3. Finite Differenzenmethoden im stochastischen Fall

Das Kapitel beschäftigt sich mit Differenzenmethoden zur approximativen Lösung stochastischer hyperbolischer Differentialgleichungen vom Itô-Typ. Die Hauptbegiffe der deterministischen Theorie der Finiten Differenzen nämlich die Konsistenz und die Stabilität werden für den stochastischen Fall entwickelt. Für gewöhnliche Itô-Gleichungen findet man diese Begriffe u.a. in [33], [57], [58]. Es wird gezeigt, dass die in diesem Kapitel vorgeschlagenen Schemata zur Approximation der stochastischen partiellen Differentialgleichungen auch diesen Begriffsbildungen genügen. Weiterhin wird auch die auf von Neumann zurückgehende Analysis, mit der die Stabilitätsanalyse durch die Anwendung der Fourier-Transformation vereinfacht wird, vgl. [60], [61], auf die betrachteten stochastischen Fälle übertragen. So kommt man beispielsweise auch zu dem interessanten Ergebnis, dass sich in bestimmten Fällen die Stabilität des stochastischen Differenzenverfahrens schon dann ergibt, wenn das zugrunde liegende deterministische Verfahren stabil ist, (Korollar 3.1).

In diesem Kapitel werden Finite Differenzenmethoden zur Approximation der Lösung der hyperbolischen Itô-Gleichung

$$v(t,x) - v(0,x) + a\int_0^t v_x(s,x)\,ds + \int_0^t A(s,v(s,x))\,ds + \int_0^t B(s,v(s,x))\,dW(s) = 0 \qquad (3.1)$$

entwickelt. Ausführlich wird der lineare Fall

$$v(t,x) - v(0,x) + a\int_0^t v_x(s,x)\,ds + b\int_0^t v(s,x)\,dW(s) = 0$$

studiert. Zum Verständnis werden hier die grundlegenden Ideen der deterministischen finiten Differenzenmethoden erläutert, vergleiche auch [61].

Man betrachtet ein Problem der Form

$$v_t(t,x) + av_x(t,x) = 0, \quad t \geq 0,\ x \in \mathbb{R}, \qquad (3.2)$$

$$v_0(x) = v(0,x) = f(x), \qquad (3.3)$$

wobei $f \in L^2(\mathbb{R})$. Man führt eine äquidistante Zerlegung Δx der Raumachse und eine äquidistante Zerlegung Δt der Zeitachse ein, so dass man ein Raum-Zeit-Gitter erhält, auf dem man versucht, die Lösung des Problems (3.2), (3.3) auf den Gitterpunkten zu approximieren.

Dabei soll u_k^n eine Funktion im Punkt $(n\Delta t, k\Delta x)$ oder dem Gitterpunkt $(n,\ k)$ sein, die eine Approximation der Lösung des Problems (3.2), (3.3) in $(n\Delta t,\ k\Delta x)$ ist, wobei

$$u_k^0 = f(k\Delta x) = v_k^0$$

gesetzt wird.

Mit dem Differenzenquotienten

$$v_t(t,x) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t, x) - v(t,x)}{\Delta t}$$

erhält man eine einfache Approximation der Zeitableitung $v_t(n\Delta t, k\Delta x)$ in folgender Form

$$v_t(n\Delta t, k\Delta x) \approx \frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\Delta t}; \tag{3.4}$$

in analoger Weise erhält man auch für die räumliche Ableitung

$$v_x(n\Delta t, k\Delta x) \approx \frac{u_{k+1}^n - u_k^n}{\Delta x}. \tag{3.5}$$

Damit erhält man für (3.2) die folgende Differenzengleichung

$$\frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\Delta t} + a\frac{u_{k+1}^n - u_k^n}{\Delta x} = 0.$$

und daher

$$u_k^{n+1} = (1 + a\frac{\Delta t}{\Delta x})u_k^n - a\frac{\Delta t}{\Delta x}u_{k+1}^n, \tag{3.6}$$

ein sogenanntes Forward-Time-Forward-Space-Schema (FTFS). In [61] finden sich die Beweise für die Konvergenz, die Stabilität und die Konsistenz für dieses und andere deterministische Verfahren.

Bemerkung 3.1. Numerische Differenzenverfahren und auch stochastische numerische Verfahren sind vor allem deshalb von Interesse, weil man heute die Möglichkeit hat, die Lösungen mit Hilfe des Computers zu berechnen. Natürlich macht eine solche Berechnung am Computer keinen Sinn, wenn unendlich viele Zerlegungspunkte der Raumachse zu betrachten sind. Deshalb führt man, wenn man die Lösung auf einem Zeitintervall $[0, T]$ und einem Raumintervall $[0, X]$ approximieren will, eine Zerlegung der Raumachse ein. In dieser Arbeit beschränken wir uns ausschließlich auf äquidistante Zerlegungen, so dass wir in diesem Fall der abzählbar endlichen Zerlegung eines Intervalles die Schrittweite Δx wie folgt definieren: Es sei $\Delta x = \frac{1}{M}$, so dass $x_k = k\Delta x,\ k = 0, 1, ..., M$. Dann ist der Raum, den wir betrachten ein $M-1$, M oder $M+1$-dimensionaler Raum, abhängig von der Art der betrachteten Randbedingungen an jedem Endpunkt des Intervalles. Dabei gilt natürlich weiterhin, dass $\Delta t \to 0$ und zwar solcher Art, dass Δt und Δx die Bedingungen an die Stabilität erfüllen.

3.1 Stochastische Differenzenschemata

Es wird die stochastische partielle Differentialgleichung 1. Ordnung

$$d_t v(t,x) + av_x(t,x)dt + bv(t,x)dW(t) = 0 \tag{3.7}$$

betrachtet, wobei $v(0,x) = v_0(x) = f(x) \in L^2(\mathbb{R}^1)$, $t \in [0,T]$, $x \in \mathbb{R}^1$.

Diese Differentialgleichung wird durch

$$v(t,x) - v(0,x) + a\int_0^t v_x(s,x)\,ds + b\int_0^t v(s,x)\,dW(s) = 0 \tag{3.8}$$

definiert, wobei das stochastische Integral das gewöhnliche Itô-Integral ist, welches bezüglich eines $\mathbb{R}^1$-wertigen Wiener-Prozesses $(W(t), \mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, adaptiert zur Standardfiltration $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ definiert ist. Im Sinne der Definition 2.5 im zweiten Kapitel existiert wegen Satz 2.1 ein eindeutiger Lösungsprozeß mit Wahrscheinlichkeit 1.

Weiterhin folgt aus Satz 2.3

$$E\bigg(\sup_{t\in[0,T]}\int_{\mathbb{R}^1}|v(t,x)|^2dx\bigg) + E\bigg(\int_0^T\int_{\mathbb{R}^1}|v_x(s,x)|^2dxds\bigg) < \infty. \tag{3.9}$$

Wir führen ein erstes Differenzenschema ein:

$$u_k^{n+1} \quad = \quad (1 + a\frac{\Delta t}{\Delta x})u_k^n - a\frac{\Delta t}{\Delta x}u_{k+1}^n - bu_k^n(W((n+1)\Delta t) - W(n\Delta t)). \tag{3.10}$$

Die Lösungen von (3.8) sollen durch die mit (3.10) definierten Zufallsvariablen u_k^n approximiert werden. (3.10) ist eine stochastische Variante des Forward-Time-Forward-Space-Schemas. In der deterministischen Literatur wird das FTFS-Schema auch als One-(Time)-Level-Schema bezeichnet, weil in die Berechnung einer jeden Stufe, jeden Levels nur die Vertreter eines anderen Zeitlevels (meist des direkt vorangehenden) eingehen.

Weitere mögliche Schemata sind z.B. das Forward-Time-Backward-Space-Schema

$$u_k^{n+1} \quad = \quad (1 - a\frac{\Delta t}{\Delta x})u_k^n + a\frac{\Delta t}{\Delta x}u_{k-1}^n - bu_k^n(W((n+1)\Delta t) - W(n\Delta t)) \tag{3.11}$$

oder eine stochastische Variante des Schemas von Lax-Friedrich:

$$\begin{aligned} u_k^{n+1} \quad = \quad & \frac{1}{2}\left(u_{k+1}^n - u_{k-1}^n\right) - \frac{a\Delta t}{2\Delta x}(u_{k+1}^n - u_{k-1}^n) \\ & -\frac{b}{2}(u_{k+1}^n + u_{k-1}^n)(W((n+1)\Delta t) - W(n\Delta t)) \end{aligned} \tag{3.12}$$

oder eine stochastische Version des Leapfrog-Schemas, eines sogenannten Zwei-(Time)-Level - Schemas:

$$u_k^{n+1} = u_k^{n-1} - \frac{a\Delta t}{\Delta x}(u_{k+1}^n - u_{k-1}^n) - bu_k^n(W((n+1)\Delta t) - W(n\Delta t)). \tag{3.13}$$

3.2 Konsistenz und Stabilität

In diesem Abschnitt werden die Hauptbegriffe der deterministischen Theorie der Finiten Differenzen, nämlich die Konsistenz und die Stabilität für den stochastischen Fall definiert. Es wird gezeigt, dass die vorgeschlagenen Verfahren konvergieren. Natürlich ist die Konvergenz die anschaulichste Eigenschaft eines Approximationsschemas. Grob gesagt bedeutet diese, dass die Lösung der korrespondierenden Differentialgleichung Grenzwert der Näherungen für Δt und $\Delta x \to 0$ ist.

Um zu einer möglichst allgemeinen Definition zu gelangen, ist es vorteilhaft, eine allgemeinere Bezeichnung für die Differenzenschemata, die Differentialoperatoren und Anfangswertbedingungen einzuführen. Es sei L ein Operator, der v, die Anfangsbedingungen, Ableitungen bezüglich x, Integrale bezüglich t und Itô-Integrale bezüglich t enthält. Man betrachtet

$$Lv = G, \tag{3.14}$$

mit einer Anfangswertbedingung (3.3), wobei G eine Inhomogenität bezeichnet. Offensichtlich ist (3.1) ein Beispiel für (3.14). u_k^n sei die approximierende Lösung des Problems, die unter Anwendung eines Differenzenschemas, das mit L_k^n bezeichnet werden soll, erhalten wird. Dabei korrespondieren wie zuvor n mit dem Zeitschritt und k mit dem räumlichen Zerlegungspunkt. Weiterhin steht im folgenden G_k^n für die Approximation der Inhomogenität G. Wir führen für die Lösungen des Differenzenschemas und die Lösungen der stochastischen Differentialgleichung an der Stelle $((n+1)\Delta t, k\Delta x)$ Folgen ein:

$$\begin{aligned}
u^{n+1} &= (\cdots, u_{k-2}^{n+1}, u_{k-1}^{n+1}, u_k^{n+1}, u_{k+1}^{n+1}, u_{k+2}^{n+1}, \cdots)^T, &(3.15)\\
v^{n+1} &= (\cdots, v_{k-2}^{n+1}, v_{k-1}^{n+1}, v_k^{n+1}, v_{k+1}^{n+1}, v_{k+2}^{n+1}, \cdots)^T, &(3.16)\\
v_k^{n+1} &= v((n+1)\Delta t, k\Delta x),\ (k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \cdots).
\end{aligned}$$

Bemerkung 3.2. Es werden die für ein Schema angepaßten Normen verwandt (vgl. im deterministischen Fall [61]). Die Normen, die wir für Folgen $(x) = (..., x_{-1}, x_0, x_1, ...)$ einführen, sind die $\ell_{2,\Delta x}$-Norm mit

$$\| x \|_{2,\Delta x} := \sqrt{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x_k|^2 \Delta x} \tag{3.17}$$

und die Supremums-Norm $\| x \|_\infty$ mit $\|x\|_\infty := \sup_k |x|$.

Das Lax-Richtmyer-Theorem in der deterministischen Theorie erlaubt es auf einfache Weise, die Konvergenz eines Differenzenschemas nachzuweisen, indem man zeigt, dass das Schema sowohl konsistent als auch stabil ist. Deswegen ist es auch interessant, diese Begriffsbildungen für stochastische Differenzenschemata durchzuführen und nach analogen Zusammenhängen zu suchen.

Definition 3.1 (Konsistenz eines SDS). Ein Differenzenverfahren, das mit der Zerlegung in ein Raum-Zeit-Gitter mit maximalen Raumschrittweite $\Delta\bar{x}_0$ und maximaler Zeitschrittweite

$\Delta\bar{t}_0$ korrespondiert, heißt konsistent mit (3.1), wenn

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} E|v((n+1)\Delta t, k\Delta x) - v(n\Delta t, k\Delta x) - \tilde{a}_k(n\Delta t, v(n\Delta t, \circ)) \\ +B(n\Delta t, v(n\Delta t, k\Delta x))\,(W((n+1)\Delta t) - W(n\Delta t))\,|^2 \Delta x \leq C(\Delta t, \Delta x) \tag{3.18}$$

gilt, wobei $\tilde{a}_k(n\Delta t, v(n\Delta t, \circ))$ ein Differenzenoperator bezüglich x von $-av_x(t,x) - A(t, v(t,x))$ ist und

$$\lim_{\Delta t \to 0, \Delta x \to 0} C(\Delta t, \Delta x) = 0 \tag{3.19}$$

gilt.

Bemerkung 3.3. Es gibt sowohl in der deterministischen Theorie (siehe [60], [61]) als auch in der stochastischen Theorie (siehe [33]) eine Vielzahl von Konsistenzbegriffen. Der hiesige Begriff ist an den Fall von einparametrischen Prozessen angelehnt (siehe [33]). Der Begriff ist so stark gewählt, dass sich die Konvergenz ergibt. Bei anderen Konsistenzbegriffen muß dies nicht der Fall sein. Betrachtet man im einparametrischen Fall die sogenannte schwache Konsistenz (siehe [33]), dann sind noch Stabilitätsvoraussetzungen erforderlich (siehe [33], Theorem 9.7.4). Für den Fall deterministischer partieller Differentialgleichungen sei auf [60], [61], [66] verwiesen.

Unabhängig von den Konvergenzbetrachtungen sind Stabilitätsbetrachtungen für das Fehlerwachstum von Interesse.

Definition 3.2 (Stabilität eines SDS). Ein stochastisches Differenzenschema wird stabil im quadratischen Mittel bezüglich einer Norm $\|\cdot\|$ genannt, wenn positive Konstanten $\overline{\Delta x_0}$ und $\overline{\Delta t_0}$ und nicht-negative Konstanten K und β existieren , so dass

$$E\|u^{n+1}\|^2 \leq Ke^{\beta t} E\|u^0\|^2$$

für alle $t = (n+1)\Delta t$, $0 \leq \Delta x \leq \overline{\Delta x_0}$, $0 \leq \Delta t \leq \overline{\Delta t_0}$ gilt.

