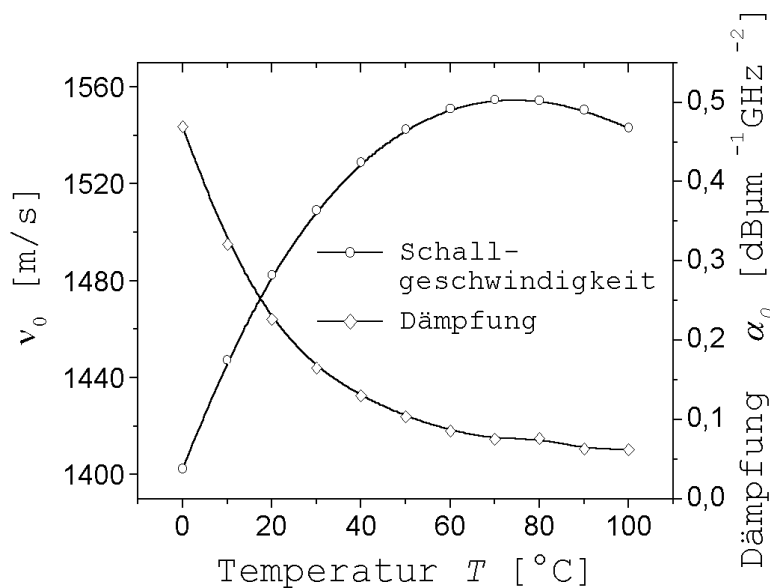


Abbildung 4-6 Schallgeschwindigkeit und Dämpfung in Wasser in Abhängigkeit von der Temperatur.

In diesem Verhalten zeigt sich die bekannte Anomalie des Wassers, die mit den besonderen Struktureigenschaften verbunden ist. Diese führen zu einer höheren Packungsdichte der Moleküle bei Temperaturerhöhung. Man kann die Abhängigkeit der Schallgeschwindigkeit von der Temperatur sehr gut durch ein Polynom fünfter Ordnung beschreiben [24]:

$$v_0 = \sum_{i=0}^5 k_i T^i, \tag{4-45}$$

wobei T die Temperatur in °C darstellt. Die Koeffizienten k_i sind in Tabelle 4-1 zusammengefasst.

Tabelle 4-1 Polynomkoeffizienten der Schallgeschwindigkeit in Wasser (die Werte wurden unverändert aus [16] übernommen).

i	k_i
0	$0,140238754 \times 10^4$
1	$0,503711129 \times 10^1$
2	$-0,580852166 \times 10^{-1}$
3	$0,334198834 \times 10^{-3}$
4	$-0,147800417 \times 10^{-5}$
5	$0,314643091 \times 10^{-8}$

Experimentelle Messungen des Absorptionskoeffizienten haben gezeigt, dass in einem großen Frequenzbereich das Verhältnis α_0/v_0^2 einen konstanten Wert beibehält. Das liegt daran, dass die Relaxationszeiten sehr viel kleiner als die typischerweise verwendeten Periodendauern der Wellen sind ($\omega\tau \ll 1$). In guter Näherung ergibt sich für die Dämpfung im Wasser:

$$\alpha \approx \frac{\omega^2 \tau}{2v_0} \quad (4-46)$$

Bei steigender Temperatur verringert sich die Dämpfung, wobei der Abfall bei größeren Temperaturen geringer wird (Abbildung 4-6). In Tabelle 4-2 sind die wichtigsten akustischen Eigenschaften des Wassers in Abhängigkeit von der Temperatur zusammengefasst.

Tabelle 4-2 Akustische Eigenschaften von reinem Wasser (aus [16]).

