2. Hyperbolische stochastische partielle Differentialgleichungen

Im vorliegenden Kapitel erfolgt eine Darstellung von Lösungsbegriffen stochastischer partieller Differentialgleichungen und der entsprechenden Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen. Grundlegend sind dabei die Arbeiten von H. Kunita, [40], und von W. Grecksch und C. Tudor, [17], die Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen zum einen mit der Charakteristikenmethode, zum anderen mit der Methode der parabolischen Regularisierung herleiten. Im Anschluß werden die Wechselbeziehungen zwischen den Lösungsbegriffen im hyperbolischen Fall untersucht. Am Ende dieses Kapitels findet sich eine Aufstellung von Eigenschaften der Lösungen.

2.1 Lösungsbegriffe

2.1.1 Lösungsbegriff nach Kunita

Definition 2.1. Ein lokaler $C^{m,\alpha}$-Prozeß X_t heißt lokales $C^{m,\alpha}$-Martingal, falls die gestoppten Prozesse $D^k X_t^{T_n(x)}$, $\mid k \mid \leq m$, $n = 1, 2, ...$ Martingale sind für jedes x, wobei $T_n(x)$ eine erreichbare, unterhalbstetige Stoppzeit ist. Dabei ist $C^{m,\alpha}$, der Raum der m-mal stetig differenzierbaren Funktionen, wobei die m-te Ableitung α-Hölderstetig ist. k bezeichnet einen Multi-Index nichtnegativer ganzer Zahlen, $\mid k \mid = k_1 + k_2 + \cdots + k_n$ und $D^k = \frac{\partial}{\partial x_1}^{k_1} \cdots \frac{\partial}{\partial x_n}^{k_n}$.

H. Kunita betrachtet in [40] Differentialgleichungen der Form

$$du_t = \sum_{j=1}^{n} F^{(j)}(t, x, u_t, \partial u_t) \circ dW_t^j + F^{(0)}(t, x, u_t, \partial u_t)dt. \tag{2.1}$$

Dabei sind die $F^{(j)}(t, x, u, p)$, $j = 1, \cdots, n$ stetige Funktionen in $(t, x, u, p) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n$, stetig differenzierbar in t und $C^{m+2,\alpha}$-Funktionen von (x, u, p). m ist eine positive ganze Zahl größer gleich 3. ∂u_t bezeichnet den Vektor der partiellen Ableitungen $(\partial_1 u_t, \cdots, \partial_n u_t)$ von u_t nach $x_1, \cdots, x_n$, und $W_t = (W_t^1, \cdots, W_t^n)$ ist ein n-dimensionaler Wiener-Prozeß, wobei die W^i, $i = 1, \cdots, n$, Werte in $\mathbb{R}$ annehmen. $\circ dW_t^j$ bezeichnet hier das Stratonovich-Differential. Mit der Beziehung

$$\int_0^t f(x_s) \circ dW(s) = \int_0^t f(x_s) dW(s) + \frac{1}{2} \langle f(x), W \rangle_t \tag{2.2}$$

wird der Zusammenhang zwischen dem stochastischen Integralbegriffen von Itô und Stratonovich hergestellt, wobei $\langle f(x), W \rangle_t$ die quadratische Variation bezeichnet. Im allgemeinen ist für (2.1) nur eine lokale Lösungsdefinition möglich.

Definition 2.2. Gegeben sei eine C^1-Funktion $\Phi(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$. Ein zufälliges Feld $u_t(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in [0\ , T(x))$ mit Werten in $\mathbb{R}^1$ heißt lokale Lösung der Gleichung (2.1) mit der Anfangswertfunktion $u_0(x, \omega) = \Phi(x)$, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind.

- $T = T(x, \omega)$ ist eine erreichbare, unterhalbstetige Stoppzeit.
- $u_t(x)$, $0 \le t \le T(x, \omega)$ ist ein lokales $C^{1,\alpha}$-Semimartingal und erfüllt

$$\begin{aligned} u_t(x) &= \Phi(x) + \sum_{j=1}^{n} \int_0^t F^{(j)}(r, x, u_r(x), \partial u_r(x)) \circ dW_r^j \\ &\quad + \int_0^t F^{(0)}(r, x, u_r(x), \partial u_r(x)) dr \end{aligned} \tag{2.3}$$

  für alle (t, x), so dass $t < T(x, \omega)$ f.s..

Ist $T(x, \omega) = \infty$ so heißt die Lösung global.

Setzt man $W_t^0 \equiv t$, so läßt sich Gleichung (2.3) schreiben als

$$u_t(x) = \Phi(x) + \sum_{j=0}^{n} \int_0^t F^{(j)}(r, x, u_r(x), \partial u_r(x)) \circ dW_r^j. \tag{2.4}$$

2.1.2 Ein verallgemeinerter Lösungsbegriff

Es seien K ein separabler Hilbertraum und $(W(t), \mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ ein K-wertiger Wiener-Prozeß definiert auf dem vollständigen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, adaptiert zur Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$, d.h. für $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ gilt $(\mathcal{F}_s) \subset (\mathcal{F}_t)$ für $s \le t \le T < \infty$. Man bezeichnet mit $(\mathcal{F}_\infty) = \bigcup_{t\ge 0}(\mathcal{F}_t)$. Es bezeichne E die mathematische Erwartung bezüglich P. Weiterhin seien

$$\begin{aligned} A &: [0, T] \times \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^1, \\ B &: [0, T] \times \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1 \longrightarrow K \end{aligned}$$

meßbare Funktionen in allen Variablen (t, ω, x, u), $\mathcal{F}_t$-adaptiert für fixierte t, x, u, und X_0 sei eine $\mathcal{F}_0$-meßbare $L^2(\mathbb{R}^n)$-wertige Zufallsvariable. Weiterhin bezeichnen

$$b_i : [0, T] \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^1,\ i = 1, \cdots, n,$$

meßbare Funktionen.