Definition 3.3. Ein Differenzenschema heißt unbedingt stabil, falls keine zusätzlichen Voraussetzungen an Δx und Δt gestellt werden müssen, um die Stabiliät zu gewährleisten. Ansonsten heißt ein Differenzenschema bedingt stabil.

Bemerkung 3.4. Aus der Stabilität ergibt sich, dass für stabile Schemata kleine Fehler in den Anfangswerten auch nur zu kleinen Fehlern im Ergebnis führen. Die Definition zeigt insbesondere auch ein Anwachsen des Fehlers in jedem Schritt. Das Fehlerwachstum ist aber auf ein höchstens exponentielles Wachstum beschränkt.

Nun soll gezeigt werden, dass die Schemata (3.10) und (3.12) den obigen Definitionen genügen.

Theorem 3.1. *Das stochastische FTFS-Schema mit*

$$(n+1)\Delta t = t \tag{3.20}$$

und $-1 \leq a\frac{\Delta t}{\Delta x} =: R \leq 0$, $a < 0$ *ist stabil im quadratischen Mittel bezüglich der* $\|\cdot\|_{2,\Delta x}$*-Norm, mit* $K = 1$ *und* $\beta = b^2$, *wobei* $\overline{\Delta t_0}$ *und* $\overline{\Delta x_0}$ *aus der Definition 3.2 der Stabilität durch* t *und durch* $|a|t$ *gegeben sind.*

Beweis: Wendet man $E|\cdot|^2$ auf das sFTFS (3.10) an und beachtet die Unabhängigkeit der Zuwächse des Wiener-Prozesses und die $\mathcal{F}_{t_n}$-Meßbarkeit der u_k^n, u_{k+1}^n, so erhält man

$$\begin{aligned} E|u_k^{n+1}|^2 &= E|(1+R)u_k^n - Ru_{k+1}^n - bu_k^n(W((n+1)\Delta t) - W(n\Delta t))|^2 \\ &= E|(1+R)u_k^n - Ru_{k+1}^n|^2 \\ &\quad +2E((1+R)u_k^n - Ru_{k+1}^n)bu_k^n(W((n+1)\Delta t) - W(n\Delta t)) \\ &\quad +b^2\Delta t E|u_k^n|^2 \\ &= E|(1+R)u_k^n - Ru_{k+1}^n|^2 + b^2\Delta t E|u_k^n|^2. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Da die Anfangswertfunktion $f \in L^2(\mathbb{R}^1)$ ist, gilt

$$E\int_{\mathbb{R}^1} (v_0(x))^2\, dx = \int_{\mathbb{R}^1} f^2(x)\, dx < \infty, \tag{3.22}$$

und man erhält mittels Rekursion

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} E|u_k^n|^2 \Delta x < \infty. \tag{3.23}$$

Multipliziert man (3.21) mit Δx und summiert über alle k, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} E|u_k^{n+1}|^2\Delta x &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[E|(1+R)u_k^n - Ru_k^{n+1}|^2 + b^2\Delta t E|u_k^n|^2\right]\Delta x \\ &\leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[\left(|1+R|^2E|u_k^n|^2 + 2|1+R||R|E|u_k^n||u_{k+1}^n| + |R|^2E|u_{k+1}^n|^2\right)\right. \\ &\quad \left. +b^2\Delta t E|u_k^n|^2\right]\Delta x \\ &\leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[\left(|1+R|^2E|u_k^n|^2 + |1+R||R|\{E|u_k^n|^2 + E|u_{k+1}^n|^2\}\right.\right. \\ &\quad \left.\left. +|R|^2E|u_{k+1}^n|^2\right) + b^2\Delta t E|u_k^n|^2\right]\Delta x \\ &\leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \{\left[|1+R|^2 + 2|1+R||R| + |R|^2\right] + b^2\Delta t] E|u_k^n|^2\}\Delta x \\ &= \left[(|1+R| + |R|)^2 + b^2\Delta t\right] \sum_{k=-\infty}^{+\infty} E|u_k^n|^2\Delta x. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Für $-1 \leq R \leq 0$ erhält man nun die Ungleichung $|1+R|+|R| \leq 1$ und kann deshalb den obigen Ausdruck weiter abschätzen durch

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} E|u_k^{n+1}|^2\Delta x &\leq (1+b^2\Delta t)\sum_{k=-\infty}^{+\infty} E|u_k^n|^2\Delta x, \\ E\|u^{n+1}\|_{2,\Delta x}^2 &\leq (1+b^2\Delta t)E\|u^n\|_{2,\Delta x}^2 \leq (1+b^2\Delta t)^{n+1}E\|u^0\|_{2,\Delta x}^2. \end{aligned}$$

Wegen $\Delta t = \frac{t}{n+1}$ gilt

$$E\|u^{n+1}\|^2_{2,\Delta x} \leq \left(1+\frac{b^2 t}{n+1}\right)^{n+1} E\|u^0\|^2_{2,\Delta x} \leq e^{b^2 t} E\|u^0\|^2_{2,\Delta x}. \tag{3.25}$$

Das ist die Stabilität.

■

Als nächstes zeigen wir die Stabilität von (3.12) bezüglich der $\|\cdot\|_\infty$-Norm. Der Beweis wird zeigen, dass sich mit analogen Überlegungen auch die Stabilität von (3.10) bezüglich der $\|\cdot\|_\infty$-Norm ergibt. Analoges gilt auch für die Stabilität von (3.12) bezüglich der $\|\cdot\|_{2,\Delta x}$-Norm, vergleiche dazu auch Satz 3.8.

Theorem 3.2. *Die Differenzengleichung (3.12) mit $(n+1)\Delta t = t$ und $-1 \leq a\frac{\Delta t}{\Delta x} =: R \leq 1$, ist stabil im quadratischen Mittel bezüglich der $\|\cdot\|_\infty = \sup_k |\cdot|$-Norm mit $K = 1$ und $\beta = \frac{b^2}{4}$.*

Beweis: Im quadratischen Mittel ergibt aus (3.12):

$$\begin{aligned}
E|u_k^{n+1}|^2 &= E|\frac{1}{2}(u_{k+1}^n - u_{k-1}^n) - \frac{R}{2}(u_{k+1}^n - u_{k-1}^n)|^2 + \frac{b^2\Delta t}{4}E|u_{k+1}^n - u_{k-1}^n|^2 \\
&= \frac{1}{4}\left[(1-R)^2 E|u_{k+1}^n|^2 + 2(1-R^2)E[u_{k+1}^n u_{k-1}^n]\right. \\
&\quad \left. +(1+R)^2 E|u_{k-1}^n|^2\right] + \frac{b^2\Delta t}{4}E|u_{k+1}^n - u_{k-1}^n|^2 \\
&\leq \frac{1}{4}\left(4\sup_k E|u_k^n|^2 + b^2\Delta t \sup_k E|u_k^n|^2\right) \\
&\leq \left\{1+\frac{b^2\Delta t}{4}\right\}\sup_k E|u_k^n|^2.
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Diese Abschätzung gilt natürlich für alle k, deshalb erhält man

$$\sup_k E|u_k^{n+1}|^2 \leq \left\{1+\frac{b^2\Delta t}{4}\right\}\sup_k E|u_k^n|^2 \leq \left\{1+\frac{b^2\Delta t}{4}\right\}^{n+1}\sup_k E|u_k^0|^2. \tag{3.27}$$

Das entspricht

$$\|u^{n+1}\|^2_\infty \leq [1+\frac{b^2\Delta t}{4}]^{n+1}\|u^0\|^2_\infty. \tag{3.28}$$

Erinnert man sich der Tatsache $\Delta t = \frac{t}{n+1}$, so hat man

$$\|u^{n+1}\|^2_\infty \leq \left(1+\frac{b^2 t}{4(n+1)}\right)^{n+1}\|u^0\|^2_\infty \leq e^{\frac{b^2 t}{4}}\|u^0\|_\infty. \tag{3.29}$$

■

Bemerkung 3.5. Die Stabilität von (3.10) bezüglich der $\|\cdot\|_\infty$-Norm folgt analog, indem man den Erwartungswert des Schemas im quadratischen Mittel betrachtet und gegen das Supremum abschätzt.

Nun soll der Nachweis erbracht werden, dass das Forward-Time-Forward-Space-Schema konsistent ist.

Theorem 3.3. *Es sei $v(0,\cdot) \in C^{5,\alpha}$. Das stochastische FTFS-Schema ist konsistent im Sinne von Definition 3.1.*

Beweis: Offensichtlich gilt

$$\begin{aligned}
&v((n+1)\Delta t, k\Delta x)\\
&= v(n\Delta t, k\Delta x) - a\int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} v_x(\tau, k\Delta x)\, d\tau - b\int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} v(\tau, k\Delta x)\, dW(\tau)\\
&= v(n\Delta t, k\Delta x) - a v_x(n\Delta t, k\Delta x)\Delta t - b v(n\Delta t, k\Delta x)\left(W((n+1)\Delta t) - W(n\Delta t)\right)\\
&\quad -a\int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} \left(v_x(\tau, k\Delta x) - v_x(n\Delta t, k\Delta x)\right) d\tau\\
&\quad -b\int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} \left(v(\tau, k\Delta x) - v(n\Delta t, k\Delta x)\right) dW(\tau). \qquad (3.30)
\end{aligned}$$

Da wegen Theorem 2.1 $v(t,x)$ bezüglich x dreimal stetig differenzierbar ist, gilt für $\tilde{v}(t,x) := v_{xx}(t,x)$

$$\tilde{v}(t,x) - v_{xx}(0,x) + a\int_0^t \tilde{v}_x(\tau, x)\, d\tau + b\int_0^t \tilde{v}(\tau, x)\, dW(\tau) = 0 \qquad (3.31)$$

und wegen Theorem 2.3 gilt

$$C := \sup_{t\in[0,T]} \int_{\mathbb{R}^1} E|\tilde{v}(t,x)|^2\, dx < +\infty. \qquad (3.32)$$

Durch die Taylorentwicklung von $v_x(n\Delta t, k\Delta x)$ an der Stelle $k\Delta x$ erhält man weiterhin

$$\begin{aligned}
&v((n+1)\Delta t, k\Delta x)\\
&= v(n\Delta t, k\Delta x) - \frac{a\Delta t}{\Delta x}\left(v(n\Delta t, (k+1)\Delta x) - v(n\Delta t, k\Delta x)\right)\\
&\quad -b v(n\Delta t, k\Delta x)\left(W((n+1)\Delta t) - W(n\Delta t)\right) - v_{xx}(n\Delta t, (k+\vartheta)\Delta x)\Delta t\Delta x\\
&\quad -a\int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} \left(v_x(\tau, k\Delta x) - v_x(n\Delta t, k\Delta x)\right) d\tau\\
&\quad -b\int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} \left(v(\tau, k\Delta x) - v(n\Delta t, k\Delta x)\right) dW(\tau), \qquad (3.33)
\end{aligned}$$

wobei ϑ eine Zufallsgröße mit $0 < \vartheta < 1$ ist. Folglich gilt mit der Schwarzschen Ungleichung und den Eigenschaften des Itô-Integrales

$$\begin{aligned}
&E\left| v((n+1)\Delta t, k\Delta x) - v(n\Delta t, k\Delta x) + \frac{a\Delta t}{\Delta x}\left(v(n\Delta t, (k+1)\Delta x) - v(n\Delta t, k\Delta x)\right)\right.\\
&\qquad \left. + b v(n\Delta t, k\Delta x)\left(W((n+1)\Delta t) - W(n\Delta t)\right)\right|^2\\
&\le 4E v_{xx}^2(n\Delta t, (k+\vartheta)\Delta x)\Delta t^2\Delta x^2 + 4a^2\Delta t\int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} E\left|v_x(\tau, k\Delta x) - v_x(n\Delta t, k\Delta x)\right|^2 d\tau\\
&\quad +4b^2\int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} E\left|v(\tau, k\Delta x) - v(n\Delta t, k\Delta x)\right|^2 d\tau. \qquad (3.34)
\end{aligned}$$

Wegen (3.32) erhalten wir

$$4 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(E v_{xx}^2(n\Delta t, (k+\vartheta)\Delta x) \Delta t^2 \Delta x^2 \right) \Delta x \leq 4C \Delta x^2 \Delta t^2. \tag{3.35}$$

Nach der Integraldefinition gilt, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein hinreichend kleines Δx gibt, so dass

$$\begin{aligned} &\sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} E \left| v_x(\tau, k\Delta x) - v_x(n\Delta t, k\Delta x) \right|^2 \, d\tau \Delta x \\ &\leq \varepsilon + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} E \left| v_x(\tau, x) - v_x(n\Delta t, x) \right|^2 \, d\tau \, dx. \end{aligned} \tag{3.36}$$

Da $\varepsilon > 0$ eine beliebig kleine positive Zahl ist, kann ε auch als Δt^2 gewählt werden. Aus Theorem 2.6 folgt dann wegen

$$v_x(t,x) = v_x(0,x) + a \int_0^t v_{xx}(\tau, x) \, d\tau + b \int_0^t v_x(t,x) \, dW(\tau), \tag{3.37}$$

dass eine Konstante C existiert, so dass

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} E \left| v_x(\tau, k\Delta x) - v_x(n\Delta t, k\Delta x) \right|^2 \, d\tau \Delta x \leq \Delta t^2 + C \Delta t^2 \tag{3.38}$$

gilt. Mit analogen Überlegungen erhalten wir zunächst

$$\begin{aligned} &\sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} E \left| v(\tau, k\Delta x) - v(n\Delta t, k\Delta x) \right|^2 \, d\tau \Delta x \\ &\leq \Delta t^2 + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} E \left| v(\tau, x) - v(n\Delta t, x) \right|^2 \, d\tau \, dx. \end{aligned} \tag{3.39}$$

Theorem 2.6 liefert dann die Existenz einer Konstanten C, für die

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} E \left| v(\tau, k\Delta x) - v(n\Delta t, k\Delta x) \right|^2 \, d\tau \Delta x \leq \Delta t^2 + C \Delta t^2 \tag{3.40}$$

gilt. Mit (3.35), (3.38), (3.40) folgt schließlich aus (3.34)

$$\begin{aligned} E \Big| & v((n+1)\Delta t, k\Delta x) - v(n\Delta t, k\Delta x) + \frac{a\Delta t}{k\Delta x} \left(v(n\Delta t, (k+1)\Delta x) - v(n\Delta t, k\Delta x) \right) \\ & + b v(n\Delta t, k\Delta x) \left(W((n+1)\Delta t) - W(n\Delta t) \right) \Big|^2 \\ \leq \;& 4C\Delta t^2 \Delta x^2 + 2\Delta t^2 + 4a^2 \Delta t^3 + 4a^2 C \Delta t^3 + 4b^2 \Delta t^2 + 4C\Delta t^2 \\ = \;& \Delta t^2 (C_1 \Delta x^2 + C_2 + C_3 \Delta t) \\ =: \;& C(\Delta t^2, \Delta x^2). \end{aligned} \tag{3.41}$$

$C(\Delta t^2, \Delta x^2)$ erfüllt offenbar die geforderten Bedingungen.

