1. Einleitung

Eines der aktuellsten Forschungsgebiete in der stochastischen Analysis sind stochastische partielle Differentialgleichungen. Dies betrifft sowohl die Theorie als auch die Anwendungen. Beispielsweise können durch stochastische partielle Differentialgleichungen Prozesse in der Populationsgenetik [44], [45], die Ausbreitung von Epidemien [6], die Ausbreitung von Schadstoffen in der Atmosphäre [31], [47], zufällige Schwingungen u.v.a.m. modelliert werden. Auch die Aufgabe der optimalen Schätzung eines Systemzustandes auf der Grundlage verrauschter Beobachtungen (Filtration) führt auf stochastische partielle Differentialgleichungen.

Die obigen Beispiele führen auf Differentialgleichungen 2. Ordnung des Typs

$$\frac{\partial}{\partial t} v(t,x) = \Delta_x v(t,x) + F(t,x,v(t,x)) + G(t,x,v(t,x),\nabla_x v(t,x))\dot{W}(t) \tag{1.1}$$

oder

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} v(t,x) = \Delta_x v(t,x) + F(t,x,v(t,x)) + G(t,x,v(t,x),\nabla_x v(t,x))\dot{W}(t). \tag{1.2}$$

$\dot{W}(t)$ ist dabei meistens ein weißes Rauschen bezüglich der Zeit oder bezüglich der Zeit und des Ortes. Oft wird eine Lösung gesucht, die vorgegebene Anfangsbedingungen und Randbedingungen erfüllt. Zur Untersuchung von stochastischen partiellen Differentialgleichungen und damit zusammenhängenden Anfangs- und Randwertproblemen haben sich verallgemeinerte Lösungsbegriffe eingebürgert. Diese beruhen auf der Interpretation der Anfangswert- bzw. der Anfangs- und Randwertaufgabe als stochastische Operatorgleichung. Dabei gibt es zwei grundsätzliche Herangehensweisen:

(1) Interpretation als stochastische Integralgleichungen;

(2) Stochastische Operatorengleichungen mit monotonen und koerzitiven Operatoren.

Bei der ersten Herangehensweise werden die stochastischen Integralgleichungen mittels der Greenschen Funktion des zugehörigen deterministischen linearen Problems von (1) oder (2) konstruiert, vgl. Manthey [42], [43], [45], oder in die Integralgleichung geht die Halbgruppe ein, deren erzeugender Operator der Laplaceoperator Δ_x mit den entsprechenden Randbedingungen ist, vgl. Grecksch [16] und DaPrato [55] und [50], [51]. Die Existenz von Lösungen wird durch die Anwendung von Fixpunktsätzen nachgewiesen. Bei der Anwendung der monotonen und koerzitiven Operatoren betrachtet man das Problem als stochastische Evolutionsgleichung über einem Evolutionstripel von Hilberträumen, vgl. Pardoux [4], [48], [49], [52], [53], und Krylov und Rozovskij [39]. Die Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen basieren dabei wesentlich auf dem Grundgedanken der Galerkinmethode. Beziehungen zwischen den beiden Herangehensweisen werden u.a. von Grecksch und Tudor [15] untersucht.