Es wird die folgende semilineare, stochastische, partielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$\begin{aligned} dX(t,x) &= \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}[b_i(t,x)X(t,x)] + A(t,x,X(t,x))\right] dt \\ &\quad + B(t,x,X(t,x))dW(t), \ \ t \in [0,T] \end{aligned} \tag{2.5}$$

mit

$$X(0,x) = X_0(x) \tag{2.6}$$

betrachtet. Die zu Gleichung (2.5) regularisierte, parabolische Familie ist eine Familie stochastischer Differentialgleichungen 2. Ordnung, die für alle $\varepsilon > 0$ durch

$$\begin{aligned} dX_\varepsilon(t,x) &= \left[\varepsilon \triangle X_\varepsilon(t,x) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}[b_i(t,x)X_\varepsilon(t,x)] + A(t,x,X_\varepsilon(t,x))\right] dt \\ &\quad + B(t,x,X_\varepsilon(t,x))dW(t), \ \ t \in [0,T] \end{aligned} \tag{2.7}$$

mit $X_\varepsilon(0,x) = X_0(x)$ definiert sind, wobei $\triangle$ den Laplace-Operator bezüglich x bezeichnet. Diese beiden Gleichungen (2.5) und (2.7) sind Spezialfälle der folgenden Gleichung

$$\begin{aligned} dX(t,x) &= \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}[a_{ij}(t,x)\frac{\partial X(t,x)}{\partial x_j}] \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}[b_i(t,x)X(t,x)] + A(t,x,X(t,x))\right] dt \\ &\quad + B(t,x,X(t,x))dW(t), \ \ t \in [0,T], \end{aligned} \tag{2.8}$$

mit $X(0,x) = X_0(x)$, wobei

$$a_{ij} \ : [0,T] \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^1$$

meßbare, beschränkte Funktionen sind. Wir bezeichnen mit $W_2^1(\mathbb{R}^n)$ den Sobolev-Raum, der auf $\mathbb{R}^n$ definierten quadratisch integrierbaren Funktionen, deren erste verallgemeinerte Ableitungen quadratisch intgrierbar sind. Der Dualraum werde mit $W_2^{-1}(\mathbb{R}^n)$ bezeichnet. Eine Lösung von (2.8) ist wie folgt definiert:

Definition 2.3. Eine $W_2^1(\mathbb{R}^n)$-Lösung der Gleichung (2.8) ist ein meßbarer, adaptierter $L^2(\mathbb{R}^n)$ -wertiger Prozeß $(X(t,\cdot))_{t\in[0,T]}$, so dass:

(i) $X(t,\cdot) \in W_2^1(\mathbb{R}^n)$ P-f.s., für fast alle $t \in [0,T]$.

(ii) $E\left[\int_0^T \|X(t)\|^2_{W_2^1(\mathbb{R}^n)} dt\right] < \infty$.

(iii) Für alle $v \in W_2^1(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} X(t,x)v(x)dx &= \int_{\mathbb{R}^n} X_0(x)v(x)dx - \sum_{i,j=1}^{n} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} a_{ij}(s,x)\frac{\partial X(s,x)}{\partial x_j}\frac{\partial v(x)}{\partial x_i}dxds \\ &\quad - \sum_{i=1}^{n} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} b_i(s,x)X(s,x)\frac{\partial v(x)}{\partial x_i}dxds + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} A(s,x,X(s,x))v(x)dxds \\ &\quad + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} B(s,x,X(s,x))v(x)dxdW(s), \end{aligned} \tag{2.9}$$

für fast alle $(t, \omega) \in [0, T] \times \Omega$.

Entsprechend definiert man eine Lösung von (2.5) wie folgt:

Definition 2.4. Eine verallgemeinerte Lösung der Gleichung (2.5) ist ein meßbarer, adaptierter $L^2(\mathbb{R}^n)$-wertiger Prozeß $(X(t, \cdot))_{t \in [0,T]}$, so dass:

(i) $E\left[\int_0^T \|X(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} dt\right] < \infty$.

(ii) Für alle $v \in W_2^1(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} X(t,x)v(x)dx &= \int_{\mathbb{R}^n} X_0(x)v(x)dx + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} A(s,x,X(s,x))v(x)dxds \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} b_i(s,x)X(s,x)\frac{\partial v(x)}{\partial x_i}dxds \\ &\quad + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} B(s,x,X(s,x))v(x)dxdW(s), \qquad (2.10)\end{aligned}$$

für fast alle $(t, \omega) \in [0, T] \times \Omega$.

Für die in den folgenden Kapiteln oft betrachtete Differentialgleichung

$$d_t v(t,x) + a v_x(t,x)dt + b v(t,x)dW(t) = 0, \qquad (2.11)$$

wobei $v(x,0) = v_0(x) = f(x), t \in [0,T]$, $x \in \mathbb{R}^1$, benutzen wir die folgende Definition:

Definition 2.5. Eine Lösung von (2.11) ist ein Zufallsfeld $(v(t,x))_{x \in \mathbb{R},\, t \in [0,T]}$ mit den folgenden Eigenschaften:

(i) $(v(t,x))_{t \in [0,T]}$ ist ein zur Standardfiltration $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0,T]}$ adaptierter Prozeß für alle $x \in \mathbb{R}^1$.

(ii) Es existiert $\frac{\partial}{\partial x} v(t,x)$ stetig für jedes $t \in [0,T]$ mit Wahrscheinlichkeit 1.

(iii) $v(t, \cdot)$ ist $L^2(\mathbb{R}^1)$-wertig.

(iv) Es ist $v(0,x) = v_0(x) = f(x) \in L^2(\mathbb{R}^1)$.

(v) Die Gleichung (2.11) gilt für alle $t \in [0,T]$, $x \in \mathbb{R}^1$ mit Wahrscheinlichkeit 1.

Wenn eine Lösung im Sinne der Definition 2.2 existiert, so ist dieser Prozeß auch Lösung im Sinne der Definition 2.3, wenn

$$\begin{aligned}&\sum_{j=0}^n \int_0^t F^{(j)}(s,x,X_s,\partial X_s) \circ dW_s^j \\ &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} B(s,x,X(s,x))v(x)dxdW(s) + \frac{1}{2}\Big\langle B(s,x,X(s,x))v(x), W\Big\rangle_t. \qquad (2.12)\end{aligned}$$

Aus Definition 2.3 folgt natürlich (2.10), d.h. es liegt eine Lösung im Sinne von Definition 2.4 vor. Die Umkehrung ist im allgemeinen falsch. Der Lösungsbegriff in Definition 2.5 ergibt sich auch aus Definition 2.2 unter Beachtung von (2.2) und indem man für $T(x, \omega)$ einen deterministischen Zeitpunkt $T > 0$ wählt.

2.1.3 Der milde und der starke Lösungsbegriff

Wir betrachten einen weiteren Lösungsbegriff. Es seien $H = L^2(\mathbb{R}^1)$, $f \in H$, $t \geq 0$. Dann führen wir eine Familie $(T_t)_{t\geq 0}$ von Operatoren ein, die für $f \in H$ durch $(T_t f)(x) = f(x+t)$ definiert sind. $(T_t f)$ definiert eine parametrische Halbgruppe, denn es gilt für $f,\ g \in H$, $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}^1$:

$$\begin{aligned}
(T_0 f)(x) &= f(x), \\
(T_h T_t f)(x) &= T_h((T_f)(x)) = (T_h f)(x+t) = f(x+t+h) = (T_{t+h} f)(x), \\
\text{und} \qquad (T_t \alpha f)(x) + (T_t \beta g)(x) &= \alpha f(x+t) + \beta g(x+t) \\
&= (\alpha f + \beta g)(t+x) = (T_t(\alpha f + \beta g))(x).
\end{aligned}$$

Weiterhin erhält man mit der Definition der Norm in H

$$\begin{aligned}
\| T_t f \|_H^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x+t)dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)dx = \| f \|_H^2 .
\end{aligned}$$

Definiert man einen Operator $\mathcal{A}$ mit $D(\mathcal{A}) := C^1(\mathbb{R}^1) \cap L^2(\mathbb{R}^1)$ durch

$$\begin{aligned}
(\mathcal{A} f)(x) &= \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{T_h f(x) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x),
\end{aligned}$$

so stellt man fest, dass $D(\mathcal{A})$ in H dicht liegt und $\mathcal{A} f = f'$ infinitesimaler Operator der Halbgruppe von Kontraktionen $(T_t f)(x) = f(x+t)$ ist. Damit können wir für (2.11) mit $a = -1$ einen weiteren Lösungsbegriff einführen. Wir formulieren die Definition für die allgemeinere Gleichung (2.5).

