4. Stochastische Anfangs- und Randwertprobleme

In diesem Kapitel werden Differenzenmethoden zur approximativen Lösung von Anfangsrandwertaufgaben für stochastische partielle Differentialgleichungen untersucht. Dabei wird im ersten Abschnitt gezeigt, wie sich die Betrachtungen mit Randwerten in die allgemeine Theorie einfügen und welche Bedingungen bei der Randwertapproximation zu beachten sind. Im zweiten Abschnitt wird die Lösung der Itô-Gleichung in Wahrscheinlichkeit durch Lösungen von Gleichungen approximiert, die selber keine stochastischen Integrale bzgl. des Wiener-Prozesses mehr enthalten. Zur Approximation dieser Lösungen kann man Differenzenverfahren, die konsistent und stabil sind, verwenden. In den letzten Abschnitten werden Anfangs- und Randwertprobleme für Systeme stochastischer Differentialgleichungen untersucht. Es werden verschiedene Begriffe der Wohlgestelltheit für Randwertprobleme eingeführt, und es wird gezeigt, dass die betrachteten Probleme den Begriffsbildungen genügen. Dabei kann man die Frage der Wohlgestelltheit des stochastischen Problems auf die Wohlgestelltheit des deterministischen Problems zurückführen. In analoger Weise kann man dann die Stabilitätsanalyse der approximierenden Systeme auf die Stabilitätsanalyse im deterministischen Fall zurückführen, d.h. man erhält für die approximierenden Systeme des stochastischen Differentialgleichungssystems die Stabilität genau dann, wenn schon das deterministische System stabil ist.

4.1 Das stochastische Anfangs- und Randwertproblem

In diesem Kapitel soll die Lösung der Differentialgleichung

$$v(t,x) = v(0,x) - \int_0^t a v_x(s,x)ds - \int_0^t b v(s,x)dW(s) \tag{4.1}$$

mit der Anfangswertbedingung

$$v(0,x) = f(x) \;\text{ mit }\; f \in L^2(\mathrm{I\!R}^1) \tag{4.2}$$

und der Randwertbedingung

$$v(t,0) = g(t) \;\text{ mit }\; g \in L^2(\mathrm{I\!R}^1) \tag{4.3}$$

untersucht werden. Damit die Gleichung (4.1) gemäß der Definiton einer $W_2^1(\mathrm{I\!R}^n)$-Lösung, vgl. dazu Definition 2.3, einen Sinn hat, muß gelten, dass

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} v(t,x) = 0 \;\text{ P-f.s.}, \tag{4.4}$$

denn eine $W_2^1(\mathbb{R}^n)$-Lösung ist natürlich auch eine verallgemeinerte Lösung und für die Integralbildung wird diese Voraussetzung benötigt. Wir nehmen eine parabolische Regularisierung des Problems vor und erhalten

$$v_\varepsilon(t,x) = v_\varepsilon(0,x) - \int_0^t \left(\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2} v_\varepsilon(s,x) + a v_{\varepsilon,x}(s,x) \right) ds - \int_0^t b v_\varepsilon(s,x) dW(s), \tag{4.5}$$

wobei für die Lösung die Anfangswertbedingung (4.2) und die Randwertbedingungen (4.3) und (4.4) gelten. Damit hat man ein parabolisches Randwertproblem, das sich komplett in die allgemeine Theorie einordnen läßt, vergleiche Pardoux [52]. Die Lösung von (4.5) ist dabei insbesondere eindeutig. O.B.d.A. kann $g(t) \equiv 0$ gesetzt werden. Deswegen gelten auch für das Problem mit den Randwertbedingungen (4.3) und (4.4) die Aussagen der Theoreme 2.2 - 2.4.

4.2 Approximation durch stückweise differenzierbare Rauschprozesse

In diesem Abschnitt soll die Lösung der Differentialgleichung

$$v(t,x) = v(0,x) + \int_0^t \left(a v_x(s,x) + \frac{b^2}{2} v(s,x) \right) ds + \int_0^t b v(s,x)\, dW(s) \tag{4.6}$$