$\blacksquare$

Wir wollen nun eine Konvergenzeigenschaft des FTFS-Schemas untersuchen. Zunächst stellen wir eine A-priori-Abschätzung bereit. Aus der Definition des FTFS-Schemas und der Gleichung (3.33) ergibt sich für

$$z_k^n := u_k^n - v(n\Delta t, k\Delta x) \tag{3.42}$$

mit $R := \frac{a\Delta t}{\Delta x}$ und $-1 \leq R \leq 0$ und

$$\begin{aligned}\phi_{n,k} &= -v_{xx}^2(n\Delta t,(k+\vartheta)\Delta x)\Delta t\Delta x - a\int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t}\left(v_x(\tau,x)-v_x(n\Delta t,x)\right)\,d\tau \\ &\quad -b\int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t}\left(v(\tau,x)-v(n\Delta t,x)\right)\,dW(\tau).\end{aligned} \tag{3.43}$$

Dann gilt

$$z_k^{n+1} = (1+R)z_k^n - Rz_{k+1}^n - bz_k^n\left(W((n+1)\Delta t)-W(n\Delta t)\right) + \phi_{n,k}. \tag{3.44}$$

Im quadratischen Mittel erhält man

$$\begin{aligned}E|z_k^{n+1}|^2 &= E|(1+R)z_k^n - Rz_{k+1}^n|^2 + 2E\left(bz_k^n\left(W((n+1)\Delta t)-W(n\Delta t)\right)\phi_{n,k}\right) \\ &\quad +2E\left(\left((1+R)z_k^n - Rz_{k+1}^n\right)\phi_{n,k}\frac{\sqrt{\Delta t}}{\sqrt{\Delta t}}\right) + b^2\Delta tE|z_k^n|^2 + E|\phi_{n,k}|^2.\end{aligned} \tag{3.45}$$

Damit ergibt sich summiert über alle k

$$\begin{aligned}E\|z_\bullet^{n+1}\|_{2,\Delta x}^2 &\leq E\|z_\bullet^n\|_{2\Delta x}^2 + b^2E\|z_\bullet^n\|_{2\Delta x}^2\Delta t + \Delta t^2(C_1\Delta x^2 + C_2 + C_3\Delta t) \\ &\quad +b^2E\|z_\bullet^n\|_{2\Delta x}^2\Delta t + \Delta t(C_1\Delta x^2 + C_2 + C_3\Delta t) + b^2\Delta tE\|z_\bullet^n\|_{2\Delta x}^2 \\ &\quad +\Delta t^2(C_1\Delta x^2 + C_2 + C_3\Delta t) \\ &= E\|z_\bullet^n\|_{2\Delta x}^2 + (2b^2+1)\Delta tE\|z_\bullet^n\|_{2\Delta x}^2 + \Delta t(C_1\Delta x^2 + C_2 + C_3\Delta t) \\ &\quad +2\Delta t^2(C_1\Delta x^2 + C_2 + C_3\Delta t)\end{aligned} \tag{3.46}$$

für alle n. Nun sei $m < n$, dann gilt natürlich Beziehung (3.46) auch für $E\|z_\bullet^{m+1}\|_{2,\Delta x}^2$. Durch Summation ergibt sich unter Beachtung von $\|z_\bullet^0\| = 0$ und $(n+1)\Delta t = t$

$$\begin{aligned}E\|z_\bullet^{m+1}\|_{2,\Delta x}^2 &\leq (2b^2+1)\Delta t\sum_{k=0}^{n} E\|z_\bullet^m\|_{2,\Delta x}^2 \\ &\quad +3n\Delta t(C_1\Delta x^2 + C_2 + C_3\Delta t).\end{aligned} \tag{3.47}$$

Dann folgt aus dem Gronwallschen Lemma, dass eine Konstante C existiert, so dass

$$E\|z_\bullet^{n+1}\|_{2,\Delta x}^2 \leq C \tag{3.48}$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt. Damit gilt

Lemma 3.1. *Es sei $v(0,\cdot) \in C^{5,\alpha}$.*

Dann gilt für $z^n(t,x) := z_k^n$, $(x \in [\,x_k, x_{k+1}\,[\,,\quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} E|z^n(t,x)|^2\,dx \leq C. \tag{3.49}$$

Beweis:

$$\int_{-\infty}^{\infty} E|z^n(t,x)|^2\,dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} E|z^n(t,x)|^2\Delta x = E\|z^n_\bullet\|^2_{2,\Delta x} \leq C. \tag{3.50}$$

■

Unter den Voraussetzungen des Lemmas 3.1 folgt aus dem Satz von Riesz:

Folgerung 3.1. Es gibt eine Teilfolge $\left(n_j\right) \subset \left(n\right)$, so dass $\left(z^{n_j}\right)$ in $L^2(\mathbb{R}^1 \times \Omega)$ schwach konvergiert.

Lemma 3.2. *Der schwache Grenzwert in der Folgerung 3.1 ist P-f.s. und für L-fast alle x und alle t Null.*

Beweis: Angenommen der schwache Grenzwert sei nicht Null. Demzufolge muß für alle $\left(F_k\right)$ mit $E\sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k^2\Delta x < \infty$ gelten

$$\lim_{n\to\infty} E\left(z^{n+1}, F\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} E(z_k^{n+1}, F_k)\Delta x \neq 0. \tag{3.51}$$

Wir wählen speziell $F_0 = 1$, $F_k = 0$ für $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$. Damit gilt

$$Ez_0^{n+1} = (1+R)Ez_0^n - REz_1^n + E\phi_{n,0} \tag{3.52}$$

und somit

$$Ez_0^{n+1} - Ez_0^n = R\left(Ez_0^n - Ez_1^n\right) + E\phi_{n,0}. \tag{3.53}$$

Da aber $\lim_{n\to\infty}\left(Ez_1^{n+1} - Ez_1^n\right) = 0$ und $\lim_{n\to\infty} E\phi_{n,0} = 0$ muß auch

$$\lim_{n\to\infty}\left(Ez_0^n - Ez_1^n\right) = 0 \tag{3.54}$$

gelten. Wird nun $F_1 = 1$ und $F_k = 0$ für $k = -1, 0, \pm 2, \ldots$ gewählt, so ergibt sich entsprechend

$$\lim_{n\to\infty}\left(Ez_1^n - Ez_2^n\right) = 0. \tag{3.55}$$

Setzen wir diesen Prozess fort, so erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty} Ez_0^n = \lim_{n\to\infty} Ez_k^n =: A \neq 0 \tag{3.56}$$

für alle k. Aus der Schwarzschen Ungleichung folgt

$$\left(Ez_k^n\right)^2 \leq E\left(z_k^n\right)^2. \tag{3.57}$$

Aus der A-priori-Abschätzung des Lemmas 3.1 erhalten wir dann

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(Ez_k^n\right)^2\Delta x \leq C \tag{3.58}$$

für alle n. Aber

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (Ez_k^n)^2 \, \Delta x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A^2 \Delta x \leq C \tag{3.59}$$

ist für $A \neq 0$ nicht möglich.

■

Damit haben wir erhalten

Theorem 3.4. *Es seien $v_x(0,x) \in C^{5,\alpha}$ und $a \in [\,-1, 0\,[$. Dann gibt es eine Folge von Zerlegungen, so dass $\left(u_k^n\right)_{k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots}$ schwach gegen $v(t,x)$ in $L^2(\mathbb{R}^1 \times \Omega)$ konvergiert.*

3.2.1 Anwendungen der Fourier-Transformation

Ein anderer Weg für Stabilitätsbeweise ist von von Neumann beschritten worden [60]. Er wendete die Methoden der Fourier-Analysis an, um notwendige und hinreichende Bedingungen für die Stabilität eines Differenzenschemas herzuleiten. Im folgenden wird gezeigt, dass diese Vorgehensweise auch für den stochastischen Fall zweckmäßig ist.

Die Fourier-Inversionsformel liefert die Darstellung

$$u_m^{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{\pi}{\Delta x}}^{\frac{\pi}{\Delta x}} e^{im\Delta x\xi} \hat{u}^{n+1}(\xi) d\xi, \tag{3.60}$$

wobei $\hat{u}^{n+1}$ die Fourier-Transformierte von u^{n+1} ist, d.h.

$$\hat{u}^{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-im\Delta x\xi} u_m^{n+1} \Delta x,$$

wobei das ξ eine reelle Variable ist. Natürlich gilt auch

$$u_m^n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{\pi}{\Delta x}}^{\frac{\pi}{\Delta x}} e^{im\Delta x\xi} \hat{u}^n(\xi) d\xi. \tag{3.61}$$

Setzt man diese Darstellung in die stochastische Variante des FTFS-Schemas (3.10) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} u_m^{n+1} \quad &= \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{\pi}{\Delta x}}^{\frac{\pi}{\Delta x}} e^{im\Delta x\xi} \hat{u}^n(\xi) \left\{ (1 + \frac{a\Delta t}{\Delta x}) \right. \\ & \qquad \left. - e^{i\Delta x\xi} \frac{a\Delta t}{\Delta x} + b(W((n+1)\Delta t) - W(n\Delta t)) \right\} d\xi. \end{aligned} \tag{3.62}$$

Die Eindeutigkeit der Fourier-Transformation liefert die Gleichheit der beiden Ausdrücke, d.h. es gilt

$$\hat{u}^{n+1}(\xi) = \hat{u}^n(\xi) \left\{ (1 + \frac{a\Delta t}{\Delta x}) - e^{i\Delta x\xi} \frac{a\Delta t}{\Delta x} + b(W((n+1)\Delta t) - W(n\Delta t)) \right\}. \tag{3.63}$$

In Anlehnung an den deterministischen Fall führen wir

$$g(\Delta x\xi, \Delta t, \Delta x) := \left\{(1 + \frac{a\Delta t}{\Delta x}) - e^{i\Delta x\xi}\frac{a\Delta t}{\Delta x} + b(W((n+1)\Delta t) - W(n\Delta t))\right\} \tag{3.64}$$

als Amplifikationsfaktor des entsprechenden Verfahrens - hier des sFTFS - ein. Das folgende Theorem liefert ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für die Stabilität eines Verfahrens in Abhängigkeit von den Eigenschaften seines Amplifikationsfaktors.

Theorem 3.5. *Ein stochastisches Ein-Schritt-Differenzenschema (mit konstanten Koeffizienten) ist dann und nur dann stabil, wenn eine Konstante K (unabhängig von ξ, Δt, Δx) und positive Schrittweiten $\overline{\Delta x_0}, \overline{\Delta t_0}$ existieren, so dass*

$$E|g(\Delta x\xi, \Delta t, \Delta x)|^2 \leq 1 + K\Delta t \tag{3.65}$$

für alle $0 \leq \Delta x \leq \overline{\Delta x_0}$ und $0 \leq \Delta t \leq \overline{\Delta t_0}$.

Beweis: Zuerst sei angenommen, dass (3.65) erfüllt ist. Man führt für $v \in L^2(\mathbb{R}^1 \times \Omega)$ die $E\| \cdot \|^2_{\Delta x}$−Norm ein, d.h.

$$E \parallel \hat{v} \parallel^2_{\Delta x} = E\int_{-\frac{\pi}{\Delta x}}^{\frac{\pi}{\Delta x}} |\hat{v}(\xi)|^2 d\xi = E\sum_{k=-\infty}^{\infty} |v_m|^2 \Delta x = E \parallel v \parallel^2_{\Delta x}, \tag{3.66}$$

wobei $v_k = v_k(t)$ ist. Mit der Parsevalschen Relation (vgl. auch Anhang 5.2) und der Unabhängigkeit der Zuwächse des Wiener-Prozesses ergibt sich

$$\begin{aligned} E\|v^n\|^2_{\Delta x} &= E\int_{-\frac{\pi}{\Delta x}}^{\frac{\pi}{\Delta x}} |\hat{v}^n|^2 d\xi \\ &= \int_{-\frac{\pi}{\Delta x}}^{\frac{\pi}{\Delta x}} E|g(\Delta x\xi, \Delta t, \Delta x)|^{2n} E|\hat{v}^0|^2 d\xi \\ &\leq \int_{-\frac{\pi}{\Delta x}}^{\frac{\pi}{\Delta x}} (1 + K\Delta t)^n E|\hat{v}^0|^2 d\xi \\ &= (1 + K\Delta t)^n E\|\hat{v}^0\|^2_{\Delta x}. \end{aligned} \tag{3.67}$$

Da $n \leq \frac{t}{\Delta t} \leq \frac{T}{\Delta t}$ gilt, folgt auch $(1 + K\Delta t)^n \leq (1 + K\Delta t)^{\frac{T}{\Delta t}} \leq e^{KT}$, wobei $\Delta t = \frac{t}{n+1}$, und deshalb erhält man auch $E\|v^n\|^2_{\Delta x} \leq e^{KT} E\|v^0\|^2_{\Delta x}$. Dies aber ist die Stabilität.