Definition 2.6. $X(t,x)$ heißt milde Lösung von (2.5) mit $n = 1$ und $b_i(t,x) \equiv 1$, wenn

(i) $X(t,x)$ die Gleichung

$$X(t,x) = T_t X_0(x) + \int_0^t T_{t-s} A(s,x,X(s,x))ds + \int_0^t T_{t-s} B(s,x,X(s,x))dW(s) \qquad (2.13)$$

erfüllt.

(ii) $X(t,\cdot)$ ist ein L^2-wertiger, $\mathcal{F}_t$-meßbarer Prozeß.

(iii) Es gilt: $\sup_{t\in[0,T]} E \int_{\mathbb{R}^1} X^2(t,x)dx < \infty$.

Beispiel 2.1. Setzt man in der Gleichung

$$\begin{aligned}
dv(t,x) + a v_x(t,x)dt + b(t,x)v(t,x)dW(t) &= 0, \\
v(0,x) &= v_0(x) \qquad (2.14)
\end{aligned}$$

$b = 0$ und $a = -1$, so ist $v(t,x) = T_t v_0(x) = v_0(t+x)$. Wenn $v_0 \in D(\mathcal{A})$, dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial v(t,x)}{\partial t} &= \frac{\partial v(\bar{t})}{\partial \bar{t}}\Big|_{\bar{t}=x+t} \\ \frac{\partial v(t,x)}{\partial x} &= \frac{\partial v(\bar{t})}{\partial \bar{t}}\Big|_{\bar{t}=x+t}. \end{aligned}$$

Damit ist $T_t v_0(x)$ Lösung des deterministischen Problems $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial t}$, $v(0,x) = v_0(x)$.

Beispiel 2.2. Es sei $a \in \mathbb{R}^1$, $a \neq 0$. Dann ist auch $(T_t f)(x) = f(x+at)$ eine Halbgruppe von Kontraktionen. Für den infinitesimalen Operator ergibt sich

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}f)(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{(T_h f)(x) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+ah) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+ah) - f(x)}{ah}\frac{ah}{h} = af', \end{aligned} \tag{2.15}$$

d.h.

$$\mathcal{A}f = a\frac{\partial}{\partial x}. \tag{2.16}$$

Damit kann die milde Lösung von (2.14) ermittelt werden:

$$\begin{aligned} v(t,x) &= T_t v_0(x) - \int_0^t T_{t-s}(b(s,x)v(s,x))dW(s) \\ &= v_0(x+at) - \int_0^t b(x+a(t-s),s)v(x+a(t-s),s)dW(s). \end{aligned} \tag{2.17}$$

Man betrachte das Problem

$$\left.\begin{aligned} dX &= AX\,dt + \textstyle\sum_{k=1}^N B_k X\,d\beta_k \\ X(0) &= x \in H, \end{aligned}\right\} \tag{2.18}$$

wobei $A: D(A) \subset H \to H$ und $B_k: D(B_k) \subset H \to H$, $k = 1,...,N$ die Generatoren von zwei Halbgruppen sind, nämlich von $S(t) = e^{tA}$ und $S(t) = e^{tB_k}$, und $\beta_1(\cdot),...,\beta_N(\cdot)$ eine endliche Anzahl unabhängiger, reellwertiger Wiener-Prozesse sind. Für dieses Problem (2.18) führen G. Da Prato und J. Zabczyk (vgl. [55]) den Begriff der starken Lösung folgendermaßen ein:

Definition 2.7. Ein H-wertiger vorhersagbarer Prozeß $X(t)$, $t \in [0,T]$ heißt starke Lösung von Gleichung (2.18), falls $X(t)$ P_T-f.s. Werte in $\mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B)$ annimmt, so dass

(i) für alle $k = 1,...,N$ gilt:

$$P\left(\int_0^T (|AX(s)| + |X(s)|)\,ds < +\infty\right) = 1, \tag{2.19}$$

$$P\left(\int_0^T \|B_k(X(s))\|^2_{L_2^0}\,ds < +\infty\right) = 1, \tag{2.20}$$

(ii) für beliebiges $t \in [0,T]$ P-f.s. die Beziehung

$$X(t) = \xi + \int_0^t [AX(s) + f(s)]\, ds + \sum_{k=1}^{N} \int_0^t B_k(X(s))\, d\beta_k(s) \tag{2.21}$$

erfüllt ist.

Für eine spezielle stochastische Gleichung in zwei Ortskoordinaten

$$\begin{aligned} v(t,x,y) - v(0,x,y) \quad &+ \quad a_1 \int_0^t v_x(s,x,y)\, ds \\ &+ \quad a_2 \int_0^t v_y(s,x,y)\, ds + b \int_0^t v(s,x,y)\, dW(s) = 0 \end{aligned} \tag{2.22}$$

mit der Anfangswertfunktion

$$v(0,x,y) = f(x,y),\ f \in L^2(\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1) \tag{2.23}$$

definiert man die Lösung gemäß Definition 2.5 wie folgt.

Definition 2.8. Eine Lösung von (2.22) ist ein Zufallsfeld $(v(t,x,y))_{x,y\in\mathbb{R},t\in[0,T]}$ mit den folgenden Eigenschaften:

(i) $(v(t,x,y))_{t\in[0,T]}$ ist ein zur Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ adaptierter Prozeß für alle $x, y \in \mathbb{R}^1$.

(ii) Es existieren $\frac{\partial}{\partial x}v(t,x,y)$ und $\frac{\partial}{\partial y}v(t,x,y)$ stetig für jedes $t \in [0,T]$ mit Wahrscheinlichkeit 1.

(iii) $v(t,\cdot,\cdot)$ ist $L^2(\mathbb{R}^1)$-wertig.

(iv) Es gilt $v(0,x,y) = v_0(x,y) = f(x,y) \in L^2(\mathbb{R}^2)$.

(v) Die Gleichung (2.22) gilt für alle $t \in [0,T]$, x, $y \in \mathbb{R}^1$ mit Wahrscheinlichkeit 1.