mit der Anfangswertbedingung

$$v(0,x) = f(x) \tag{4.7}$$

und der Randwertbedingung

$$v(t,0) = g(t) \tag{4.8}$$

durch Lösungen von Gleichungen approximiert werden, die keine stochastischen Integrale bezüglich des Wiener-Prozesses enthalten. Eine ähnliche Vorgehensweise findet man bei Grecksch und Schmalfuß [14] oder Gyöngy [22]. Das stochastische Integral in (4.6) versteht sich auch hier im Sinne von Itô, wobei sich der zusätzliche Term in (4.6) dadurch ergibt, dass durch die gewählte Approximation der Übergang zum Stratonovich-Integral erforderlich ist. Wir approximieren Gleichung (4.6) dadurch, dass wir den Wiener-Prozess W durch einen Prozess W^δ mit stückweise differenzierbaren Trajektorien ersetzen

$$v_\delta(t,x) = v_\delta(0,x) + \int_0^t a v_{x,\delta}(s,x) ds + \int_0^t b v_\delta(s,x) dW^\delta(s), \tag{4.9}$$

wobei die Anfangs- und Randwertbedingungen beibehalten werden. Dabei ist $W_t^\delta \in C([0,T];\mathbb{R}^1)$ durch

$$W^\delta(t) = \begin{cases} 0, & \text{falls } t \in [t_0^n\,,\, t_1^n) \\ W(t_{i-1}^n) + \frac{1}{\delta}\left(W(t_i^n) - W(t_{i-1}^n)\right)(t - t_{i-1}^n), & \text{falls } t \in [t_i^n\,,\, t_{i+1}^n)\,; i \geq 1, \end{cases} \tag{4.10}$$

definiert und $0 = t_0^n < t_1^n < t_2^n < \cdots < t_{n-1}^n < t_n^n = T$ eine äquidistante Zerlegung des Intervalles $[0, T]$ ist. Wir setzen $t_i^n = i2^{-n}T$; $i = 0, \cdots, 2^n$ und bezeichnen $\delta = 2^{-n}T$.

Bei der Approximation durch den stückweise differenzierbaren Wiener-Prozess werden wir das folgende Lemma aus dem Buch von Ikeda und Watanabe, [29], Kapitel 7, Formel 7.1 verwenden.

Lemma 4.1. *Es gilt:*

$$E \sup_{0 \le t \le T} \mid W(t) - W^\delta(t) \mid^2 \longrightarrow 0 \text{ für } n \to \infty. \tag{4.11}$$

Dabei hat W^δ im Gegensatz zum Wiener-Prozess absolutstetige Realisierungen. Deshalb existiert die Ableitung $\dot{W}^\delta$, so dass für $t \in [0, T]$ gilt:

$$W^\delta(t) = \int_0^t \dot{W}^\delta(\tau) d\tau = \int_0^t d\dot{W}^\delta(\tau). \tag{4.12}$$

Hierbei ist $dW^\delta(t) = \dot{W}^\delta(t)dt$.

Theorem 4.1. *Angenommen v und v_δ seien Lösungen von (4.6) und (4.9) mit der Anfangsbedingung (4.7) und der Randbedingung (4.8). Dann gilt:*

$$\sup_{0 \le t \le T} \parallel v(t,x) - v_\delta(t,x) \parallel_H \longrightarrow 0 \tag{4.13}$$

für $\delta \to 0$ in Wahrscheinlichkeit mit $H = (H, \langle \cdot, \cdot \rangle)_H)$, wobei $H = L^2\,[\,0, \infty\,)$.

Bemerkung 4.1. Die Existenz einer (eindeutigen) Lösung v_δ der approximierenden Probleme folgt für festes $\omega \in \Omega$ aus der deterministischen Theorie. Die Existenz einer (eindeutigen) Lösung für (4.6), (4.7), (4.8) folgen aus Abschnitt 4.1. Theorem 4.1 gilt natürlich auch für das Anfangswertproblem (4.6), (4.7).

Beweis: Mit der Itô-Formel folgt aus der Gleichung (4.9)

$$\begin{aligned} d\Big\langle bv_\delta, v_\delta \Big\rangle \quad = \quad & \Big\langle bav_{x,\delta}, v_\delta \Big\rangle dt + \Big\langle b^2 v_\delta, v_\delta \Big\rangle dW^{n,\delta}(t) \\ & + \Big\langle bv_\delta, av_{x,\delta} \Big\rangle dt + \Big\langle bv_\delta, bv_\delta \Big\rangle dW^{n,\delta}(t). \end{aligned} \tag{4.14}$$