Es sei angenommen, dass die Bedingung (3.65) für den Amplifikationsfaktor für keinen positiven Wert von K erfüllt ist. Es wird gezeigt, dass unter dieser Bedingung die Stabilitätsbedingung nicht erfüllt sein kann. Es wird angenommen, dass für eine positive Konstante C ein Intervall von $\theta := \Delta x\xi, \theta \in [\theta_1, \theta_2]$ existiert, wobei $\theta_1 < 0$, $\theta_2 > 0$ und $\Delta x, \Delta t$ so dass $0 \leq \Delta x \leq \overline{\Delta x_0}$, $0 \leq \Delta t \leq \overline{\Delta t_0}$ mit

$$E|g(\theta, \Delta t, \Delta x)|^2 \geq 1 + C\Delta t$$

gilt. Dann definiert man eine Funktion $\hat{v}^0$

$$\hat{v}^0(\xi) = \begin{cases} 0, & \text{falls} \quad \Delta x\xi \notin [\theta_1, \theta_2] \\ \sqrt{\Delta x(\theta_2 - \theta_1)^{-1}}, & \text{falls} \quad \Delta x\xi \in [\theta_1, \theta_2], \end{cases} \tag{3.68}$$

und es gilt

$$\begin{aligned}
E\|v^n\|^2_{\Delta x} &= \int_{-\frac{\pi}{\Delta x}}^{\frac{\pi}{\Delta x}} (E|g(\theta,\Delta x,\Delta t)|^2)^n E|\hat{v}^0|^2 d\xi \\
&= \int_{\frac{\theta_1}{\Delta x}}^{\frac{\theta_2}{\Delta x}} E|g(\theta,\Delta x,\Delta t)|^{2n} \frac{\Delta x}{\theta_2-\theta_1} d\xi \\
&\geq (1+C\Delta t)^n. \qquad (3.69)
\end{aligned}$$

Für $j \approx n+1 = \frac{t}{\Delta t}$, $j \leq n$, gilt

$$(1+C\Delta t)^j \approx (1+C\Delta t)^{\frac{t}{\Delta t}} = e^{tC}. \qquad (3.70)$$

Mit $\Delta t = \frac{t}{n+1}$ und mit $E\|v^0\|^2_{\Delta x} = E\|\hat{v}^0\|^2_{\Delta x} = 1$ hat man

$$E\|v^n\|^2_{\Delta x} \geq \frac{1}{2} e^{tC} E\|v^0\|^2_{\Delta x}. \qquad (3.71)$$

Dies zeigt, dass das Schema instabil ist, weil C beliebig groß sein kann.

■

Von diesem Theorem kann ein Korollar für alle stochastischen Differenzenschemata hergeleitet werden, die ein multiplikatives Rauschen enthalten.

Korollar 3.1. *Ein stochastisches Differenzenschema, das sich von seinem deterministischen Ausgangsschema nur durch den Zusatzterm zur Approximation von $b\int_0^t v(s,x)dW(s)$ unterscheidet, ist stabil dann und nur dann, wenn auch das deterministische Verfahren stabil ist.*

Beweis: Ein deterministisches Schema ist stabil dann und nur dann, wenn $|g| \leq 1 + K\Delta t$ gilt (vgl. [60], [61]). Für den Amplifikationsfaktor $\bar{g}$ des stochastischen Schemas gilt:

$$\begin{aligned}
E|\bar{g}|^2 &\leq E|g + C(W((n+1)\Delta t) - W(n\Delta t)|^2 \\
&= E|g|^2 + C^2\Delta t \leq (1+K\Delta t)^2 + C^2\Delta t \\
&\leq 1 + H\Delta t, \qquad (3.72)
\end{aligned}$$

wobei $H = 2K + C^2 + K^2$.

■

Beispiel 3.1. Wendet man die von Neumann Analysis auf die stochastische Version des Lax-Friedrichs-Schemas (3.12) an, so erhält man

$$g(\theta,\Delta t,\Delta x) = \cos\theta - iR\sin\theta + B\left(W((n+1)\Delta t) - W(n\Delta t)\right)(\cos\theta - iR\sin\theta) \qquad (3.73)$$

für ein beliebiges $i \in \{1,...,n\}$. Im quadratischen Mittel erhält man

$$E|g(\theta,\Delta t,\Delta x)|^2 = |\cos\theta - iR\sin\theta|^2 + B^2\Delta t\,|\cos\theta - iR\sin\theta|^2\,. \qquad (3.74)$$

Man sieht, dass $E|g(\theta,\Delta t,\Delta x)|^2$ nur dann kleiner gleich $1 + K\Delta t$ sein kann, wenn $|R| \leq 1$ ist.

Bemerkung 3.6. Stabilitätsbedingungen für variable Koeffizienten
Bei den bisherigen Betrachtungen wurden Fälle hyperbolischer Differentialgleichungen mit variablem Koeffizienten $a(t,x)$ nicht betrachtet. Trotzdem lassen sich die bisherigen Betrachtungen und die gefundenen Stabilitätsbedingungen problemlos auf diesen Fall übertragen. Beispielsweise ist die Stabilitätsbedingung für eine entsprechende Version des Lax-Friedrich-Schemas

$$\begin{aligned} g(\theta, \Delta t, \Delta x) &= \cos\theta - ia(t,x)\frac{\Delta t}{\Delta x}\sin\theta \\ &\quad + B\left(W((i+1)\Delta t) - W(i\Delta t)\right)\left(\cos\theta - ia(t,x)\frac{\Delta t}{\Delta x}\sin\theta\right) \end{aligned} \tag{3.75}$$

erfüllt, wenn das $a(t,x)\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$ ist, und zwar für alle Gitterpunkte $(n\Delta t, k\Delta x)$, die im entsprechenden Berechnungsgebiet liegen.

3.2.2 Stochastische Mehrschrittverfahren

Den Nachweis der Stabilität stochastischer Mehrschrittverfahren kann man auch auf die deterministische Theorie zurückführen, indem man zeigt, dass sich das Abweichen des stochastischen Verfahrens vom deterministischen im quadratischen Mittel durch $C\Delta t$ beschränken läßt. Die Stabilitätsanalyse für deterministische Verfahren mit höherer Zeitschrittweite, d.h. für Verfahren bei denen das Level $n+1$ von mehr Leveln als vom Level n abhängt, gestaltet sich anspruchsvoller. Wir betrachten deshalb ein kurzes Beispiel, vgl. [60], nämlich die Stabilitätsanalyse des deterministischen Leapfrog-Verfahrens. Für die Fouriertransformierte des deterministischen Leapfrog-Schemas gilt wegen der Eindeutigkeit der Fouriertransformation die folgende Beziehung:

$$\hat{u}^{n+1}(\xi) + 2iR\sin\Delta x\xi\, \hat{u}^n - \hat{u}^{n-1} = 0 \tag{3.76}$$

Diese Gleichung wird gelöst, indem man $\hat{u}^n = g^n$ setzt, wobei auf der linken Seite n für einen Index steht, auf der rechten für einen Exponenten. Löst man das entstehende Gleichungssystem, so erhält man nach Division durch g^{n-1}

$$g^2 + 2iR\sin\Delta x\xi\, g - 1 = 0, \tag{3.77}$$

das Amplifikationspolynom des Leapfrog-Schemas, dessen Nullstellen die folgende Gestalt haben

$$g_{\pm} = -iR\sin\Delta x\xi \pm \sqrt{1 - R^2\sin^2\Delta x\xi}. \tag{3.78}$$

Sind die beiden Nullstellen verschieden, so hat die Lösung nach [60] die Gestalt

$$\hat{u}^n(\xi) = A(\xi)g_+(\Delta x\xi) + B(\xi)\left(\frac{g_-(\Delta x\xi)^n - g_+(\Delta x\xi)^n}{g_-(\Delta x\xi) - g_+(\Delta x\xi)}\right) \tag{3.79}$$

und im Falle der Gleichheit

$$\hat{u}^n(\xi) = A(\xi)g(\Delta x\xi)^n + B(\xi)ng(\Delta x\xi)^{n-1}, \tag{3.80}$$

wobei die Funktionen $A(\xi)$ und $B(\xi)$ von den Anfangswerten abhängen, und zwar

$$A(\xi) = \hat{u}^0(\xi), \tag{3.81}$$
$$B(\xi) = \hat{u}^1(\xi) - \hat{u}^0 g_+(\Delta x\xi), \tag{3.82}$$

wobei auch hier $\hat{u}$ wieder durch ein stabiles Einschrittverfahren berechnet wird. Man kann dann die Anfangswerte so geschickt wählen, dass $B(\xi)$ identisch Null wird, so dass man wieder in einer ähnlichen Situation wie den Einschrittverfahren ist. Man braucht nämlich für die Stabilität, dass

$$|g_\pm(\Delta x\xi)| \leq 1 \tag{3.83}$$

gilt. Eingesetzt in Gleichung (3.78) erkennt man, dass zwar

$$|g_+|^2 = |g_-|^2 = 1$$

ist, aber für $|R| > 1$ sieht man, dass $|g_-| > 1$ ist, so dass die Stabilität in diesem Fall für $|R| \leq 1$ gewährleistet ist. Betrachtet man den Fall $g_+ = g_-$, so muß nur noch der bereits gefundene Bereich $|R| \leq 1$ untersucht werden, dort ist aber $g_+ = g_-$ nur dann, wenn $|R| = 1$ ist und $\Delta x\xi = \pm\pi/2$, so dass $g_\pm = \pm i$ ist. Eingesetzt in Gleichung (3.80) ergibt sich dann aber der Ausdruck

$$\hat{u}^n = A(\pm\frac{\pi}{2})g(\pm i)^n + B(\pm\frac{\pi}{2})ng(\pm i)^{n-1}, \tag{3.84}$$

der linear in n wächst. Deshalb ist das deterministische Leapfrog-Schema stabil für $|R| < 1$. Die deterministische Stabilitätstheorie für Mehrschrittverfahren beruht darauf, das Amplifikationspolynom des betrachteten Verfahrens und in Abhängigkeit von seinen Nullstellen den Stabilitätsbereich zu bestimmen. Dabei ist das Amplifikationspolynom im deterministischen Fall definiert als

$$\begin{aligned}\Phi(g,\theta) &= \Delta t\, p_{\Delta t,\Delta x}\left(\frac{\ln g}{\Delta t}, \frac{\theta}{\Delta x}\right), \quad \text{bzw.}\\ \Phi(e^{s\Delta t}, \Delta x\xi) &= \Delta t p_{\Delta t,\Delta x}(s,\xi),\end{aligned} \tag{3.85}$$

wobei $p_{\Delta t,\Delta x}$ das Symbol des Differenzenschemas ist.

Definition 3.4. Das Symbol $p_{\Delta t,\Delta x}$ des Differenzenoperators $P_{\Delta t,\Delta x}$ ist durch

$$P_{\Delta t,\Delta x} = p_{\Delta t,\Delta x} e^{sn\Delta t} e^{im\Delta x\xi} \tag{3.86}$$

definiert. d.h. das Symbol ist die Funktion, die man erhält, falls man den Differenzenoperator auf die Zerlegungsfunktion $e^{sn\Delta t}e^{im\Delta x\xi}$ anwendet und danach mit dieser multipliziert.

Eine alternative Berechnungsmöglichkeit im deterministischen Fall ist aber auch der Ansatz, den wir oben für das Leapfrog-Schema gewählt haben, indem wir $u_m^n = g^n e^{im\theta}$ für $f = 0$ gesetzt haben. Für Mehrschrittverfahren ist das Amplifikationspolynom vom Grad σ, wobei σ

die Differenz zwischen der $(n+1)$-Zeitstufe, die berechnet wird, und der frühesten Zeitstufe $(n+1-\sigma)$ ist, die noch in diese Berechnung mit eingeht. Hat das Amplifikationspolynom des deterministischen Verfahrens ausschließlich einfache Nullstellen $g_1(\Delta x\xi), ..., g_\sigma(\Delta x\xi)$, so hat die Fourier-Transformierte $\hat{u}^n$ die Darstellung

$$\hat{u}^n = \sum_{\nu=1}^{\sigma} g_\nu(\Delta x\xi)^n A_\nu(\xi) \tag{3.87}$$

in Abhängigkeit der Nullstellen. Dementsprechend ließen sich auch für stochastische Schemata die Symbole und Amplifikationspolynome aufstellen, die aber zu einer Berechnung einer allgemeinen Nullstelle für eine Realisierung des Wiener-Prozesses nicht taugen, da sie für jedes $\hat{u}^{n+1}$ von der Wiener-Prozess-Differenz $(W((n+1)\Delta t) - W(n\Delta t))$ abhängen. Für Einschrittverfahren ist das Amplifikationspolynom $\Phi(g,\theta)$ ein lineares Polynom, und die Lösung ist im deterministischen Fall gegeben durch $\hat{u}^n_{det}(\xi) = g(\Delta x\xi)^n \hat{u}^0(\xi)$ und im stochastischen durch $\hat{u}^n(\xi) = \prod_{i=1}^n g_i(\Delta x\xi)\,\hat{u}^0(\xi)$. Es läßt sich induktiv für Ein- und Mehrschrittverfahren zeigen, dass die Differenz $E|\hat{u}^n - \hat{u}^n_{det}|^2 \leq C\Delta t$ ist für alle n. Wir führen folgende Notationen für deterministische und stochastische Mehrschrittverfahren ein:

$$\hat{u}^{n+1} = f(\hat{u}^n, ..., \hat{u}^{n-\sigma+1}), \tag{3.88}$$

wobei wir zur Kennzeichnung des Deterministischen *det* anhängen. Damit kann man den folgenden Satz zeigen.

Theorem 3.6. *Ein finites stochastisches Mehrschrittverfahren ist stabil im quadratischen Mittel genau dann, wenn das zugehörige deterministische Mehrschrittverfahren stabil ist, d.h. wenn das zugehörige deterministische Amplifikationspolynom $\Phi(\theta, \Delta t, \Delta x)$ die folgenden Bedingungen erfüllt:*

(i) Es existiert eine Konstante $K > 0$, so dass für alle Nullstellen g_ν, $\nu = 1, ..., \sigma$ des Amplifikationspolynomes gilt

$$|g_\nu| \leq 1 + K\Delta t. \tag{3.89}$$

(ii) Falls $|g_\nu| = 1$, dann muß g_ν eine einfache Nullstelle sein.