2.2 Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen

2.2.1 Existenz und Eindeutigkeit mittels Charakteristikenmethode

Kunita beweist in [40] die beiden folgenden Theoreme zur Existenz- und Eindeutigkeit mit Hilfe der Charakteristikenmethode. Man definiert dazu die Charakteristiken, die zu (2.3) assoziiert sind als

$$\begin{aligned} d\xi_t &= -\sum_{j=0}^{n} F_p^{(j)}(t,\xi_t,\eta_t,\zeta_t) \circ dW_t^j \\ d\eta_t &= \sum_{j=0}^{n} \Big[F^{(j)}(t,\xi_t,\eta_t,\zeta_t) - F_p^{(j)}(t,\xi_t,\eta_t,\zeta_t)\cdot\zeta_t\Big] \circ dW_t^j \\ d\zeta_t &= \sum_{j=0}^{n} \Big[F_x^{(j)}(t,\xi_t,\eta_t,\zeta_t) + F_u^{(j)}(t,\xi_t,\eta_t,\zeta_t)\cdot\zeta_t\Big] \circ dW_t^j. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Zu gegebenem $(x,u,p) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^d$ existiert eine eindeutige Lösung startend im Zeitpunkt 0 in (x,u,p). Die Lösung $(\xi_t(x,u,p), \eta_t(x,u,p), \zeta_t(x,u,p))$, $t \in [0, T(x,u,p))$ ist ein stetiges lokales Semimartingal, wobei $T(x,u,p)$ die Explosionszeit ist. Ist die Anfangswertfunktion $\Phi(x)$ in (2.3) eine $C^{l+1,\alpha}$-Funktion, so definiert man lokale $C^{l,\beta}$-Semimartingale

$$(\bar{\xi}_t(x,u,p), \bar{\eta}_t(x,u,p), \bar{\zeta}_t(x,u,p)),\ t \in [0, \bar{T}(x,u,p)),$$

wobei $\bar{T} = T(x, \Phi(x), \partial\Phi(x))$, $\beta \le \alpha$, wie folgt:

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_t(x) &= \xi_t(x, \Phi(x), \partial\Phi(x)) \\ \bar{\eta}_t(x) &= \eta_t(x, \Phi(x), \partial\Phi(x)) \\ \bar{\zeta}_t(x) &= \zeta_t(x, \Phi(x), \partial\Phi(x)). \end{aligned} \tag{2.25}$$

Weiterhin führt Kunita die folgenden Stoppzeiten

$$\tau(x) = \inf\{t > 0;\ \det \partial\bar{\xi}_t = 0\} \wedge \bar{T}(x), \tag{2.26}$$

und

$$\sigma(y) = \inf\{t > 0;\ y \notin \bar{\xi}_t(\{\tau > t\})\} \tag{2.27}$$

ein. Damit sind alle Vorbetrachtungen gemacht und wir können Theorem 3.1 aus [40] formulieren.

Theorem 2.1. *Es seien $\Phi(x)$ eine $C^{l+1,\alpha}$-Funktion in $\mathbb{R}^d$ mit $2 \le l$, $\alpha > 0$ und $\bar{\xi}_t$, $\bar{\eta}_t$, $\bar{\zeta}_t$ die in (2.25) definierten Prozesse und $\sigma(x)$ sei die Stoppzeit (2.27). Dann ist $u_t(x) \equiv \bar{\eta}_t\left(\bar{\xi}_t^{-1}(x)\right)$, $t \in [0, \sigma(x))$ eine lokale Lösung von (2.3). Weiterhin ist die Lösung sogar ein lokales $C^{l-1,\alpha}$-Semimartingal für beliebiges $\beta < \alpha$.*

2.2.2 Existenz und Eindeutigkeit mittels parabolischer Regularisierung

Hypothese 2.1. (h_1) $A(t,\omega,x,u)$ ist eine stetige Funktion in u für alle t, ω, x.

(h_2) Das Paar (A, B) ist monoton im folgenden Sinn: Es existiert eine Konstante $L \ge 0$, so dass

$$\begin{aligned} &(A(t,\omega,x,v_1) - A(t,\omega,x,v_2))(v_1 - v_2) \\ &\quad + \|B(t,\omega,x,v_1) - B(t,\omega,x,v_2)\|_K^2 \qquad \le L|v_1 - v_2|^2, \end{aligned}$$

für alle $(t,\omega,x) \in [0,T] \times \Omega \times \mathbb{R}^n$ und $v_1,\ v_2 \in \mathbb{R}^1$.

(h_3) Das Paar (A, B) erfüllt folgende Wachstumsbedingung: Es existiert eine meßbare Funktion $l : [0,\, T] \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^+$ und eine positive Konstante L_1 mit $l(t,\, x) \le L_1$ für alle t, x und $\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} l^2(t,x)dxdt < \infty$, so dass

$$\mid A(t,\omega,x,v) \mid + \parallel B(t,\omega,x,v) \parallel_K \le l(t,x) + C \mid v \mid$$

für eine Konstante $C \ge 0$ und für alle t, ω, x, v gilt.

(h_4) $E\big[\|X_0\|^2_{W_2^1(\mathbb{R}^n)}\big] < \infty$.

(h_5) Für $l_0 > 0$ und für alle t, x gilt

$$\sum_{i=1}^{n} \mid b_i(t,x) \mid + \sum_{i,j=1}^{n} \mid \frac{\partial b_i(t,x)}{\partial x_j} \mid \leq l_0,$$

wobei $\frac{\partial}{\partial x_i}$ die verallgemeinerte Ableitung bezeichnet.

Hypothese 2.2. (h_1') B ist Lipschitz-stetig in u und gleichmäßig stetig in den anderen Variablen.

(h_2') Es existiert eine Konstante $l_1 > 0$, so dass für alle t, ω, x, u

$$\begin{aligned} |A'(t,\omega,x,u)| &= \Big|\frac{\partial}{\partial u} A(t,\omega,x,u)\Big| \leq l_1, \\ \|B'(t,\omega,x,u)\|_K &= \Big\|\frac{\partial}{\partial u} B(t,\omega,x,u)\Big\|_K \leq l_1. \end{aligned} \tag{2.28}$$

(h_3') Für alle $\varepsilon_0 > 0$ existiert eine Konstante $l_2 > 0$, so dass

$$\begin{aligned} \sup_{0<\varepsilon<\varepsilon_0} \textstyle\sum_{i=1}^n & \Big\{ E\Big[\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} \Big(\frac{\partial A(t,x,u)}{\partial x_i}\Big|_{u=X_\varepsilon(t,x)} \Big)^2 dxdt \Big] \\ & + E\Big[\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} \Big\| \big(\frac{\partial B(t,x,u)}{\partial x_i}\Big|_{u=X_\varepsilon(t,x)} \Big\|^2_K dxdt \Big] \Big\} \leq l_2. \end{aligned} \tag{2.29}$$

(h_4') $E\big[\|X_0\|^2_{W_2^1(\mathbb{R}^n)}\big] < \infty$.