T (°C)	v_0 (µm/ns)	Z (Mrayl)	α_0 (dB/µm/GHz ²)
0	1,40239	1,402	0,469
10	1,44727	1,447	0,321
20	1,48234	1,480	0,226
30	1,50913	1,503	0,165
40	1,52886	1,517	0,130
50	1,54255	1,524	0,104
60	1,55099	1,525	0,086
70	1,55480	1,520	0,075
80	1,55449	1,511	0,076
90	1,55048	1,497	0,063
100	1,54311	1,479	0,062

Eine Erhöhung des statischen Druckes bewirkt ebenfalls eine Geschwindigkeitszunahme. Im Wasser beträgt der Anstieg 10^{-6} m/(s·Pa) [100]. Für die bei Normaldruck durchgeführten Messungen kann dieser Einfluss allerdings vernachlässigt werden.

4.7 Bestimmung der Materialkonstanten

Obwohl kortikaler Knochen inhomogen, anisotrop und viskoelastisch ist, können seine elastischen Eigenschaften in guter Näherung durch ein linear elastisches, anisotropes Modell beschrieben werden [81,105]. Das HOOKE'sche Gesetz für ein solches Material ist:

$$\sigma_i = c_{ij}\varepsilon_j, \quad (4-47)$$

wobei σ_i und ε_j Komponenten von Spannungs- und Dehnungstensor bezeichnen. i und j kennzeichnen die orthogonalen Richtungen eines Koordinatensystems ($i, j = 1, 2, 3$), c_{ij} ist die Matrix der elastischen Koeffizienten, welche für ein orthotropes Material die folgende Form hat:

$$[c_{ij}] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix}. \quad (4-48)$$

Die Matrix hat zwölf von Null verschiedene Komponenten, wovon neun unabhängig sind. Das Reziproke dieser Matrix wird als Komplianzmatrix s_{ij} bezeichnet und enthält die Elastizitäts- und Schermoduln E_i und G_{ij} , sowie die Poisson-Zahlen σ_{ij} :

$$[c_{ij}]^{-1} = [s_{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\sigma_{21}}{E_2} & -\frac{\sigma_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\sigma_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\sigma_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\sigma_{13}}{E_1} & -\frac{\sigma_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{31}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix}. \quad (4-49)$$

4. Wellenausbreitung

E_i sind die Elastizitätsmoduln in Richtung i , σ_{ij} die Poisson-Zahlen für die durch eine Spannung in i -Richtung hervorgerufene Dehnung in j -Richtung, und G_{ij} sind die Schermoduln in der ij -Ebene. Da die Matrix symmetrisch ist, folgt:

$$\frac{\sigma_{ij}}{E_i} = \frac{\sigma_{ji}}{E_j}, \quad (4-50)$$

Die Lösung der Bewegungsgleichung für elastische Wellen ergibt die Beziehungen zu den Wellengeschwindigkeiten [41]:

$$c_{11} = \rho v_{1/1}^2, \quad (4-51)$$

$$c_{22} = \rho v_{2/2}^2, \quad (4-52)$$

$$c_{33} = \rho v_{3/3}^2, \quad (4-53)$$

$$c_{44} = \rho v_{2/3}^2 = \rho v_{3/2}^2, \quad (4-54)$$

$$c_{55} = \rho v_{1/3}^2 = \rho v_{3/1}^2, \quad (4-55)$$

$$c_{66} = \rho v_{1/2}^2 = \rho v_{2/1}^2, \quad (4-56)$$

$$c_{12} = \sqrt{(c_{11} + c_{66} - 2\rho v_{12/12}^2) + (c_{22} + c_{66} - 2\rho v_{12/12}^2)} - c_{66}, \quad (4-57)$$

$$c_{13} = \sqrt{(c_{11} + c_{55} - 2\rho v_{13/13}^2) + (c_{33} + c_{55} - 2\rho v_{13/13}^2)} - c_{55}, \quad (4-58)$$

$$c_{23} = \sqrt{(c_{22} + c_{44} - 2\rho v_{23/23}^2) + (c_{33} + c_{44} - 2\rho v_{23/23}^2)} - c_{44}. \quad (4-59)$$

Unter orthotropen Bedingungen gelten außerdem folgende Beziehungen:

$$c_{55} + c_{66} = 2\rho v_{23/1}^2, \quad (4-60)$$

$$c_{44} + c_{66} = 2\rho v_{13/2}^2, \quad (4-61)$$

$$c_{44} + c_{55} = 2\rho v_{13/3}^2, \quad (4-62)$$

v_{ij} : Geschwindigkeit einer Welle in Richtung i mit der Teilchenbewegung in Richtung j .