Angewandt auf die Gleichungen (4.6), (4.9) liefert die Itô-Formel

$$\begin{aligned} d\Big\langle bv_\delta, v \Big\rangle \quad = \quad & \Big\langle bav_{x,\delta}, v \Big\rangle dt + \Big\langle b^2 v_\delta, v \Big\rangle dW^{n,\delta}(t) \\ & + \Big\langle bv_\delta, av_x + \frac{b^2}{2} v \Big\rangle dt + \Big\langle bv_\delta, bv \Big\rangle dW(t). \end{aligned} \tag{4.15}$$

Im nächsten Schritt wendet man die Itô-Formel auf $\| v(t,x) - v_\delta(t,x) \|^2$ an und erhält

$$\begin{aligned}
d \| v(t,x) - v_\delta(t,x) \|^2 &= d \| - \int_0^t \Big(a(v_x(t,x) - v_{x,\delta}(t,x) + \frac{b^2}{2} v(t,x) \Big) dt \\
&\quad - b \Big[\int_0^t v(t,x) dW(t) - \int_0^t v_\delta(t,x) dW^{n,\delta}(t) \|^2 \\
&= 2 \big\langle v(t,x) - v_\delta(t,x), a(v_x(t,x) - v_{x,\delta}(t,x)) \big\rangle dt \\
&\quad + 2 \big\langle v(t,x) - v_\delta(t,x), \frac{b^2}{2} v(t,x) \big\rangle dt \\
&\quad + \| bv(t,x) \|_H^2 \, dt \\
&\quad + 2 \big\langle v(t,x) - v_\delta(t,x), bv(t,x) \big\rangle dW(t) \\
&\quad + 2 \big\langle v(t,x) - v_\delta(t,x), bv_\delta(t,x) \big\rangle dW^{n,\delta}(t) \\
&= 2 \big\langle v(t,x) - v_\delta(t,x), a(v_x(t,x) - v_{x,\delta}(t,x)) \big\rangle dt \\
&\quad + 2 \big\langle v(t,x) - v_\delta(t,x), \frac{b^2}{2} v(t,x) \big\rangle dt \\
&\quad + \| bv(t,x) \|_H^2 \, dt \\
&\quad + 2 \big\langle v(t,x) - v_\delta(t,x), b(v(t,x) - v_\delta(t,x)) \big\rangle dW(t) \\
&\quad + 2 \big\langle v(t,x) - v_\delta(t,x), bv_\delta(t,x) \big\rangle (dW(t) - dW^{n,\delta}(t)), \qquad (4.16)
\end{aligned}$$

wobei im zweiten Schritt der Term $2\langle v - v_\delta, bv_\delta \rangle dW(t)$ addiert und subtrahiert wurde. Die hier verwandte unendlichdimensionale Version der Itô-Formel findet sich im Anhang 5.1 und stammt ursprünglich aus Gyöngy und Krylov [24]. Im Folgenden betrachten wir den zweiten, den dritten und den fünften Summanden von Gleichung (4.16). Zuerst betrachten wir den letzten Summanden

$$2\big\langle v(t,x) - v_\delta(t,x), bv_\delta(t,x) \big\rangle (dW(t) - dW^{n,\delta}(t))$$

aus Gleichung (4.16). Bildet man von $2\Big[\Big\langle bv_\delta(t,x), v(t,x) - v_\delta(t,x) \Big\rangle \big(W(t) - W^{n,\delta}(t)\big)\Big]$ das Differential, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
&2d\Big[\Big\langle bv_\delta(t,x), v(t,x) - v_\delta(t,x) \Big\rangle \big(W(t) - W^{n,\delta}(t)\big)\Big] \\
&\quad = 2d\Big\langle bv_\delta(t,x), v(t,x) - v_\delta(t,x) \Big\rangle \big(W(t) - W^{n,\delta}(t)\big) \\
&\qquad + 2\Big\langle bv_\delta(t,x), v(t,x) - v_\delta(t,x) \Big\rangle \big(dW(t) - dW^{n,\delta}(t)\big). \qquad (4.17)
\end{aligned}$$