(h_5') Es existiert eine Konstante $l_3 > 0$, so dass $\sum_{i,j=1}^n \big|\frac{\partial^2 b(t,x)}{\partial x_i \partial x_j}\big| \leq L_3$ für alle t, x, wobei $\frac{\partial^2 b(t,x)}{\partial x_i \partial x_j}$ die verallgemeinerte Ableitung bezeichnet.

Für die regularisierte Gleichung gilt das folgende Theorem.

Theorem 2.2. *Wenn die Hypothese 2.1 erfüllt ist, dann hat die regularisierte Gleichung (2.7) eine pfadweise eindeutige $W_2^1(\mathbb{R}^n)$-Lösung X_ε, die $L^2(\mathbb{R}^n)$-stetig ist. Weiterhin gilt für alle $\varepsilon_0 > 0$ die folgende Abschätzung*

$$\begin{aligned} \sup_{0<\varepsilon<\varepsilon_0} & \Big\{ E\left[\sup_{0\leq t\leq T} \int_{\mathbb{R}^n} \mid X_\varepsilon(t,x) \mid^2 dx\right] \\ & + 2\varepsilon \textstyle\sum_{i=1}^n E\left[\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} \big\| \frac{\partial X_\varepsilon(t,x)}{\partial x_i} \big\|^2 dxdt \right] \Big\} = D < \infty, \end{aligned} \tag{2.30}$$

wobei d von C, L_1 und dem Integral $\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} l^2(t,x) dxdt$ abhängig ist.

Entsprechend gilt für die hyperbolische Gleichung das folgende Theorem.

Theorem 2.3. *Unter der Annahme, dass die Hypothesen 2.1 und 2.2 gelten, hat die Gleichung (2.5) eine pfadweise eindeutige $W_2^1(\mathbb{R}^n)$-Lösung, die $L^2(\mathbb{R}^n)$-stetig ist und der folgenden Gleichung genügt*

$$E\left[\sup_{0\le t\le T}\|X(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right]+\sum_{i=1}^n E\left[\int_0^T\|\frac{\partial X(t)}{\partial x_i}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}dt\right]=D<\infty. \tag{2.31}$$

Weiterhin gilt

$$\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}E\left[\sup_{0\le t\le T}\|X_\varepsilon(t)-X(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right]=0. \tag{2.32}$$

Desweiteren gilt

Theorem 2.4. *Hypothese 2.1 sei erfüllt. Weiterhin seien die Funktionen $A(t,\omega,x,u)$ und $B(t,\omega,x,u)$ stetig in (x,u) und beschränkt. Dann hat (2.5) eine verallgemeinerte Lösung, die*

$$\sup_{0\le t\le T}E\big[\|X(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\big]<\infty \tag{2.33}$$

erfüllt.

Beschäftigen wir uns jetzt mit der Frage, unter welchen Bedingungen die milden Lösungen der Differentialgleichung (2.11) im Sinne von Definition 2.6 auch starke Lösungen im Sinne der Definition 2.7 sind. Da Prato und Zabzcyk erhalten dabei die folgende etwas allgemeiner formulierte Aussage über den Zusammenhang starker und milder Lösungen.

Proposition 2.1. *Es seien die folgenden Bedingungen erfüllt:*

(i) Die Operatoren $B_1,...,B_N$ erzeugen kommutierende C_0-Gruppen $S_k,\ k=1,...,N$.

(ii) Für $k=1,...,N$ gilt $D(A)\subset D(B_K^2)$ und $\bigcap_{k=1}^N D((B_k^*)^2)$ ist eine dichte Teilmenge des Hilbertraumes H. Dabei bezeichnet B_k^* die Adjungierte von $B_k,\ k=1,...,N$.

(iii) Der Operator $C:=A-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^N B_k^2$ mit $D(C)=D(A)$ ist der infinitesimale Generator eine C_0-Halbgruppe $S_0=e^{tC},\ t\ge 0$.

Wenn $X(t)$ eine starke Lösung von (2.18) ist, dann erfüllt der Prozeß v, definiert durch

$$v(t)=U^{-1}(t)X(t),\quad \textit{wobei } U(t)=\prod_{k=1}^N S_k(\beta_k(t)), \tag{2.34}$$

die folgenden Gleichungen

$$\left.\begin{array}{rcl} v'(t) & = & U^{-1}(t)CU(t)v(t),\\ v(0) & = & x. \end{array}\right\} \tag{2.35}$$

Umgekehrt, ist $v(t)$ ein vorhersagbarer Prozess mit Trajektorien in C^1, der (2.35) P-f.s. erfüllt, dann nimmt der Prozeß $X(\cdot)=U(\cdot)v(\cdot)$ P_T-f.s. Werte in $D(C)$ an und ist eine starke Lösung von Gleichung (2.18).

In Gleichung (2.11) erzeugt der Operator $A = a\frac{\partial}{\partial x}$ eine C_0-Halbgruppe, und der Operator $B = b$ als linearer Operator erzeugt ebenfalls eine C_0-Halbgruppe, so dass die gefundenen milden Lösungen auch automatisch starke Lösungen im Sinne von Definition 2.7 sind.

2.3 Eigenschaften der Lösungen

Die oben definierten Lösungsbegriffe besitzen wichtige Eigenschaften. Zu diesen gehört z.B. die stetige Abhängigkeit der Lösungen von den Anfangswerten. Für die Lösung gemäß Definition 2.2 mit der Charakteristikenmethode gilt:

Theorem 2.5. *Es existieren zu* $t \in [0,T]$; $T < \infty$

$$\begin{array}{lcl} F^{(0)}(t,x,u,p) & , & F^{(1)}(t,x,u,p) \\ F_k^{(0)}(t,x,u,p) & , & F_k^{(1)}(t,x,u,p); \quad k \in \{x,u,p\} \\ F_{kj}^{(0)}(t,x,u,p) & , & F_{kj}^{(1)}(t,x,u,p); \quad k,j \in \{x,u,p\} \end{array} \tag{2.36}$$

Lipschitz-stetig in (x,u,p) *und stetig in* t. *Dann gilt für* $x \to \bar{x}$, $u \to \bar{u}$, $p \to \bar{p}$

$$\begin{aligned} P\Big\{ \mid \xi(t,x,u,p) - \xi(t,\bar{x},\bar{u},\bar{p}) \mid + \mid \eta(t,x,u,p) - \eta(t,\bar{x},\bar{u},\bar{p}) \mid \\ + \mid \zeta(t,x,u,p) - \zeta(t,\bar{x},\bar{u},\bar{p}) \mid > \varepsilon \Big\} \quad \longrightarrow \quad 0, \forall \varepsilon > 0. \end{aligned} \tag{2.37}$$

Zunächst beweisen wir

Lemma 2.1. *Es seien* B_1, B_2, B_3 *Banachräume und* $\varphi:\ B_1 \longrightarrow \mathcal{L}(B_2,B_3)$ *mit*

$$\parallel \varphi(p) - \varphi(q) \parallel_{\mathcal{L}(B_2,B_3)} \leq L \parallel p - q \parallel .$$