$v_{ij/k}$: Geschwindigkeit einer Welle in Richtung $(i+j)$ mit Teilchenbewegung in Richtung k .

$v_{ij/kl}$: Geschwindigkeit einer Welle in Richtung $(i+j)$ mit Teilchenbewegung in der durch k und l aufgespannten Ebene.

v_{ij} sind Longitudinalwellen, wenn $i = j$, und ansonsten Transversalwellen. $v_{ij/kl}$ können entweder Quasi-Longitudinal- oder Quasi-Transversalwellen sein. $v_{ij/k}$ kennzeichnen Transversalwellen.

Zur Bestimmung der elastischen Moduln anhand der richtungsabhängigen Schallgeschwindigkeiten sind die Verhältnisse von Strukturgrößen und Querschnitt zur Wellenlänge von Bedeutung. Generell müssen die charakteristischen Strukturgrößen wesentlich kleiner als die Wellenlänge sein, damit das Material von der Welle als homogen "angesehen" wird. Unter der Voraussetzung, dass auch der Querschnitt der Probe kleiner als die Wellenlänge ist, spricht man vom Stab-Modus (engl.: bar). Dies ist in analog zu dem Fall, dass auf die gesamte Oberfläche eines an den Enden eingespannten Stabes eine mechanische Spannung ausgeübt wird. Die Moduln ergeben sich dann aus den elastischen Koeffizienten [81]:

$$E_i = c_{ii} = \rho v_i^2 \quad (4-63)$$

$$G_{ij} = c_{ij} = \rho v_{ij}^2 \quad (4-64)$$

Ist der Querschnitt der Probe wesentlich größer als die Wellenlänge, so bezeichnet man die Wellenausbreitung als Volumen-Modus (engl.: bulk). Die Analogie zur Mechanik ist der Fall, dass die mechanische Spannung nur an einer im Vergleich zur gesamten Oberfläche kleinen Fläche angreift (Punktlast). Das Spannungs-Dehnungs-Verhalten wird dann durch die Möglichkeit der Kräfteableitung verändert. Zur Bestimmung der Moduln ist daher zusätzlich die Kenntnis der einzelnen Poisson-Verhältnisse notwendig. Oft sind diese mit akustischen Methoden nicht zu bestimmen. Daher werden zur Charakterisierung der anisotropen elastischen Eigenschaften von Knochen zumeist die direkt aus den Schallgeschwindigkeiten abzuleitenden Konstanten des Elastizitätstensors herangezogen.

Stoffe mit kubischer Symmetrie haben nur noch drei unabhängige Konstanten, die als c_{11} ($= c_{22} = c_{33}$), c_{44} ($= c_{55} = c_{66}$) und c_{12} ($= c_{ij}$, für $i \neq j$; i und $j \leq 3$) bezeichnet werden. c_{44} ist in diesem Fall identisch mit dem Schermodul G . In isotropen Feststoffen gilt:

$$c_{11} - 2c_{44} = c_{12}, \quad (4-65)$$

Daraus lassen sich unter anderem die folgenden technischen Materialgrößen ableiten:

$$\text{Dichte:} \quad \rho = \frac{Z_l}{v_l}, \quad (4-66)$$

$$\text{Festigkeit:} \quad c_{11} = \rho v_l^2 \quad (4-67)$$

$$\text{Schermodul:} \quad G = c_{44} = \rho v_s^2 \quad (4-68)$$

$$\text{Poissonzahl:} \quad \sigma = \frac{1 - 2c_{44}/c_{11}}{2(1 - c_{44}/c_{11})} \quad (4-69)$$

$$\text{Elastizitätsmodul:} \quad E = c_{11} \frac{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)}{(1 - \sigma)} \quad (4-70)$$

$$\text{Kompressionsmodul:} \quad B = c_{11} - \frac{4}{3}c_{44} \quad (4-71)$$