Mit

$$d\Big\langle bv_\delta(t,x), v(t,x) - v_\delta(t,x) \Big\rangle = d\Big\langle bv_\delta(t,x), v(t,x) \Big\rangle - d\Big\langle bv_\delta(t,x), v_\delta(t,x) \Big\rangle \qquad (4.18)$$

erhält man unter Beachtung von (4.14) und (4.15)

$$\begin{aligned}
&2d\Big\langle bv_\delta(t,x), v(t,x)-v_\delta(t,x)\Big\rangle\big(W(t)-W^{n,\delta}(t)\big)\\
&= 2\Big\langle bav_{x,\delta}(t,x), v(t,x)\Big\rangle\big(W(t)-W^{n,\delta}(t)\big)dt\\
&\quad +2\Big\langle b^2 v_\delta(t,x), v(t,x)\Big\rangle\big(W(t)-W^{n,\delta}(t)\big)dW^{n,\delta}(t)\\
&\quad +2\Big\langle bv_\delta(t,x), av_x(t,x)+\frac{b^2}{2}v(t,x)\Big\rangle\big(W(t)-W^{n,\delta}(t)\big)dt\\
&\quad +2\Big\langle bv_\delta(t,x), bv(t,x)\Big\rangle\big(W(t)-W^{n,\delta}(t)\big)dW(t)\\
&\quad -2\Big\langle av_{x,\delta}(t,x), bv_\delta(t,x)\Big\rangle\big(W(t)-W^{n,\delta}(t)\big)dt\\
&\quad -2\Big\langle bv_\delta(t,x), bv_\delta(t,x)\Big\rangle\big(W(t)-W^{n,\delta}(t)\big)dW^{n,\delta}(t)\\
&\quad -2\Big\langle v_\delta(t,x), bav_{x,\delta}(t,x)\Big\rangle\big(W(t)-W^{n,\delta}(t)\big)dt\\
&\quad -2\Big\langle v_\delta(t,x), b^2 v_\delta(t,x)\Big\rangle\big(W(t)-W^{n,\delta}(t)\big)dW^{n,\delta}(t)\\
&\quad -2\Big\langle bv_\delta(t,x), bv(t,x)\Big\rangle dt. \qquad (4.19)
\end{aligned}$$

Für den Term $d\big[\int_0^t \langle bv(t,x), bv_\delta(t,x)\rangle dW(t)(W(t)-W^{n,\delta}(t))\big]$ gilt:

$$\begin{aligned}
&d\Big[\int_0^t \langle bv(t,x), bv_\delta(t,x)\rangle dW(t)(W(t)-W^{n,\delta}(t))\Big]\\
&= d\Big[\int_0^t \langle bv(t,x), bv_\delta(t,x)\rangle dW(t)\cdot\int_0^t dW(s)\Big]\\
&\quad -d\Big[\int_0^t \langle bv(t,x), bv_\delta(t,x)\rangle dW(t)\cdot\int_0^t dW^{n,\delta}(s)\Big]\\
&= \Big\langle bv(t,x), bv_\delta(t,x)\Big\rangle dW(t)\cdot W(t)\\
&\quad +\int_0^t \Big\langle bv(t,x), bv_\delta(t,x)\Big\rangle dW(t)\cdot dW(t) + \Big\langle bv(t,x), bv_\delta(t,x)\Big\rangle dt\\
&\quad -\Big\langle bv(t,x), bv_\delta(t,x)\Big\rangle dW(t)\cdot W^{n,\delta}(t) - \Big(\int_0^t \Big\langle bv(t,x), bv_\delta(t,x)\Big\rangle dW(t)\Big)dW^{n,\delta}(t)\\
&= \Big\langle bv(t,x), bv_\delta(t,x)\Big\rangle dW(t)\big(W(t)-W^{n,\delta}(t)\big) + \Big\langle bv(t,x), bv_\delta(t,x)\Big\rangle dt\\
&\quad +\int_0^t \Big\langle bv(t,x), bv_\delta(t,x)\Big\rangle dW(t)\cdot\big(dW(t)-dW^{n,\delta}(t)\big). \qquad (4.20)
\end{aligned}$$

Betrachtet man nun den dritten Summanden $\| bv \|_H^2\; dt$ aus Gleichung (4.16), so erhält man

$$\begin{aligned}
&\Big\langle bv(t,x), bv(t,x)\Big\rangle dt\\
&= 2\Big\langle bv(t,x), bv_\delta(t,x)\Big\rangle dt\\
&\quad -2\Big\langle bv_\delta(t,x), bv_\delta(t,x)\Big\rangle\big(W(t)-W^{n,\delta}(t)\big)dW^{n,\delta}(t)\\
&\quad +2\Big\langle b[v(t,x)-v_\delta(t,x)], b[v(t,x)-v_\delta(t,x)]\Big\rangle\big(W(t)-W^{n,\delta}(t)\big)dW^{n,\delta}(t)\\
&\quad -2\Big[\Big\langle bv(t,x), bv(t,x)\Big\rangle - \Big\langle bv(t,x), bv_\delta(t,x)\Big\rangle - \Big\langle bv_\delta(t,x), bv(t,x)\Big\rangle\Big]\\
&\quad \cdot\Big[\big(W(t)-W^{n,\delta}(t)\big)dW^{n,\delta}(t) - \frac{1}{2}dt\Big]. \qquad (4.21)
\end{aligned}$$