Dann gilt:

$$\parallel \varphi(p)(x) - \varphi(q)(y) \parallel_{B_3} \leq \parallel \varphi(p) \parallel_{\mathcal{L}(B_2,B_3)} \cdot \parallel x - y \parallel_{B_3} + L \parallel y \parallel_{B_2} \cdot \parallel p - q \parallel_{B_1} . \tag{2.38}$$

Beweis: Es gilt die Abschätzung:

$$\begin{aligned} & \parallel \varphi(p)(x) - \varphi(q)(y) \parallel_{B_3} \\ & \leq \ \parallel \varphi(p)(x-y) \parallel_{B_3} + \parallel (\varphi(p) - \varphi(q))y \parallel_{B_3} \\ & \leq \ \parallel \varphi(p) \parallel_{\mathcal{L}(B_2,B_3)} \cdot \parallel x - y \parallel_{B_2} + L \parallel y \parallel_{B_2} \cdot \parallel p - q \parallel_{B_1} . \end{aligned} \tag{2.39}$$

■

Beweis des Theorems 2.5: Man definiert die Stoppzeiten

$$\begin{aligned} \tau_1^N &:= \inf\big\{t : \mid \xi_t \mid \geq N\big\} \\ \tau_2^N &:= \inf\big\{t : \mid \eta_t \mid \geq N\big\} \\ \tau_3^N &:= \inf\big\{t : \mid \zeta_t \mid \geq N\big\} \end{aligned} \tag{2.40}$$

und setzt

$$\tau^N \quad := \quad \tau_1^N \wedge \tau_2^N \wedge \tau_3^N. \tag{2.41}$$

Wir betrachten die folgenden Differentialgleichungen:

$$\xi_{t\wedge\tau^N}(x,u,p) = x - \int_0^{t\wedge\tau^N} F_p^{(0)}(r,\xi_r,\eta_r,\zeta_r)dr - \int_0^{t\wedge\tau^N} F_p^{(1)}(r,\xi_r,\eta_r,\zeta_r)\circ dW(r) \tag{2.42}$$

$$\begin{aligned}\eta_{t\wedge\tau^N}(x,u,p) &= u + \int_0^{t\wedge\tau^N} \big[F^{(0)}(r,\xi_r,\eta_r,\zeta_r) - F_p^{(0)}(r,\xi_r,\eta_r,\zeta_r)\cdot\xi_r\big]dr \\ &\quad + \int_0^{t\wedge\tau^N} \big[F^{(1)}(r,\xi_r,\eta_r,\zeta_r) - F_p^{(0)}(r,\xi_r,\eta_r,\zeta_r)\cdot\xi_r\big]\circ dW(r)\end{aligned} \tag{2.43}$$

$$\begin{aligned}\zeta_{t\wedge\tau^N}(x,u,p) &= p + \int_0^{t\wedge\tau^N} \big[F_x^{(0)}(r,\xi_r,\eta_r,\zeta_r) + F_u^{(0)}(r,\xi_r,\eta_r,\zeta_r)\cdot\xi_r\big]dr \\ &\quad + \int_0^{t\wedge\tau^N} \big[F_x^{(1)}(r,\xi_r,\eta_r,\zeta_r) + F_u^{(1)}(r,\xi_r,\eta_r,\zeta_r)\cdot\xi_r\big]\circ dW(r)\end{aligned} \tag{2.44}$$

Durch die Stoppzeiten erreicht man, dass die obigen Prozesse durch N beschränkt sind. Für $t > \tau^N$ setzt man die Prozesse gleich Null. Man kann dann die Gleichungen (2.42), (2.43), (2.44) durch Einführung der Indikatorfunktion

$$I_{\{\omega:\, t\leq\tau^N\}}(X(t)) := \begin{cases} X(t) & : \quad t\leq\tau^N \\ 0 & : \quad t>\tau^N, \end{cases} \tag{2.45}$$

in der folgenden Art umschreiben:

$$\begin{aligned}I_{\{\omega:\, t\leq\tau^N\}}\xi_t(x,u,p) &= x - \int_0^t I_{\{\omega:\, r\leq\tau^N\}}F_p^{(0)}(r,\xi_r,\eta_r,\zeta_r)dr \\ &\quad - \int_0^t I_{\{\omega:\, r\leq\tau^N\}}F_p^{(1)}(r,\xi_r,\eta_r,\zeta_r)\circ dW(r) \\ I_{\{\omega:\, t\leq\tau^N\}}\eta_t(x,u,p) &= u + \int_0^t \big[I_{\{\omega:\, r\leq\tau^N\}}F^{(0)}(r,\xi_r,\eta_r,\zeta_r) - I_{\{\omega:\, r\leq\tau^N\}}F_p^{(0)}(r,\xi_r,\eta_r,\zeta_r)\cdot\xi_r\big]dr \\ &\quad + \int_0^t \big[I_{\{\omega:\, r\leq\tau^N\}}F^{(1)}(r,\xi_r,\eta_r,\zeta_r) \\ &\quad - I_{\{\omega:\, r\leq\tau^N\}}F_p^{(0)}(r,\xi_r,\eta_r,\zeta_r)\cdot\xi_r\big]\circ dW(r) \qquad (2.46) \\ I_{\{\omega:\, t\leq\tau^N\}}\zeta_t(x,u,p) &= p + \int_0^t \big[I_{\{\omega:\, r\leq\tau^N\}}F_x^{(0)}(r,\xi_r,\eta_r,\zeta_r) + I_{\{\omega:\, r\leq\tau^N\}}F_u^{(0)}(r,\xi_r,\eta_r,\zeta_r)\cdot\xi_r\big]dr \\ &\quad + \int_0^t \big[I_{\{\omega:\, r\leq\tau^N\}}F_x^{(1)}(r,\xi_r,\eta_r,\zeta_r) \\ &\quad + I_{\{\omega:\, t\leq\tau^N\}}F_u^{(1)}(r,\xi_r,\eta_r,\zeta_r)\cdot\xi_r\big]\circ dW(r).\end{aligned}$$

Entsprechend erhält man auch für die Anfangswerte $\bar{x}$, $\bar{u}$, $\bar{p}$ die Prozesse

$$I_{\{\omega:\, t\leq\tau^N\}}\xi_t(\bar{x},\bar{u},\bar{p}),\ I_{\{\omega:\, t\leq\tau^N\}}\eta_t(\bar{x},\bar{u},\bar{p}),\ I_{\{\omega:\, t\leq\tau^N\}}\xi_t(\bar{x},\bar{u},\bar{p}).$$