Beweis:

(1) Zuerst sei angenommen, dass (i) und (ii) erfüllt sind. Mit der für $v \in L^2(\mathbb{R}^1 \times \Omega)$ eingeführten $\|\cdot\|^2_{\Delta x}$–Norm, der Parsevalschen Relation (vgl. auch Anhang 5.2), und der

Unabhängigkeit der Zuwächse des Wiener-Prozesses ergibt sich

$$\begin{aligned}
E\|u^n\|^2_{\Delta x} &= E\int_{-\frac{\pi}{\Delta x}}^{\frac{\pi}{\Delta x}} |\hat{u}^n|^2 d\xi \\
&\leq 2\int_{-\frac{\pi}{\Delta x}}^{\frac{\pi}{\Delta x}} E|\hat{u}^n - \hat{u}^n_{det}|^2 + E|\hat{u}^n_{det}|^2 d\xi \\
&= 2\int_{-\frac{\pi}{\Delta x}}^{\frac{\pi}{\Delta x}} E|f(\hat{u}^{n-1},...,\hat{u}^{n-\sigma}) - f_{det}(\hat{u}^{n-1},...,\hat{u}^{n-\sigma})|^2 \\
&\quad +|\sum_{\nu=1}^{\sigma} g_\nu(\Delta x\xi,\Delta t,\Delta x)^n A_\nu \hat{u}^0(\xi)|^2 d\xi \\
&\leq 2\int_{-\frac{\pi}{\Delta x}}^{\frac{\pi}{\Delta x}} \left(C_1\Delta t + \sigma\sum_{\nu=1}^{\sigma} |g_\nu(\Delta x\xi,\Delta t,\Delta x)|^{2n}|A_\nu|^2|\hat{u}^0|^2\right) d\xi \\
&\leq 2\int_{-\frac{\pi}{\Delta x}}^{\frac{\pi}{\Delta x}} \left(C_1\Delta t + \sigma^2(1+C_2\Delta t)^n \max_\nu |A_\nu|^2|\hat{u}^0(\xi)|\right) d\xi \\
&\leq C(1+K\Delta t)^n\|u^0\|^2_{\Delta x}.
\end{aligned} \tag{3.90}$$

Da $n \leq \frac{t}{\Delta t} \leq \frac{T}{\Delta t}$ gilt, folgt auch

$$(1+K\Delta t)^n \leq (1+K\Delta t)^{\frac{t}{\Delta t}} \leq e^{Kt}, \tag{3.91}$$

wobei $\Delta t = \frac{t}{n+1}$. Deshalb erhält man $E\|u^n\|^2_{\Delta x} \leq Ce^{KT}E\|u^0\|^2_{\Delta x}$. Also ist das Verfahren, das diese Bedingungen erfüllt, stabil.

(2) Jetzt weisen wir nach, dass ein Verfahren, für das Bedingung (3.89) nicht erfüllt ist, nicht stabil sein kann. Es wird angenommen, dass für eine positive Konstante C ein Intervall von $\theta := \Delta x\xi, \theta \in [\theta_1,\theta_2]$ existiert, wobei $\theta_1 < 0$, $\theta_2 > 0$ und $\Delta x, \Delta t$ so dass $0 \leq \Delta x \leq \overline{\Delta x_0}$, $0 \leq \Delta t \leq \overline{\Delta t_0}$ mit

$$E|g_{\nu_0}(\theta,\Delta t,\Delta x)|^2 \geq 1 + C\Delta t$$

für $\nu_0 \in \{1,...,\sigma\}$ gilt. Dann definiert man die Funktionen A_ν wie folgt

$$A_{\nu_0}(\xi) = \begin{cases} 0, & \text{falls } \Delta x\xi \notin [\theta_1,\theta_2] \\ \sqrt{\Delta x(\theta_2-\theta_1)^{-1}}, & \text{falls } \Delta x\xi \in [\theta_1,\theta_2], \end{cases} \tag{3.92}$$

$$A_\nu = 0, \quad \text{falls } \nu \neq \nu_0. \tag{3.93}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
E\|v^n\|^2_{\Delta x} &= E\int_{-\frac{\pi}{\Delta x}}^{\frac{\pi}{\Delta x}} \left|\sum_{\nu=1}^{\sigma} g_\nu(\theta,\Delta x,\Delta t)^n A_\nu\right|^2 d\xi \\
&= \int_{\frac{\theta_1}{\Delta x}}^{\frac{\theta_2}{\Delta x}} E|g_{\nu_0}(\theta,\Delta x,\Delta t)|^{2n}\frac{\Delta x}{\theta_2-\theta_1} d\xi \\
&\geq (1+C\Delta t)^n.
\end{aligned} \tag{3.94}$$

Für $j \approx n+1 = \frac{t}{\Delta t}$, $j \leq n$, gilt

$$(1+C\Delta t)^j \approx (1+C\Delta t)^{\frac{t}{\Delta t}} = e^{tC}, \tag{3.95}$$

mit $\Delta t = \frac{t}{n+1}$, und mit $E\|u^0\|^2_{\Delta x} = E\|A_{\nu_0}\|^2_{\Delta x} = 1$ hat man $E\|u^n\|^2_{\Delta x} \geq \frac{1}{2}e^{tC}E\|A_{\nu_0}\|^2_{\Delta x}$. Dies zeigt, dass das Schema instabil ist, weil C beliebig groß sein kann.

(3) Gäbe es mehrfache Nullstellen vom Betrag 1, so könnte das Polynom nach [59] geschrieben werden als

$$\hat{u}^n = \sum_{\nu=1}^{\gamma}\sum_{\eta=1}^{\sigma_\nu} A_{\eta\nu} n^{\eta-1} g_\nu^n, \tag{3.96}$$

wobei $\sum_{\nu+1}^{\gamma}\sum_{\eta=1}^{\sigma_\nu} = \sigma$ ist. Diese Summanden wachsen aber für $\sigma_\nu = 2$ schon linear in n, so dass das Verfahren instabil wird. Dieses Verhalten überträgt sich auf den stochastischen Fall, da die stochastische Nullstelle für Δt klein beliebig nahe an die deterministische herankommt. Ist die deterministische Nullstelle $|g_\nu| < 1$, so ist

$$n|g_\nu|^{n-1}|A_{\sigma\nu}| < \frac{1}{|g_\nu|\log|g_\nu|}|A_{\sigma\nu}| \tag{3.97}$$

im deterministischen Fall begrenzt. Damit ist aber auch der entsprechende Ausdruck für die stochastische Nullstelle beschränkt.

■

3.2.3 Die Wohlgestelltheit von stochastischen partiellen Differentialgleichungen

Damit eine stochastische partielle Differentialgleichung die zeitliche Entwicklung eines sich wohlverhaltenden physikalischen Prozesses oder eines Finanzinstrumentes am Markt wiedergibt, sollte sie einige Eigenschaften besitzen. Eine der wichtigsten ist die stetige Abhängigkeit der Lösung von den Anfangswerten. Diese besagt, dass kleine Fehler in den Anfangswerten nur zu kleinen Veränderungen der Lösungen führen. Analog zur deterministischen Begriffsbildung führen wir an dieser Stelle den Begriff der Wohlgestelltheit im quadratischen Mittel ein und zeigen, dass die von uns im Rahmen dieser Arbeit betrachteten Anfangswertprobleme diesem Begriff genügen. Dabei verwenden wir insbesondere die Fourier-Analysis, um die Wohlgestelltheit zu zeigen.

Definition 3.5. Das Anfangswertproblem für eine stochastische partielle Differentialgleichung heißt wohlgestellt im quadratischen Mittel, falls eine Konstante $C = C(t)$ existiert, so dass die Ungleichung

$$E\|v(t,\cdot)\|^2 \leq C(t)E\|v(0,\cdot)\|^2 \tag{3.98}$$

für alle Anfangswerte $v(0,\cdot)$ erfüllt ist.

Betrachten wir Gleichung (3.8), so gilt nämlich wegen der Parsevalschen Relation, vgl. (5.2), die folgende Beziehung

$$E\int_{-\infty}^{\infty}|v(t,x)|^2\,dx = E\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{v}(t,\xi)|^2\,d\xi, \tag{3.99}$$

womit man die Norm von $v(t,x)$ durch die Norm von $\hat{v}(t,\xi)$ berechnen kann. Es gilt

$$\begin{aligned} d_t\hat{v}(t,\xi) &= -a\hat{v}_x(t,\xi)dt - b\hat{v}(t,\xi)dW(t) \\ &= -ia\xi\hat{v}(t,\xi)\,dt - b\hat{v}(t,\xi)\,dW(t) \end{aligned} \tag{3.100}$$

und daraus erhält man unter Anwendung der Lösungsformel für gewöhnliche stochastische Differentialgleichungen (vgl. I.I. Gikhman und A.V. Skorohod [11]), indem man mit der Itô-Formel das Differential

$$Z(t) \;:=\; \ln\hat{v}(t,\xi) \tag{3.101}$$

bestimmt, d.h.

$$dZ(t) = \left[-ia\xi - \frac{b^2}{2}\right] dt - b\,dW(t) \tag{3.102}$$

und damit gilt

$$\hat{v}(t,\xi) = \hat{v}_0(\xi)\exp\left(\left[-ia\xi - \frac{b^2}{2}\right] t - bW(t)\right). \tag{3.103}$$

Eingesetzt in Gleichung (3.99) erhält man wegen der Unabhängigkeit von $\hat{v}_0(\xi)$ und dem Wiener-Prozeß

$$\begin{aligned} E\int_{-\infty}^{\infty} &|v(t,x)|^2\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} E|\hat{v}(0,\xi)|^2 E\left|\exp\left(\left[-ia\xi - \frac{b^2}{2}\right] t - bW(t)\right)\right|^2 d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} E|\hat{v}(0,\xi)|^2\,|\exp(-ia\xi t)|^2\,E\exp\left(-\int_0^t b^2\,ds - 2b\int_0^t dW(s)\right) d\xi \\ &\le \int_{-\infty}^{\infty} E|\hat{v}(0,\xi)|^2 E\exp\left(-\int_0^t b^2\,ds - 2b\int_0^t dW(s)\right) d\xi. \end{aligned} \tag{3.104}$$

Aus Lemma 5 in [11], Seite 250 folgt

$$E\exp\left(-2b\int_0^t dW(s)\right) \le e^{\frac{4b^2}{2}t}. \tag{3.105}$$

In diesem Fall erhält man sogar die Gleichheit, denn $X := e^{-2bW(t)} = e^Y$ ist logarithmisch normalverteilt, wobei $Y \sim N(\mu,\sigma^2)$ ist mit $\mu = 0$ und $\sigma^2 = 4b^2t$. Damit ist insbesondere $EX = e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}} = e^{2b^2t}$. Also gilt

$$\begin{aligned} E\int_{-\infty}^{\infty} |v(t,x)|^2\,dx &\le \int_{-\infty}^{\infty} E|\hat{v}(0,\xi)|^2 E\left(\exp\left(-\int_0^t b^2\,ds - 2b\int_0^t dW(s)\right)\right) d\xi \\ &\le E\int_{-\infty}^{\infty} e^{b^2t}|\hat{v}(0,\xi)|^2\,d\xi. \end{aligned} \tag{3.106}$$

Für die Fourier-Transformierte hat man dabei die folgende Darstellung gefunden

$$d_t\hat{v}(t,\xi) = q(\xi,\omega)\hat{v}(t,\xi) \quad \text{bzw.} \tag{3.107}$$

$$\hat{v}(t,\xi) = e^{q(\xi,\omega)}\hat{v}(0,\xi), \tag{3.108}$$

wobei $q(\xi,\omega) = \left[-ia\xi - \frac{b^2}{2}\right] t - bW(t)$.

Korollar 3.2. *Eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Wohlgestelltheit des Anfangswertproblems (3.107) ist, dass eine zufällige Konstante $\bar{q}$ existiert mit*

$$\Re q(\xi,\omega) \leq \bar{q}(\omega) \tag{3.109}$$

für alle reellen Werte von ξ ist.

Beweis: Angenommen die Funktion $q(\xi,\omega)$ erfüllt die Bedingung (3.109), dann folgt aus (3.108)

$$|\hat{v}(t,\xi)| = |e^{q(\xi,\omega)}||\hat{v}(0,\xi)| \leq e^{\bar{q}(\omega)}|\hat{v}(0,\xi)|, \tag{3.110}$$

womit (3.98) unter Ausnutzung der Parsevalschen Relation, vgl. (5.2), sofort folgt. Angenommen, die Bedingung (3.109) werde durch $q(\xi,\omega)$ verletzt, dann kann man durch eine geeignete Wahl von $\hat{v}(0,\xi)$ erreichen, vgl. dazu die Konstruktionen in den Beweisen von Theorem 3.5 und Theorem 3.6, dass

$$E\|v(t,\cdot)\|_2 > CE\|v(0,\cdot)\|_2, \tag{3.111}$$

und zwar für beliebig große Konstanten C, womit die Differentialgleichung nicht mehr wohlgestellt sein kann. ∎

3.2.4 Ein Konvergenzsatz

Theorem 3.7. *Es sei $v(0,x) \in C^{5,\alpha}$. Das Differenzenverfahren $L_k^n u_k^n = G_k^n$ sei konsistent im Sinne von Definition 3.1 mit $C(\Delta t,\Delta x) = \Delta t^2 \cdot \tilde{C}(\Delta t,\Delta x)$ und stabil im Sinne von Definition 3.2 und die Funktionen $A(\cdot,\cdot)$, $B(\cdot,\cdot)$ seien Lipschitz-stetig und wachstumsbeschränkt.*

Geht $\tilde{C}(\Delta t,\Delta x)$ gegen Null für Δt, $\Delta x \to 0$, so konvergiert die Folge im quadratischen Mittel, d.h. es gilt

$$\lim_{n\to\infty} E\|v(n\Delta t,k\Delta x) - u_k^n\|^2 \longrightarrow 0. \tag{3.112}$$

Verhält sich der Ausdruck $\tilde{C}(\Delta t,\Delta x)$ lediglich wie eine Konstante, so gibt es eine Folge von Zerlegungen, so dass $\left(u_k^n\right)_{k=0,\pm1,\pm2,\ldots}$ schwach gegen $v(t,x)$ in $L^2(\mathbb{R}^1\times\Omega)$ konvergiert.

Beweis: Der Beweis erfolgt analog zum Beweis von Theorem 3.4. Wir leiten zuerst eine A-priori-Abschätzung für

$$z_k^n := v(n\Delta t,k\Delta x) - u_k^n \tag{3.113}$$

her. Wir erhalten

$$\begin{aligned} z_k^{n+1} &= v(n\Delta t,k\Delta x) - \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} \left(av_x(\tau,x) + A(\tau,v(\tau,k\Delta x))\right)\,d\tau \\ &\quad - \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} B(\tau,v(\tau,k\Delta x))\,dW(\tau) - u_k^n + \tilde{a}_k(n\Delta t,u_\bullet^n) \\ &\quad + A(n\Delta t,u_k^n)\Delta t + B(n\Delta t,u_k^n)\left(W((n+1)\Delta t) - W(n\Delta t)\right), \end{aligned} \tag{3.114}$$

wobei $\tilde{a}_k(n\Delta t, u^n_\bullet)$ ein Differenzenoperator bezüglich x zur Approximation von $-av_x(t,x)$ ist.