Neben der Untersuchung von Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen nimmt die Diskussion zur näherungsweisen Ermittlung von Lösungen einen breiten Raum ein. Üblich sind Galerkinmethoden [3], [28], [32], [34], [41] und Diskretisierungsmethoden [7], [9], [30], Grecksch und Kloeden [13], Grecksch und Blaar [1]. Oft werden (1) und (2) als stochastische Gleichungen im Sinne von Itô oder Stratonovich interpretiert, wenn beispielsweise $(W(t))_{t\geq 0}$ ein Wiener-Prozess ist. Bekanntlich sind die Realisierungen eines Wiener-Prozesses mit Wahrscheinlichkeit 1 nicht differenzierbar. Somit ergibt sich eine weitere Interpretationsmöglichkeit, die darin besteht, dass der Wiener-Prozess durch eine Folge von Prozessen mit stückweise differenzierbaren Trajektorien ersetzt wird, siehe beispielsweise Gyöngy und Krylov [23], [25], [26], [27] oder Grecksch und Schmalfuß [14] oder Twardowska [65]. Der Vorteil dieser Methode besteht darin, dass die approximierten Probleme realisierungsweise Differentialgleichungen sind, auf die die deterministische Numerik angewandt werden kann. Schon im deterministischen Fall weisen partielle Differentialgleichungen erster Ordnung und die zugehörigen Anfangs- und Randwertprobleme Besonderheiten gegenüber Differentialgleichungen zweiter Ordnung auf. Einer der Gründe ist, dass der Operator der Ortsableitungen im Falle 1. Ordnung nicht koerzitiv ist. Daher hat sich für diese Aufgaben eine recht eigenständige Forschung entwickelt [18], [19], [20], [21], [35], [36], [37], [38], [56], [66]. Vom Standpunkt der Anwendungen ist es naheliegend, auch bei partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zufällige Effekte einzubeziehen.

Ein wichtiges Beispiel für partielle Differentialgleichungen 1. Ordnung sind die Telegraphengleichungen, vgl. [15],

$$\frac{\partial}{\partial x} i(t,x) + C\frac{\partial}{\partial t} v(t,x) + Gv(t,x) = 0 \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} v(t,x) + L\frac{\partial}{\partial t} i(t,x) + Ri(t,x) = 0. \tag{1.4}$$

Durch diese Gleichungen werden die Veränderungen der Stromstärke und Spannung in einem elektrischen Leiter beschrieben. In einer natürlichen Weise erhält man eine stochastische Version dieser Gleichungen durch die Hinzunahme von Rauschprozessen

$$\frac{\partial}{\partial x} i(t,x) + C\frac{\partial}{\partial t} v(t,x) + Gv(t,x) = h_1(t,x)dW_1(t) \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} v(t,x) + L\frac{\partial}{\partial t} i(t,x) + Ri(t,x) = h_2(t,x)dW_2(t), \tag{1.6}$$

wobei $W_1(t)$ und $W_2(t)$ unabhängige Wiener-Prozesse sind und die stochastischen Differentiale als Itô-Differentiale aufgefaßt werden. Weitere Anwendungen stochastischer partieller Differentialgleichungen 1. Ordnung findet man in der Finanzmathematik. Beispielsweise wird durch eine

Gleichung des Types

$$dr(t,x) = \frac{\partial}{\partial x}\left[r(t,x) + \frac{\lambda}{2}|\alpha(x)|^2\right] dt + \alpha(x) dW(t) \tag{1.7}$$

die Entwicklung einer Zinsstruktur $r(t,x)$ beschrieben, wobei x die Laufzeit der Kapitalanlage beschreibt. Eine Gleichung des Types

$$dr(t,x) = \left(\frac{\partial}{\partial x} r(t,x) + \tau^*(t,x)\int_0^x \tau(t,\nu)\, d\nu\right) dt + \tau^*(t,x) dW(t) \tag{1.8}$$

wird von Brace und Musiela in [2] benutzt, um den Kaufpreis von Optionen, Swaps und Futures zur Zeit t zu bewerten, die zur Zeit x fällig werden.

Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen für eine Anfangswertaufgabe mit einer stochastischen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung durch Interpretation als stochastische Integralgleichung werden von H. Kunita in [40] mittels einer stochastischen Version der Charakteristiken-Methode hergeleitet. Dieser Weg wird auch in [5], [54], [63], [64] beschritten. In [17] wird einem Anfangswertproblem mit einer stochastischen partiellen Differentialgleichung eine Familie von parabolisierten Aufgaben zugeordnet, deren Lösungen in Wahrscheinlichkeit die Lösung des Ausgangsproblems approximieren. In [17] werden auch Regularitätsaussagen der Lösungen bewiesen. Weitere Regularitätsaussagen werden in [8] und [10] gemacht.