Der Einfachheit halber bezeichnen wir diese Prozesse mit $\bar{\xi}_t^N$, $\bar{\eta}_t^N$, $\bar{\zeta}_t^N$. Man betrachtet die Differenz der Lösungen im quadratischen Mittel und schätzt wie folgt ab

$$
\begin{aligned}
&E \mid I_{\{\omega:\, t\le\tau^N\}} \left[\xi_t^N(x,u,p) - \xi_t^N(\bar{x},\bar{u},\bar{r})\right] \mid^2 \\
&\le\ 3 \mid x-\bar{x} \mid^2 + 3TE \int_0^t I_{\{\omega:\, r\le\tau^N\}} \mid F_p^{(0)}(r,\xi_r,\eta_r,\zeta_r) - F_p^{(0)}(r,\bar{\xi}_r,\bar{\eta}_r,\bar{\zeta}_r) \mid^2 dr \\
&\quad + 3E\Big[\int_0^t I_{\{\omega:\, r\le\tau^N\}} F_p^{(1)}(r,\xi_r,\eta_r,\zeta_r) - F_p^{(1)}(r,\bar{\xi}_r,\bar{\eta}_r,\bar{\zeta}_r) \circ dW(r)\Big] \\
&\le\ 3 \mid x-\bar{x} \mid^2 + 3TE \int_0^t I_{\{\omega:\, r\le\tau^N\}} \mid F_p^{(0)}(r,\xi_r,\eta_r,\zeta_r) - F_p^{(0)}(r,\bar{\xi}_r,\bar{\eta}_r,\bar{\zeta}_r) \mid^2 dr \\
&\quad + 3E\Big[2\Big\{ \int_0^t I_{\{\omega:\, r\le\tau^N\}} F_p^{(1)}(r,\xi_r,\eta_r,\zeta_r) - F_p^{(1)}(r,\bar{\xi}_r,\bar{\eta}_r,\bar{\zeta}_r) \circ dW(r)\Big\}^2 \\
&\quad + \frac{1}{2}\Big\{ I_{\{\omega:\, t\le\tau^N\}} \Big\langle F_p^{(1)}(r,\xi_r,\eta_r,\zeta_r) - F_p^{(1)}(r,\bar{\xi}_r,\bar{\eta}_r,\bar{\zeta}_r)\Big\rangle_t \Big\}^2\Big]. \qquad (2.47)
\end{aligned}
$$

Wegen der Beziehung von Itô- und Stratonovich-Integral (2.2) und mit Lemma 2.38 gilt

$$
\begin{aligned}
&E \mid I_{\{\omega:\, t\le\tau^N\}} \left[\xi_t^N(x,u,p) - \xi_t^N(\bar{x},\bar{u},\bar{r})\right] \mid^2 \\
&\le\ 3 \mid x-\bar{x} \mid^2 + 6 \int_0^t E I_{\{\omega:\, r\le\tau^N\}} \mid F_p^{(1)}(r,\xi_r,\eta_r,\zeta_r) - F_p^{(1)}(r,\bar{\xi}_r,\bar{\eta}_r,\bar{\zeta}_r) \mid^2 dr \\
&\quad + 3T \int_0^t E I_{\{\omega:\, r\le\tau^N\}} \Big(\mid \xi_r^N - \bar{\xi}_r^N \mid^2 + \mid \eta_r^N - \bar{\eta}_r^N \mid^2 + \mid \zeta_r^N - \bar{\zeta}_r^N \mid^2 \Big) dr \\
&\quad + CE\Big\{ \int_0^t I_{\{\omega:\, r\le\tau^N\}} \mid F_p^{(1)}(r,\xi_r,\eta_r,\zeta_r) - F_p^{(1)}(r,\bar{\xi}_r,\bar{\eta}_r,\bar{\zeta}_r) \mid \\
&\quad \cdot \Big[\mid F_{px}^{(1)} - \bar{F}_{px}^{(1)} \mid + \mid F_{pu}^{(1)} - \bar{F}_{pu}^{(1)} \mid + \mid F_{pp}^{(1)} - \bar{F}_{pp}^{(1)} \mid \Big] dr \Big\}^2, \qquad (2.48)
\end{aligned}
$$

dabei sind $F_{pk}^{(1)} = F_{pk}^{(1)}(r,\xi_r^N,\eta_r^N,\zeta_r^N)$ und $\bar{F}_{pk}^{(1)} = F_{pk}^{(1)}(r,\bar{\xi}_r^N,\bar{\eta}_r^N,\bar{\zeta}_r^N)$ und $k \in \{x,u,p\}$. Da nach Voraussetzung $F_p^{(1)}$ Lipschitz-stetig in (x,u,p), $F_p^{(1)}x$, $F_p^{(1)}u$, $F_p^{(1)}p$ stetig sind und die $\xi_r^N, \eta_r^N, \zeta_r^N, \bar{\xi}_r^N, \bar{\eta}_r^N, \bar{\zeta}_r^N$ beschränkt sind, ist der letzte Summand, die geschweifte Klammer, in Gleichung (2.47) beschränkt. Damit kann man (2.47) auch durch

$$
\begin{aligned}
&E \mid I_{\{\omega:\, t\le\tau^N\}} \left[\xi_t^N(x,u,p) - \xi_t^N(\bar{x},\bar{u},\bar{r})\right] \mid^2 \le C_1 \mid x-\bar{x} \mid^2 \\
&\quad + C_2 \int_0^t E I_{\{\omega:\, r\le\tau^N\}} \Big(\mid \xi_r^N - \bar{\xi}_r^N \mid^2 + \mid \eta_r^N - \bar{\eta}_r^N \mid^2 + \mid \zeta_r^N - \bar{\zeta}_r^N \mid^2 \Big) dr \qquad (2.49)
\end{aligned}
$$

abschätzen.

Analoge Abschätzungen erhält man auch für $E \mid I_{\{\omega:\, t\le\tau^N\}} \left[\eta_t^N(x,u,p) - \eta_t^N(\bar{x},\bar{u},\bar{r})\right] \mid^2$ und $E \mid I_{\{\omega:\, t\le\tau^N\}} \left[\zeta_t^N(x,u,p) - \zeta_t^N(\bar{x},\bar{u},\bar{r})\right] \mid^2$, wobei auch hier die Beziehung (2.38) aus Lemma 2.1 in den Abschätzungen verwandt wird. Führt man die Bezeichnung

$$
\begin{aligned}
\Psi_t^N \ := \ & I_{\{\omega:\, t\le\tau^N\}} \big[\mid \xi_t^N(x,u,p) - \xi_t^N(\bar{x},\bar{u},\bar{r}) \mid^2 \\
& + \mid \eta_t^N(x,u,p) - \eta_t^N(\bar{x},\bar{u},\bar{r}) \mid^2 \\
& + \mid \zeta_t^N(x,u,p) - \zeta_t^N(\bar{x},\bar{u},\bar{r}) \mid^2\big]
\end{aligned}
$$

ein, so erhält man

$$\begin{aligned} E[\Psi_t^N] &\leq D_1\big[\mid x-\bar{x}\mid^2 + \mid u-\bar{u}\mid^2 + \mid p-\bar{p}\mid^2 \big] \\ &\quad + D_2^N \int_0^t E[\Psi_r^N] dr. \end{aligned}$$