Daraus folgt mit dem Einsetzen der Taylorentwicklung für $v_x(n\Delta t, k\Delta x)$ an der Stelle $k\Delta x$

$$\begin{aligned}
z_k^{n+1} &= z_k^n - \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} \Big(av_x(\tau, k\Delta x) + A(\tau, v(\tau, k\Delta x)) \\
&\quad - (av_x(n\Delta t, k\Delta x) + A(n\Delta t, v(n\Delta t, k\Delta x))) \Big)\, d\tau \\
&\quad - (av_x(n\Delta t, k\Delta x) + A(n\Delta t, v(n\Delta t, k\Delta x)))\, \Delta t \\
&\quad - \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} (B(\tau, v(\tau, k\Delta x)) - B(n\Delta t, v(n\Delta t, k\Delta x)))\, dW(\tau) \\
&\quad -B(n\Delta t, v(n\Delta t, k\Delta x))\, (W((n+1)\Delta t) - W(n\Delta t)) \\
&\quad +\tilde{a}_k(n\Delta t, u^n_\bullet) + A(n\Delta t, u_k^n)\Delta t + B(n\Delta t, u_k^n)\, (W((n+1)\Delta t) - W(n\Delta t)) \\
&= z_k^n - \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} \Big(av_x(\tau, k\Delta x) + A(\tau, v(\tau, k\Delta x)) \\
&\quad - (av_x(n\Delta t, k\Delta x) + A(n\Delta t, v(n\Delta t, k\Delta x))) \Big)\, d\tau \\
&\quad - (\tilde{a}_k(n\Delta t, v(n\Delta t, \bullet)) + av_{xx}(n\Delta t, (k+\vartheta)\Delta x)\, \Delta t \Delta x \\
&\quad - \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} (B(\tau, v(\tau, k\Delta x)) - B(n\Delta t, v(n\Delta t, k\Delta x)))\, dW(\tau) \\
&\quad - (A(n\Delta t, v(n\Delta t, k\Delta x) - A(n\Delta t, u_k^n))\, \Delta t \\
&\quad - (B(n\Delta t, v(n\Delta t, k\Delta x) - B(n\Delta t, u_k^n))\, (W((n+1)\Delta t) - W(n\Delta t)) - \tilde{a}_k(n\Delta t, u^n_\bullet) \\
&= z_k^n - \tilde{a}_k(n\Delta t, z(n\Delta t, \bullet)) - (A(n\Delta t, v(n\Delta t, k\Delta x) - A(n\Delta t, u_k^n))\, \Delta t \\
&\quad - (B(n\Delta t, v(n\Delta t, k\Delta x) - B(n\Delta t, u_k^n))\, (W((n+1)\Delta t) - W(n\Delta t)) + \phi_{n,k}, \qquad (3.115)
\end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}
\phi_{n,k} &= - \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} \Big(av_x(\tau, k\Delta x) + A(\tau, v(\tau, k\Delta x)) \\
&\quad - (av_x(n\Delta t, k\Delta x) + A(n\Delta t, v(n\Delta t, k\Delta x))) \Big)\, d\tau \\
&\quad -av_{xx}(n\Delta t, (k+\vartheta)\Delta t \Delta x \\
&\quad - \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} (B(\tau, v(\tau, k\Delta x)) - B(n\Delta t, v(n\Delta t, k\Delta x)))\, dW(\tau). \qquad (3.116)
\end{aligned}$$

gilt. Im quadratischen Mittel erhält man daraus

$$\begin{aligned}
&E|z_k^{n+1}|^2 \\
&= E|z_k^n - \tilde{a}_k(n\Delta t, z(n\Delta t, \bullet)) - (A(n\Delta t, v(n\Delta t, k\Delta x) - A(n\Delta t, u_k^n))\, \Delta t|^2 \\
&\quad +\Delta t E|B(n\Delta t, v(n\Delta t, k\Delta x)) - B(n\Delta t, u_k^n)|^2 + E|\phi_{n,k}|^2 \\
&\quad +2E\left[(z_k^n - \tilde{a}_k(n\Delta t, z(n\Delta t, \bullet)) - (A(n\Delta t, v(n\Delta t, k\Delta x) - A(n\Delta t, u_k^n))\, \Delta t)\, \phi_{n,k}\right] \\
&\quad +2E\left[(B(n\Delta t, v(n\Delta t, k\Delta x)) - B(n\Delta t, u_k^n))\, (W((n+1)\Delta t) - W(n\Delta t))\, \phi_{n,k}\right]. \qquad (3.117)
\end{aligned}$$

Die Lipschitz-Stetigkeit der Funktionen $A(\cdot,\cdot)$ und $B(\cdot,\cdot)$ liefert

$$\begin{aligned} & E|z_k^{n+1}|^2 \\ \leq\; & 2E|z_k^n - \tilde{a}_k(n\Delta t, z(n\Delta t,\bullet))|^2 + 2\Delta t^2 L_1^2 E|z_k^n|^2 + \Delta t L_2^2 E|z_k^n|^2 \\ & + E|\phi_{n,k}|^2 + 2E\left[\left(z_k^n - \tilde{a}_k(n\Delta t, z(n\Delta t,\bullet))\right)\phi_{n,k}\right] \\ & + 4L_1^2\Delta t^2 E|z_k^n|^2 + 4L_2^2\Delta t E|z_k^n|^2 + 8E|\phi_{n,k}|^2. \end{aligned} \tag{3.118}$$

Nimmt man nun den Summanden $\Delta t E|B(n\Delta t, z_k^n)|^2$ hinzu, addiert über alle k und multipliziert mit Δx, so erhält man

$$\begin{aligned} & \sum_{k=-\infty}^{\infty} E|z_k^{n+1}|^2\Delta x \\ = & \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Bigg[E|z_k^n - \tilde{a}_k(n\Delta t, z(n\Delta t,\bullet))|^2 + \Delta t E|B(n\Delta t, z_k^n)|^2 + 9E|\phi_{n,k}|^2 \\ & + 2E\left[\left(z_k^n - \tilde{a}_k(n\Delta t, z(n\Delta t,\bullet))\right)\phi_{n,k}\right] + (6L_1^2\Delta t^2 + 6L_2^2\Delta t)E|z_k^n|^2 \Bigg]\Delta x. \end{aligned} \tag{3.119}$$

Wir setzen $C_0\Delta t \geq (6L_1^2\Delta t + 6L_2^2)\Delta t$. Die vorausgesetzte Stabilität des Verfahrens im quadratischen Mittel sichert nun, dass für die beiden ersten Summanden von (3.119)

$$\begin{aligned} & \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[E|z_k^n - \tilde{a}_k(n\Delta t, z(n\Delta t,\bullet))|^2 + \Delta t E|B(n\Delta t, z_k^n)|^2\right]\Delta x \\ & \qquad \leq (1 + C_1\Delta t)E\|z_\bullet^n\|_{2,\Delta x}^2 \end{aligned} \tag{3.120}$$

gilt. Entsprechend sichert die vorausgesetzte spezielle Konsistenz des Verfahrens, dass die Abschätzung

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} E|\phi_{n,k}|^2\Delta x \;\leq\; \Delta t^2 \tilde{C}(\Delta t, \Delta x) \tag{3.121}$$

erfüllt ist. Für den vorletzten Summanden von (3.119) gilt mit der Cauchy-Schwarzschen-Ungleichung

$$\begin{aligned} & \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2E\left[\left(z_k^n - \tilde{a}_k(n\Delta t, z(n\Delta t,\bullet))\right)\phi_{n,k}\right]\frac{\sqrt{\Delta t}}{\sqrt{\Delta t}} \\ \leq\; & 4\sum_{k=-\infty}^{\infty} E\left|z_k^n - \tilde{a}_k(n\Delta t, z(n\Delta t,\bullet))\right|^2 \Delta t\Delta x + C_2\Delta t\tilde{C}(\Delta t,\Delta x) \\ =\; & C_3\Delta t E\|z_\bullet^n\|_{2,\Delta x}^2 + C_2\Delta t\tilde{C}(\Delta t,\Delta x). \end{aligned} \tag{3.122}$$

Damit hat man erhalten, dass

$$\begin{aligned} E\|z_\bullet^{n+1}\|_{2,\Delta x}^2 \;\leq\; & E\|z_\bullet^n\|_{2\Delta x}^2 + E\|z_\bullet^n\|_{2\Delta x}^2\Delta t(C_0 + C_1 + C_3) \\ & + \Delta t^2\tilde{C}(\Delta t,\Delta x) + \Delta t C_2\tilde{C}(\Delta t,\Delta x) \\ =\; & E\|z_\bullet^n\|_{2\Delta x}^2 + C_4\Delta t E\|z_\bullet^n\|_{2\Delta x}^2 + C_5\Delta t\tilde{C}(\Delta t,\Delta x) \end{aligned} \tag{3.123}$$

für alle n gilt. Nun sei $m < n$, dann gilt natürlich Beziehung (3.123) auch für $E\|z_\bullet^{m+1}\|^2_{2,\Delta x}$. Durch Summation ergibt sich unter Beachtung von $\|z_\bullet^0\| = 0$ und $(n+1)\Delta t = t$

$$E\|z_\bullet^{n+1}\|^2_{2,\Delta x} \leq C_4 \Delta t \sum_{m=0}^{n} E\|z_\bullet^m\|^2_{2,\Delta x} + n\Delta t C_5 \tilde{C}(\Delta t, \Delta x). \tag{3.124}$$

Dann folgt aus dem Gronwallschen Lemma, dass eine Konstante C_6 existiert, so dass

$$E\|z_\bullet^{n+1}\|^2_{2,\Delta x} \leq C_6 \tilde{C}(\Delta t, \Delta x) \tag{3.125}$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt. Damit ist der Satz bewiesen, wenn $\tilde{C}(\Delta t, \Delta x)$ gegen Null geht für Δt,$\Delta x \to 0$.

Für den Fall, daß $\tilde{C}$ nur eine Konstante ist, kann man den Beweis folgendermassen fortführen. Analog zum Lemma 3.1 erhalten wir für jedes $n \in \mathbb{N}$, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} E|z^n(t,x)|^2 \, dx \leq C \tag{3.126}$$

gilt. Dann existiert nach dem Satz von Riesz eine Teilfolge $(n_j) \subset (n)$, so dass (z^{n_j}) in $L^2(\mathbb{R}^1 \times \Omega)$ schwach konvergiert. Lemma 3.2 liefert dann, dass der schwache Grenzwert dieser Folge P-f.s. und für L-fast alle x und t gleich Null ist. Damit ist der Satz bewiesen.

■

Wir betrachten nun ein weiteres Beispiel. Wir zeigen, dass die Bedingung (3.18) für folgende Version des Lax-Friedrichs-Schemas

$$u_k^{n+1} = u_k^n - \frac{a\Delta t}{2\Delta x}(u_{k+1}^n - u_{k-1}^n) - b u_k^n (W((n+1)\Delta t) - W(n\Delta t)) \tag{3.127}$$

erfüllt ist.

Korollar 3.3. *Es sei $v(0,\cdot) \in C^{5,\alpha}$. Die Version (3.127) des Lax-Friedrichs-Schemas ist konsistent im Sinne von Definition 3.1.*

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned} & v((n+1)\Delta t, k\Delta x) \\ &= v(n\Delta t, k\Delta x) - a v_x(n\Delta t, k\Delta x)\Delta t - b v(n\Delta t, k\Delta x)\,(W((n+1)\Delta t) - W(n\Delta t)) \\ &\quad - a \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} (v_x(\tau, k\Delta x) - v_x(n\Delta t, k\Delta x))\, d\tau \\ &\quad - b \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} (v(\tau, k\Delta x) - v(n\Delta t, k\Delta x))\, dW(\tau). \end{aligned} \tag{3.128}$$

Durch die Taylorentwicklung von $v_x(n\Delta t, k\Delta x)$ an der Stelle $k\Delta x$ erhält man weiterhin

$$\begin{aligned}
&v((n+1)\Delta t, k\Delta x) \\
&\quad= v(n\Delta t, k\Delta x) - \frac{a\Delta t}{2\Delta x}\left(v(n\Delta t,(k+1)\Delta x) - v(n\Delta t,(k-1)\Delta x)\right) \\
&\qquad -bv(n\Delta t, k\Delta x)\left(W((n+1)\Delta t) - W(n\Delta t)\right) - v_{xx}(n\Delta t,(k+\vartheta)\Delta x)\Delta t\Delta x \\
&\qquad -a\int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t}\left(v_x(\tau, k\Delta x) - v_x(n\Delta t, k\Delta x)\right)\,d\tau \\
&\qquad -b\int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t}\left(v(\tau, k\Delta x) - v(n\Delta t, k\Delta x)\right)\,dW(\tau),
\end{aligned} \tag{3.129}$$

wobei ϑ eine Zufallsgröße mit $-1 < \vartheta < 1$ ist. Folglich gilt mit der Schwarzschen Ungleichung und den Eigenschaften des Itô-Integrales

$$\begin{aligned}
&E\left|v((n+1)\Delta t, k\Delta x) - v(n\Delta t, k\Delta x) + \frac{a\Delta t}{2\Delta x}\left(v(n\Delta t,(k+1)\Delta x) - v(n\Delta t,(k-1)\Delta x)\right)\right. \\
&\qquad\left. + bv(n\Delta t, k\Delta x)\left(W((n+1)\Delta t) - W(n\Delta t)\right)\right|^2 \\
&\le 4Ev_{xx}^2(n\Delta t,(k+\vartheta)\Delta x)\Delta t^2\Delta x^2 + 4a^2\Delta t\int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} E\left|v_x(\tau, k\Delta x) - v_x(n\Delta t, k\Delta x)\right|^2\,d\tau \\
&\qquad +4b^2\int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} E\left|v(\tau, k\Delta x) - v(n\Delta t, k\Delta x)\right|^2\,d\tau.
\end{aligned} \tag{3.130}$$

Die rechte Seite der Ungleichung entspricht nun der rechten Seite der Ungleichung (3.34) und läßt sich demnach wie in Theorem 3.3 durch den gleichen Term $C(\Delta t^2, \Delta x^2)$ abschätzen.

■

3.3 Weitere hyperbolische stochastische Differentialgleichungen

3.3.1 Eindimensionale Ortskoordinaten

In diesem Abschnitt werden Differenzenschemata vorgestellt, die weitere stochastische partielle Differentialgleichungen approximieren. Um auch für diese Schemata die entsprechenden Aussagen über Konvergenz, Stabilität und Konsistenz zu formulieren, sind zusätzliche Voraussetzungen nötig.