Anliegen der vorliegenden Arbeit ist die näherungsweise Ermittlung von Lösungen stochastischer partieller Differentialgleichungen 1. Ordnung. Das erste Kapitel ist Lösungsbegriffen, Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen bei stochastischen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung gewidmet. Es wird auf die Charakteristikenmethode [40], die Methode der parabolischen Regularisierung [17] und die Anwendung von Halbgruppen [55] eingegangen, und Beziehungen zwischen den einzelnen Lösungsbegriffen werden diskutiert. Theorem 2.5 enthält eine Aussage über die stetige Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen, wenn die Lösungen mit der Charakteristikenmethode konstruiert werden. Für den Fall einer linearen Gleichung wird die Stetigkeit im quadratischen Mittel bezüglich der Zeit gezeigt (Theorem 2.6).

Im zweiten Kapitel werden finite Differenzenmethoden für ein Anfangswertproblem mit einer stochastischen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung diskutiert. Ausführlich wird auf den linearen Fall

$$d_t v(t,x) + a v_x(t,x)\, dt + b v(t,x)\, dW(t) = 0 \tag{1.9}$$

$$v(0,x) = f(x), \quad t \geq 0, \; x \in \mathbb{R}^1 \tag{1.10}$$

eingegangen. Eine Version des „Forward-Time-Forward-Space"-Schema (FTFS-Schema) für diese Aufgabe ist durch

$$u_k^{n+1} = (1 + a\frac{\Delta t}{\Delta x})u_k^n - a\frac{\Delta t}{\Delta x}u_{k+1}^n - b u_k^n (W((n+1)\Delta t) - W(n\Delta t)) \tag{1.11}$$

gegeben. Im Teilkapitel 3.2 werden die Begriffe der Konsistenz (Definition 3.1) und Stabilität (Definition 3.2) eingeführt. Die Konsistenz und die Stabilität sind dem deterministischen Fall angelehnt. Hier wird ein Stabilitätsbegriff gewählt, der das Fehlerwachstum auf höchstens exponentielles Wachstum beschränkt. In den Theoremen 3.1 und 3.2 wird die Stabilität des stochastischen FTFS-Schemas (1.11) und eines Lax-Friedrich-Verfahrens für (1.9) bewiesen. Das FTFS-Verfahren ist auch konsistent (Theorem 3.3), und für dieses Beispiel folgt hieraus auch die die schwache Konvergenz (Theorem 3.4).

Bei deterministischen Gleichungen ist im linearen Fall bei der Stabilitätsanalyse auch die Anwendung der Fourier-Transformation üblich. Dieser Grundgedanke ist auch für den stochastischen Fall hilfreich. Es gelingt im Theorem 3.5 die Formulierung eines notwendigen und hinreichenden Stabilitätskriteriums. Korollar 3.1 gibt einen Spezialfall an, wo aus der Stabilität des zugehörigen deterministischen Problems die Stabilität des stochastischen Problems folgt. Schließlich wird auf die Stabilität von Mehrschrittverfahren eingegangen. Das Theorem 3.7 zeigt, dass der hier gewählte Konsistenzbegriff auch hinreichend für die schwache Konvergenz eines Differenzenverfahrens im Falle einer nichtlinearen stochastischen partiellen Differentialgleichung 1. Ordnung ist.

Das 4. Kapitel beinhaltet eine Approximationsaussage (Theorem 4.1), wenn der Wiener-Prozess durch eine Folge von Prozessen mit stückweise differenzierbaren Trajektorien ersetzt wird. Für die approximierenden Probleme können die Stabilität und die Konsistenz bewiesen werden. Schließlich werden im Teilkapitel 4.3.2 Systeme von partiellen Differentialgleichungen untersucht.