Das Gronwallsche Lemma impliziert nun

$$\lim_{(x,u,p)\longrightarrow(\bar{x},\bar{u},\bar{p})} E\Psi_t^N(t,x,\bar{x},u,\bar{u},p,\bar{p}) = 0. \tag{2.50}$$

Sei nun ein $\varepsilon > 0$ gegeben, so erhält man

$$\begin{aligned} & P\Big(\mid \xi(t,x,u,p) - \xi(t,\bar{x},\bar{u},\bar{p}) \mid + \mid \eta(t,x,u,p) - \eta(t,\bar{x},\bar{u},\bar{p}) \mid \\ & \qquad + \mid \zeta(t,x,u,p) - \zeta(t,\bar{x},\bar{u},\bar{p}) \mid > \varepsilon \Big) \\ & \leq P\Big(\mid \xi(t,x,u,p) - \xi(t,\bar{x},\bar{u},\bar{p}) \mid + \mid \eta(t,x,u,p) - \eta(t,\bar{x},\bar{u},\bar{p}) \mid \\ & \qquad + \mid \zeta(t,x,u,p) - \zeta(t,\bar{x},\bar{u},\bar{p}) \mid > \varepsilon \wedge (t \leq \tau^N) \Big) + P\Big(\tau^N < t\Big) \\ & = P\Big(I_{\{\omega:\, t\leq\tau^N\}} [\mid\mid \xi(t,x,u,p) - \xi(t,\bar{x},\bar{u},\bar{p}) \mid + \mid \eta(t,x,u,p) - \eta(t,\bar{x},\bar{u},\bar{p}) \mid \\ & \qquad + \mid \zeta(t,x,u,p) - \zeta(t,\bar{x},\bar{u},\bar{p}) \mid] > \varepsilon \Big) + P\Big(\tau^N < t\Big). \end{aligned}$$

Mit der Markovschen Ungleichung folgt

$$\begin{aligned} & P\Big(\mid\mid \xi(t,x,u,p) - \xi(t,\bar{x},\bar{u},\bar{p}) \mid + \mid \eta(t,x,u,p) - \eta(t,\bar{x},\bar{u},\bar{p}) \mid \\ & \qquad + \mid \zeta(t,x,u,p) - \zeta(t,\bar{x},\bar{u},\bar{p}) \mid > \varepsilon \Big) \\ & \leq \frac{C}{\varepsilon^2} E I_{\{\omega:\, t\leq\tau^N\}} \Big[\mid x-\bar{x}\mid^2 + \mid u-\bar{u}\mid^2 + \mid p-\bar{p}\mid^2\Big] + P\Big(\tau^N < t\Big). \end{aligned} \tag{2.51}$$

Der erste Summand in (2.51) geht wegen der obigen Überlegungen gegen Null, für den zweiten Summanden gilt

$$\lim_{N\longrightarrow\infty} P\Big(\tau^N < t\Big) = 0. \tag{2.52}$$

Daraus folgt die Behauptung.

■

Eine wichtige Eigenschaft der Differenzenschemata ist die Lipschitz-Stetigkeit im quadratischen Mittel des Lösungsprozesses bezüglich der Zeit, wenn die Definition 2.5 zugrunde gelegt wird.

Theorem 2.6. *Es gibt eine Konstante C, so dass für die Lösung von (2.11) gilt*

$$E \int_{\mathbb{R}^1} |v(t+\Delta t, x) - v(t,x)|^2 \, dx \leq C\Delta t. \tag{2.53}$$

Beweis: Mit der Schwarzschen Ungleichung und den Eigenschaften des Itô-Integrales erhält man unter Ausnutzung von Theorem (2.3) die folgende Ungleichungskette

$$
\begin{aligned}
& E\left[\int_{\mathbb{R}^1} |v(t+\Delta t,x) - v(t,x)|^2\,dx\right] \\
= \; & E\left[\int_{\mathbb{R}^1} |a\int_t^{t+\Delta t} v_x(s,x)\,ds + b\int_t^{t+\Delta t} v(s,x)\,dW(s)|^2\,dx\right] \\
\leq \; & 2E\left[\int_{\mathbb{R}^1} a^2|\int_t^{t+\Delta t} v_x(s,x)\,ds|^2 + b^2|\int_t^{t+\Delta t} v(s,x)\,dW(s)|^2\,dx\right] \\
\leq \; & 2\left[a^2\Delta t E\int_{\mathbb{R}^1}\int_t^{t+\Delta t} v_x^2(s,x)\,ds\,dx + b^2\int_t^{t+\Delta t} E\int_{\mathbb{R}^1} |v(s,x)|^2\,dx\,ds\right] \\
\leq \; & 2\left[a^2\Delta t E\int_0^T\int_{\mathbb{R}^1} v_x^2(s,x)\,dx\,ds + b^2\int_t^{t+\Delta t}\sup_{s\in[0,T]} E\int_{\mathbb{R}^1} |v(s,x)|^2\,dx\,ds\right] \\
\leq \; & C\Delta t,
\end{aligned}
\tag{2.54}
$$

womit die Aussage bewiesen ist.

■

Bemerkung 2.1. Ist für die Gleichung (2.11) die Anfangswertfunktion $\Phi \in C^{4,\alpha}$, dann ist der Lösungsprozeß bzgl. x sogar zweimal stetig differenzierbar (siehe Theorem 2.1) und es gilt:

$$v_x(t,x) = \Phi'(x) + a\int_0^t v_{xx}(s,x)\,ds + b\int_0^t v_x(s,x)\,dW(s). \tag{2.55}$$

Der Lösungsprozeß $\Psi(t,x) := v_x(t,x)$ besitzt dann ebenfalls die Eigenschaften von Theorem 2.3, d.h. es gilt

$$E\sup_{0\leq t\leq T}\int_{\mathbb{R}^1} v_x^2(t,x)\,dx =: D_1 < \infty. \tag{2.56}$$

Folglich gilt dann auch

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} E v_x^2(t,k\Delta x)\Delta x \leq \tilde{D}_1 \tag{2.57}$$

für alle t und $\Delta x > 0$ und man erhält weiterhin für die folgende Differenz

$$
\begin{aligned}
& E\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} \left(v_x(s,k\Delta x) - v_x(n\Delta t,k\Delta x)\right)\,ds|^2\right] \\
\leq \; & \Delta t\left[\int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t}\sum_{k=-\infty}^{\infty} E\left(v_x(s,k\Delta x) - v_x(n\Delta t,k\Delta x)\right)^2\Delta x\,ds\right] \\
\leq \; & C\Delta t
\end{aligned}
\tag{2.58}
$$

eine Beschränkung in Abhängigkeit von Δt.