Lösungen von Differentialgleichungen des Typs

$$v(t,x) - v(0,x) + a\int_0^t v_x(s,x)\,ds + b\int_0^t v_x(s,x)\,dW(s) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^1 \tag{3.131}$$

können durch entsprechende Varianten des Lax-Friedrich-Schemas

$$\begin{aligned}
u_k^{n+1} &= \frac{1}{2}(u_{k+1}^n + u_{k-1}^n) - \frac{a\Delta t}{2\Delta x}(u_{k+1}^n - u_{k-1}^n) \\
&\quad -\frac{b}{2\Delta x}(u_{k+1}^n - u_{k-1}^n)(W((n+1)\Delta t) - W(n\Delta t))
\end{aligned} \tag{3.132}$$

oder entsprechend angepaßte Varianten des FTFS-Schemas

$$\begin{aligned} u_k^{n+1} &= (1+a\frac{\Delta t}{\Delta x})u_k^n - a\frac{\Delta t}{\Delta x}u_{k+1}^n \\ &\quad -\frac{b}{\Delta x}(u_{k+1}^n - u_k^n)(W((n+1)\Delta t) - W(n\Delta t)) \end{aligned} \tag{3.133}$$

approximiert werden. Die Existenz und Eindeutigkeit des Lösungsprozesses von (3.131) ist wegen Theorem 2.1 gesichert. Der Lösungsprozeß

$$\begin{aligned} v(t,x) - v(0,x) + a\int_0^t v_x(s,x)ds + \int_0^t F(v(s,x), v_x(s,x))\,ds& \\ + \int_0^t G(v(s,x), v_x(s,x))\,dW(s) &= 0, \end{aligned} \tag{3.134}$$

wobei F, G Lipschitz-stetige Funktionen in v, v_x sind, kann durch

$$\begin{aligned} u_k^{n+1} &= (1+a\frac{\Delta t}{\Delta x})u_k^n - a\frac{\Delta t}{\Delta x}u_{k+1}^n - \Delta t F(u_k^n, \frac{u_{k+1}^n - u_k^n}{\Delta x}) \\ &\quad -G(u_k^n, \frac{u_{k+1}^n - u_k^n}{\Delta x})(W((n+1)\Delta t) - W(n\Delta t)) \end{aligned} \tag{3.135}$$

approximiert werden. Theorem 2.1 sichert hier Existenz und Eindeutigkeit der Lösung von (3.134).

Theorem 3.8. *Die Differenzengleichung (3.132) mit $(n+1)\Delta t = t$, $-1 \le a\frac{\Delta t}{\Delta x} =: R \le 1$ und $\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \le \frac{1}{n}$ ist stabil im quadratischen Mittel bezüglich der $\|\cdot\|_\infty$-Norm mit $K = 1$ und $\beta = b^2$.*

Beweis: Aus (3.132) ergibt sich

$$\begin{aligned} E|u_k^{n+1}|^2 &= E|\frac{1}{2}(u_{k+1}^n + u_{k-1}^n) - \frac{R}{2}(u_{k+1}^n - u_{k-1}^n)|^2 + \frac{b^2\Delta t}{4\Delta x^2}E|u_{k+1}^n - u_{k-1}^n|^2 \\ &= \frac{1}{4}\left[(1-R)^2E|u_{k+1}^n|^2 + 2(1-R^2)E[u_{k+1}^n u_{k-1}^n]\right. \\ &\quad \left.+(1+R)^2E|u_{k-1}^n|^2\right] + \frac{b^2\Delta t}{4\Delta x^2}E|u_{k+1}^n - u_{k-1}^n|^2 \\ &\le \frac{1}{4}\left([(1-R)+(1+R)]^2\sup_k E|u_k^n|^2\right) + \frac{b^2\Delta t}{\Delta x^2}\sup_k E|u_k^n|^2 \\ &\le \left\{1 + \frac{b^2\Delta t}{\Delta x^2}\right\}\sup_k E|u_k^n|^2 \le \left\{1+\frac{b^2}{n}\right\}\sup_k E|u_k^n|^2 \end{aligned} \tag{3.136}$$

und folglich

$$\sup_k E|u_k^{n+1}|^2 \le \left\{1+\frac{b^2}{n}\right\}\sup_k E|u_k^n|^2 \le \left\{1+\frac{b^2}{n}\right\}^{n+1}\sup_k E|u_k^0|^2. \tag{3.137}$$

Deshalb gilt

$$\|u^{n+1}\|_\infty \le [1+\frac{b^2}{n}]^{\frac{n+1}{2}}\|u^0\|_\infty \le e^{b^2}\|u^0\|_\infty. \tag{3.138}$$

■

Entsprechend erhält man auch

Theorem 3.9. *Das Differenzenschema (3.133), das Gleichung (3.131) approximiert, mit* $(n+1)\Delta t = t$, $-1 \leq a\frac{\Delta t}{\Delta x} =: R \leq 0$ *und* $\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{n}$ *ist stabil im quadratischen Mittel bezüglich der* $\|\cdot\|_{2,\Delta x}$*-Norm mit* $K = 1$ *und* $\beta = 4b^2$.

Beweis: Wendet man $E|\cdot|^2$ auf (3.133) an und beachtet die Unabhänigikeit der Wiener-Prozeß-Zuwächse, so ergibt sich

$$\begin{aligned} E|u_k^{n+1}|^2 &= E|(1+a\frac{\Delta t}{\Delta x})u_k^n - a\frac{\Delta t}{\Delta x}u_{k+1}^n \\ &\quad -\frac{b}{\Delta x}(u_{k+1}^n - u_k^n)(W((n+1)\Delta t) - W(n\Delta t))|^2 \\ &= E|(1+R)u_k^n - Ru_{k+1}^n|^2 + \frac{b^2\Delta t}{\Delta x^2}E|u_{k+1}^n - u_k^n|^2. \end{aligned} \tag{3.139}$$

Addiert man über alle k, so liefert eine einfache Rechnung

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{\infty} E|u_k^{n+1}|^2\Delta x &\leq (|1+R|+|R|)^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} E|u_k^n|^2\Delta x + \frac{4b^2\Delta t}{\Delta x^2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} E|u_k^n|^2\Delta x \\ &\leq \big((|1+R|+|R|)^2 + \frac{4b^2}{n}\big)\sum_{k=-\infty}^{\infty} E|u_k^n|^2\Delta x \\ &\leq \big(1+\frac{4b^2}{n}\big)\sum_{k=-\infty}^{\infty} E|u_k^n|^2\Delta x \\ &\leq \big(1+\frac{4b^2}{n}\big)^n\sum_{k=-\infty}^{\infty} E|u_k^0|^2\Delta x \\ &\leq e^{4b^2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} E|u_k^0|^2\Delta x. \end{aligned} \tag{3.140}$$

■

Theorem 3.10. *Das Differenzenschema (3.135), das die Gleichung (3.134) approximiert, ist stabil im quadratischen Mittel bezüglich der* $\|\cdot\|_{2,\Delta x}$*-Norm mit* $(n+1)\Delta t = t$, $\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{n}$, $\overline{\Delta x_0} = 1$, *wenn* F *und* G *die folgenden Bedingungen erfüllen.*

$$\begin{aligned} |F(t,x,y,z)| &\leq C_1\{|y|+|z|\} \\ |G(t,x,y,z)| &\leq C_2\{|y|+|z|\}, \end{aligned} \tag{3.141}$$

$$\begin{aligned} |F(t,x,y,z) - F(t,x,u,v)| &\leq C_3\{|y-u|+|z-v|\} \\ |G(t,x,y,z) - G(t,x,u,v)| &\leq C_4\{|y-u|+|z-v|\} \end{aligned} \tag{3.142}$$

für alle $x, y, u, v \in \mathbb{R}^1$, $t \geq 0$.

Beweis: Aus (3.135) folgt

$$\begin{aligned} E \mid u_k^{n+1} \mid^2 &= E \mid (1 + a\frac{\Delta t}{\Delta x})u_k^n - a\frac{\Delta t}{\Delta x}u_{k+1}^n - \Delta t F(u_k^n, \frac{u_{k+1}^n - u_k^n}{\Delta x}) \mid^2 \\ &\quad + \Delta t E \mid G(u_k^n, \frac{u_{k+1}^n - u_k^n}{\Delta x}) \mid^2 . \end{aligned} \tag{3.143}$$

Mit (3.141) ergibt sich unter Beachtung von $\Delta t \leq \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$

$$\begin{aligned} E|u_k^{n+1}|^2 &\leq E|(1+R)u_k^n - Ru_{k+1}^n + C_1\Delta t\Big(|u_k^n| + \frac{|u_{k+1}^n - u_k^n|}{\Delta x}\Big) |^2 \\ &\quad + C_2\Delta t E\Big| \mid u_k^n \mid + \frac{\mid u_{k+1}^n - u_k^n \mid}{\Delta x}\Big|^2 \\ &\leq E|(1+R)u_k^n - Ru_{k+1}^n|^2 + \frac{\Delta t}{\Delta x^2}(\tilde{C}_1 E|u_k^n|^2 + \tilde{C}_2 E|u_{k+1}^n|^2). \end{aligned} \tag{3.144}$$

Addiert man nun wieder über alle k auf und ordnet die Reihen entsprechend, so folgt die Stabilität aus

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} E|u_k^{n+1}|^2\Delta x \leq \Big((|1+R| + |R|)^2 + \frac{\tilde{C}_3}{n}\Big) \sum_{k=-\infty}^{\infty} E|u_k^n|^2\Delta x. \tag{3.145}$$

■

Bemerkung 3.7. Die Konsistenz beider Schemata läßt sich in analoger Weise zur Konsistenz des sFTFS-Schemas zeigen. Die Anwendungen der Fouriertransformation in der Stabilitätsanalyse führen im nichtlinearen Fall aber nicht mehr zum Ziel. Die Existenz einer schwach konvergierenden Teilfolge ergibt sich aus Theorem 3.7.

3.3.2 Differenzenschemata mit zwei und mehr Raumvariablen

Entsprechend der Ausführungen für den eindimensionalen Raumfall kann man die Theorie auch auf den zweidimensionalen bzw. allgemein vektorwertigen Fall ausweiten.

Wir betrachten die folgende Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} v(t,x,y) - v(0,x,y) &+ a_1 \int_0^t v_x(s,x,y)\,ds \\ &+ a_2 \int_0^t v_y(s,x,y)\,ds + b\int_0^t v(s,x,y)\,dW(s) = 0 \end{aligned} \tag{3.146}$$

mit der Anfangswertfunktion

$$v(0,x,y) = f(x,y), \quad f \in L^2(\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1), \tag{3.147}$$

wobei die Lösung im Sinne von Definition 2.8 zu verstehen ist.

Die Vorgehensweise für höhere Dimensionen ist ähnlich dem eindimensionalen Fall, bringt naturgemäß aber einen höheren Aufwand mit sich. Beispielsweise ergibt sich für (3.146) eine zweidimensionale Version des sFTFS-Schemas

$$\begin{aligned} u_{j,k}^{n+1} &= u_{j,k}^n - \frac{a_1\Delta t}{\Delta x}(u_{j+1,k}^n - u_{j,k}^n) - \frac{a_2\Delta t}{\Delta y}(u_{j,k+1}^n - u_{j,k}^n) \\ &\quad - bu_{j,k}^n(W((n+1)\Delta t) - W(n\Delta t)). \end{aligned} \tag{3.148}$$

$u^n_{j,k}$ bezeichne dabei die Approximation im Punkt $(n\Delta t, j\Delta x, k\Delta y)$ oder im Gitterpunkt (n, j, k). Dabei werden die folgenden Anfangswerte für das Differenzenverfahren in analoger Weise zum eindimensionalen Fall gewählt:

$$u^0_{j,k} = f(j\Delta x, k\Delta y) = v^0_{j,k} \tag{3.149}$$

gewählt. Exemplarisch wird hier die Stabilität und Konsistenz des Schemas (3.148) gezeigt.

Theorem 3.11. *Das zweidimensionale sFTFS-Schema mit $(n+1)\Delta t = t$ und $-1 \le R_x + R_y \le 0$, wobei $R_x := a_1 \frac{\Delta t}{\Delta x}$ und $R_y := a_2 \frac{\Delta t}{\Delta y}$, R_x, $R_y \le 0$, ist stabil im quadratischen Mittel bezüglich der $\|\cdot\|_{2,\Delta x,\Delta y}$-Norm, definiert durch $\|u_{j,k}\|_{2,\Delta x,\Delta y} := \sqrt[2]{\sum_{j,k=-\infty}^{+\infty} |u_{j,k}|^2 \Delta x \Delta y}$.*

Beweis: Wendet man $E|\cdot|^2$ auf das zweidimensonale sFTFS (3.148) an und beachtet die Unabhängigkeit der Zuwächse des Wiener-Prozesses, so erhält man

$$\begin{aligned} E|u^{n+1}_{j,k}|^2 &= E|u^n_{j,k} - R_x(u^n_{j+1,k} - u^n_{j,k}) \\ &\quad - R_y(u^n_{j,k+1} - u^n_{j,k}) - bu^n_{j,k}(W((n+1)\Delta t) - W(n\Delta t))|^2 \\ &= E|(1 + R_x + R_y)u^n_{j,k} - (R_x u^n_{j+1,k} + R_y u^n_{j,k+1})|^2 + b^2 \Delta t E|u^n_{j,k}|^2. \end{aligned}$$

Mittels Rekursion erhält man dann auch $\sum_{j,k=-\infty}^{\infty} E|u^n_{j,k}|^2 \Delta x \Delta y < \infty$. Addiert man nun über alle j und k und schätzt das Binom ab, so erhält man

$$\begin{aligned} &\sum_{j,k=-\infty}^{+\infty} E|u^{n+1}_{j,k}|^2 \Delta x \Delta y \\ &= \sum_{j,k=-\infty}^{+\infty} \left[E|(1 + R_x + R_y)u^n_{j,k} - (R_x u^n_{j+1,k} + R_y u^n_{j,k+1})|^2 + b^2 \Delta t E|u^n_{j,k}|^2\right] \Delta x \Delta y \\ &\le \sum_{j,k=-\infty}^{+\infty} \Big[\big(|1 + R_x + R_y|^2 E|u^n_{j,k}|^2 \; - 2(1 + R_x + R_y)(R_x E(u^n_{j,k} u^n_{j+1,k}) \\ &\quad + R_y E(u^n_{j,k} u^n_{j,k+1})) + E|R_x u^n_{j+1,k} + R_y u^n_{j,k+1}|^2\big) + b^2 \Delta t E|u^n_{j,k}|^2\Big] \Delta x \Delta y. \end{aligned}$$

Ordnet man diese Reihe geschickt um, so erhält man

$$\begin{aligned} &\sum_{j,k=-\infty}^{+\infty} E|u^{n+1}_{j,k}|^2 \Delta x \Delta y \\ &\le \sum_{j,k=-\infty}^{+\infty} \Big[\big(|1 + R_x + R_y|^2 E|u^n_{j,k}|^2 - 2(1 + R_x + R_y)(R_x + R_y)E(u^n_{j,k} u^n_{j+1,k}) \\ &\quad + E|R_x u^n_{j+1,k} + R_y u^n_{j,k+1}|^2 + b^2 \Delta t E|u^n_{j,k}|^2\Big] \Delta x \Delta y \\ &\le \sum_{j,k=-\infty}^{+\infty} \Big[\big(|1 + R_x + R_y|^2 E|u^n_{j,k}|^2 - 2(1 + R_x + R_y)(R_x + R_y)E(u^n_{j,k} u^n_{j+1,k}) \\ &\quad + |R_x|^2 E|u^n_{j+1,k}|^2 + 2|R_x R_y| E|u^n_{j,k+1} u^n_{j+1,k}| + |R_y|^2 E|u^n_{j,k+1}|^2 \\ &\quad + b^2 \Delta t E|u^n_{j,k}|^2\Big] \Delta x \Delta y. \end{aligned}$$

Schätzt man hier das gemischte Glied mit der binomischen Formel ab und ordnet die Reihe nun noch einmal um, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
&\sum_{j,k=-\infty}^{+\infty} E|u_{j,k}^{n+1}|^2 \Delta x \Delta y \\
\leq &\sum_{j,k=-\infty}^{+\infty} \big[\big(|1+R_x+R_y|^2 E|u_{j,k}^n|^2 - 2(1+R_x+R_y)(R_x+R_y)E|u_{j,k}^n|^2 \\
&+|R_x|^2 E|u_{j,k}^n|^2 + 2|R_xR_y|E|u_{j,k}^n|^2 + |R_y|^2 E|u_{j,k}^n|^2 + b^2\Delta t E|u_{j,k}^n|^2\big] \Delta x \Delta y \\
\leq &\sum_{j,k=-\infty}^{+\infty} \big[\big(|1+R_x+R_y|^2 E|u_{j,k}^n|^2 + 2|1+R_x+R_y||R_x+R_y|E|u_{j,k}^n|^2 \\
&+|R_x|^2 E|u_{j,k}^n|^2 + 2|R_xR_y|E|u_{j,k}^n|^2 + |R_y|^2 E|u_{j,k}^n|^2 + b^2\Delta t E|u_{j,k}^n|^2\big] \Delta x \Delta y \\
\leq &\sum_{j,k=-\infty}^{+\infty} \big[(|1+R_x+R_y| + |R_x+R_y|)^2 + b^2\Delta t\big] E|u_{j,k}^n|^2 \Delta x \Delta y. \qquad (3.150)
\end{aligned}$$

Nun braucht man nur noch die Voraussetzungen an R_x, R_y wie in den anderen Stabilitätsbeweisen auszunutzen, vergleiche den Beweis von Theorem 3.1.

■

Theorem 3.12. *Es sei $v(0,\cdot,\cdot) \in C^{5,\alpha}$. Das Schema (3.148) ist konsistent im Sinne von Definition 3.1.*

Beweis: Offensichtlich gilt

$$\begin{aligned}
&v((n+1)\Delta t, j\Delta x, k\Delta y) \\
= \;& v(n\Delta t, j\Delta x, k\Delta y) - a_1 \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} v_x(\tau, j\Delta x, k\Delta y)\, d\tau \\
&-a_2 \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} v_y(\tau, j\Delta x, k\Delta y)\, d\tau - b \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} v(\tau, j\Delta x, k\Delta y)\, dW(\tau) \\
= \;& v(n\Delta t, j\Delta x, k\Delta y) - a_1 v_x(n\Delta t, j\Delta x, k\Delta y)\Delta t - a_2 v_y(n\Delta t, j\Delta x, k\Delta y)\Delta t \\
&-bv(n\Delta t, j\Delta x, k\Delta y)\,(W((n+1)\Delta t) - W(n\Delta t)) \\
&-a_1 \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} (v_x(\tau, j\Delta x, k\Delta y) - v_x(n\Delta t, j\Delta x, k\Delta y))\, d\tau \\
&-a_2 \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} (v_y(\tau, j\Delta x, k\Delta y) - v_y(n\Delta t, j\Delta x, k\Delta y))\, d\tau \\
&-b \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} (v(\tau, j\Delta x, k\Delta y) - v(n\Delta t, j\Delta x, k\Delta y))\, dW(\tau). \qquad (3.151)
\end{aligned}$$

Da wegen Theorem 2.1 $v(t,x,y)$ bezüglich x dreimal stetig differenzierbar ist, gilt für $\tilde{v}(t,x,y) := v_{xx}(t,x,y)$

$$\begin{aligned}
&\tilde{v}(t,x,y) - v_{xx}(0,x,y) - a_1 \int_0^t \tilde{v}_x(\tau,x,y)\, d\tau \\
&-a_2 \int_0^t \tilde{v}_y(\tau,x,y)\, d\tau - b \int_0^t \tilde{v}(\tau,x,y)\, dW(\tau) = 0 \qquad (3.152)
\end{aligned}$$

und wegen Theorem 2.3 gilt

$$C_1 := \sup_{t\in[0,T]} \int_{\mathbb{R}^1} E|\tilde{v}(t,x,y)|^2 \, dx < +\infty. \tag{3.153}$$

Entsprechend erhält man auch

$$C_2 := \sup_{t\in[0,T]} \int_{\mathbb{R}^1} E|v_{yy}(t,x,y)|^2 \, dx < +\infty. \tag{3.154}$$

Durch die Taylorentwicklung von $v_x(n\Delta t, j\Delta x, k\Delta y)$ an der Stelle $j\Delta x$ und von $v_y(n\Delta t, j\Delta x, k\Delta y)$ an der Stelle $k\Delta y$ erhält man weiterhin

$$\begin{aligned}
&v((n+1)\Delta t, j\Delta x, k\Delta y) \\
&= \; v(n\Delta t, j\Delta x, k\Delta y) - \frac{a_1\Delta t}{\Delta x}\left(v(n\Delta t,(j+1)\Delta x, k\Delta y) - v(n\Delta t, j\Delta x, k\Delta y)\right) \\
&\quad -\frac{a_2\Delta t}{\Delta x}\left(v(n\Delta t, j\Delta x,(k+1)\Delta y) - v(n\Delta t, j\Delta x, k\Delta y)\right) \\
&\quad -bv(n\Delta t, j\Delta x, k\Delta y)\left(W((n+1)\Delta t) - W(n\Delta t)\right) \\
&\quad -v_{xx}(n\Delta t,(j+\vartheta_1)\Delta x, k\Delta y)\Delta t\Delta x - v_{yy}(n\Delta t, j\Delta x,(k+\vartheta_2)\Delta y)\Delta t\Delta y \\
&\quad -a_1\int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t}\left(v_x(\tau, j\Delta x, k\Delta y) - v_x(n\Delta t, j\Delta x, k\Delta y)\right) d\tau \\
&\quad -a_2\int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t}\left(v_y(\tau, j\Delta x, k\Delta y) - v_y(n\Delta t, j\Delta x, k\Delta y)\right) d\tau \\
&\quad -b\int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t}\left(v(\tau, j\Delta x, k\Delta y) - v(n\Delta t, j\Delta x, k\Delta y)\right) dW(\tau),
\end{aligned} \tag{3.155}$$

wobei ϑ_i, $i = 1, 2$, Zufallsgrößen mit $0 < \vartheta_i < 1$ sind. Folglich gilt mit der Schwarzschen Ungleichung und den Eigenschaften des Itô-Integrales

$$\begin{aligned}
&E\Big| v((n+1)\Delta t, j\Delta x, k\Delta y) - v(n\Delta t, j\Delta x, k\Delta y) \\
&\quad +\frac{a_1\Delta t}{\Delta x}\left(v(n\Delta t,(j+1)\Delta x, k\Delta y) - v(n\Delta t, j\Delta x, k\Delta y)\right) \\
&\quad +\frac{a_2\Delta t}{\Delta y}\left(v(n\Delta t, j\Delta x,(k+1)\Delta y) - v(n\Delta t, j\Delta x, k\Delta y)\right) \\
&\quad + bv(n\Delta t, j\Delta x, k\Delta y)\left(W((n+1)\Delta t) - W(n\Delta t)\right)\Big|^2 \\
&\leq \; C_3 E v_{xx}^2(n\Delta t,(j+\vartheta_1)\Delta x, k\Delta y)\Delta t^2\Delta x^2 + C_3 E v_{yy}^2(n\Delta t, j\Delta x,(k+\vartheta_2)\Delta y)\Delta t^2\Delta y^2 \\
&\quad +C_3 a_1^2\Delta t\int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} E\left|v_x(\tau, j\Delta x, k\Delta y) - v_x(n\Delta t, j\Delta x, k\Delta y)\right|^2 \, d\tau \\
&\quad +C_3 a_2^2\Delta t\int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} E\left|v_y(\tau, j\Delta x, k\Delta y) - v_y(n\Delta t, j\Delta x, k\Delta y)\right|^2 \, d\tau \\
&\quad +C_3 b^2\int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} E\left|v(\tau, j\Delta x, k\Delta y) - v(n\Delta t, j\Delta x, k\Delta y)\right|^2 \, d\tau.
\end{aligned} \tag{3.156}$$

Wegen (3.153) und (3.154) erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\sum_{j,k=-\infty}^{\infty} \left(Ev_{xx}^2(n\Delta t,(k+\vartheta_1)\Delta x, j\Delta y)\Delta t^2\Delta x^2\right)\Delta x\Delta y\cdot\Delta t^2\Delta x^2 \\
&+\sum_{j,k=-\infty}^{\infty} \left(Ev_{yy}^2(n\Delta t,k\Delta x,(j+\vartheta_2)\Delta y)\Delta t^2\Delta y^2\right)\Delta x\Delta y\cdot\Delta t^2\Delta x^2 \\
&\qquad\qquad\qquad \le C_4\Delta t^2(\Delta x^2+\Delta y^2),
\end{aligned} \tag{3.157}$$

wobei $C_4 = \max\{C_1, C_2\}$. Nach der Integraldefinition gilt, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein hinreichend kleines Δx gibt, so dass

$$\begin{aligned}
&\sum_{j,k=-\infty}^{\infty} \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} E\left|v_x(\tau, j\Delta x, k\Delta y) - v_x(n\Delta t, j\Delta x, k\Delta y)\right|^2 \, d\tau\Delta x\Delta y \\
&\le \quad \varepsilon + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} E\left|v_x(\tau,x,y) - v_x(n\Delta t,x,y)\right|^2 \, d\tau\, dx\, dy.
\end{aligned} \tag{3.158}$$

Da $\varepsilon > 0$ eine beliebig kleine positive Zahl ist, kann ε auch als Δt^2 gewählt werden. Aus einem zweidimensionalen Analogon von Theorem 2.6 folgt dann wegen

$$\begin{aligned}
v_x(t,x) \quad &= \quad v_x(0,x,y) + a_1\int_0^t v_{xx}(\tau,x,y)\, d\tau + a_2\int_0^t v_{xy}(\tau,x,y)\, d\tau \\
&\quad +b\int_0^t v_x(t,x,y)\, dW(\tau),
\end{aligned} \tag{3.159}$$

dass

$$\sum_{j,k=-\infty}^{\infty} \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} E\left|v_x(\tau, j\Delta x, k\Delta y) - v_x(n\Delta t, j\Delta x, k\Delta y)\right|^2 \, d\tau\Delta x\Delta y \le \Delta t^2 + C_5\Delta t^2 \tag{3.160}$$

gilt. Entsprechend erhält man auch

$$\sum_{j,k=-\infty}^{\infty} \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} E\left|v_y(\tau, j\Delta x, k\Delta y) - v_y(n\Delta t, j\Delta x, k\Delta y)\right|^2 \, d\tau\Delta x\Delta y \le \Delta t^2 + C_6\Delta t^2. \tag{3.161}$$

Mit analogen Überlegungen erhalten wir zunächst

$$\begin{aligned}
&\sum_{j,k=-\infty}^{\infty} \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} E\left|v(\tau, j\Delta x, k\Delta y) - v(n\Delta t, j\Delta x, k\Delta y)\right|^2 \, d\tau\Delta x\Delta y \\
&\le \quad \Delta t^2 + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} E\left|v(\tau,x,y) - v(n\Delta t,x,y)\right|^2 \, d\tau\, dx\, dy.
\end{aligned} \tag{3.162}$$

Theorem 2.6 liefert dann

$$\sum_{j,k=-\infty}^{\infty} \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} E\left|v(\tau, j\Delta x, k\Delta y) - v(n\Delta t, j\Delta x, k\Delta y)\right|^2 \, d\tau\Delta x\Delta y \le \Delta t^2 + C_7\Delta t^2. \tag{3.163}$$

Mit (3.157), (3.160), (3.161), (3.163) folgt schließlich aus (3.156)

$$
\begin{aligned}
& E \Big| v((n+1)\Delta t, j\Delta x, k\Delta y) - v(n\Delta t, j\Delta x, k\Delta y) \\
& \qquad + \frac{a_1 \Delta t}{\Delta x} \left(v(n\Delta t, (j+1)\Delta x, k\Delta y) - v(n\Delta t, j\Delta x, k\Delta y) \right) \\
& \qquad + \frac{a_2 \Delta t}{\Delta y} \left(v(n\Delta t, j\Delta x, (k+1)\Delta y) - v(n\Delta t, j\Delta x, k\Delta y) \right) \\
& \qquad + b v(n\Delta t, j\Delta x, k\Delta y) \left(W((n+1)\Delta t) - W(n\Delta t) \right) \Big|^2 \\
\leq \; & C_8 \left(\Delta t^2 \Delta x^2 + \Delta t^2 \Delta y^2 + \Delta t^2 + \Delta t^3 \right) \cdot C_9 \\
\leq \; & C_{10} \left(\Delta t^2 \Delta x^2 + \Delta t^2 \Delta y^2 + \Delta t^2 + \Delta t^3 \right) \\
=: \; & C(\Delta t^2, \Delta x^2, \Delta y^2),
\end{aligned}
\tag{3.164}
$$

wobei $C_8 := \max\{1, \max_{\{i:i=1,\ldots,7\}}\{C_i\}\}$, $C_9 := \max\{1, a_1^2, a_2^2, b^2\}$ und $C_{10} = C_9 \cdot C_8$ ist.

$C(\Delta t^2, \Delta x^2, \Delta y^2)$ erfüllt offenbar die geforderten Bedingungen.

■