Für den zweiten Summanden in (4.16) erhält man

$$\begin{aligned}
&2\big\langle v(t,x)-v_\delta(t,x),\frac{b^2}{2}v(t,x)\big\rangle dt\\
=\ &\big\langle v(t,x)-v_\delta(t,x),b^2v(t,x)\big\rangle dt\\
=\ &+2\big\langle b^2v_\delta(t,x),v(t,x)-v_\delta(t,x)\big\rangle\big(W(t)-W^{n,\delta}(t)\big)dW^{n,\delta}(t)\\
&+2\big\langle b^2(v(t,x)-v_\delta(t,x)),v(t,x)-v_\delta(t,x)\big\rangle\big(W(t)-W^{n,\delta}(t)\big)dW^{n,\delta}(t)\\
&-2\big\langle b^2v(t,x),v(t,x)-v_\delta(t,x)\big\rangle\Big(\big(W(t)-W^{n,\delta}(t)\big)dW^{n,\delta}(t)-\frac{1}{2}dt\Big). \qquad (4.22)
\end{aligned}$$

Mit diesen Umformungen erhält man für Gleichung (4.16) unter Beachtung von (4.19)

$$\begin{aligned}
&d\parallel v(t,x)-v_\delta(t,x)\parallel^2\\
=\ &2d\big[\big\langle bv_\delta(t,x),v(t,x)-v_\delta(t,x)\big\rangle\big(W(t)-W^{n,\delta}(t)\big)\big]\\
&-2\Big\langle bav_{x,\delta}(t,x),v(t,x)\Big\rangle\big(W(t)-W^{n,\delta}(t)\big)dt\\
&-2\Big\langle b^2v_\delta(t,x),v(t,x)\Big\rangle\big(W(t)-W^{n,\delta}(t)\big)dW^{n,\delta}(t)\\
&-2\Big\langle bv_\delta(t,x),av_x(t,x)+\frac{b^2}{2}v(t,x)\Big\rangle\big(W(t)-W^{n,\delta}(t)\big)dt\\
&-2\Big\langle bv_\delta(t,x),bv(t,x)\Big\rangle\big(W(t)-W^{n,\delta}(t)\big)dW(t)\\
&+2\Big\langle av_{x,\delta}(t,x),bv_\delta(t,x)\Big\rangle\big(W(t)-W^{n,\delta}(t)\big)dt\\
&+2\Big\langle bv_\delta(t,x),bv_\delta(t,x)\Big\rangle\big(W(t)-W^{n,\delta}(t)\big)dW^{n,\delta}(t)\\
&+2\Big\langle v_\delta(t,x),bav_{x,\delta}(t,x)\Big\rangle\big(W(t)-W^{n,\delta}(t)\big)dt\\
&+2\Big\langle v_\delta(t,x),b^2v_\delta(t,x)\Big\rangle\big(W(t)-W^{n,\delta}(t)\big)dW^{n,\delta}(t)\\
&-2\big\langle bv(t,x),v_\delta(t,x)\big\rangle dt+2\big\langle bv(t,x),v_\delta(t,x)\big\rangle dt\\
&-2\big\langle bv_\delta(t,x),bv_\delta(t,x)\big\rangle\big(W(t)-W^{n,\delta}(t)\big)dW^{n,\delta}(t)\\
&+2\big\langle b(v(t,x)-v_\delta(t,x)),b(v(t,x)-v_\delta(t,x))\big\rangle\big(W(t)-W^{n,\delta}(t)\big)dW^{n,\delta}(t)\\
&-2\big[\big\langle bv(t,x),bv(t,x)\big\rangle-\big\langle bv(t,x),bv_\delta(t,x)\big\rangle-\big\langle bv_\delta(t,x),bv(t,x)\big\rangle\big]\\
&\qquad\cdot\big[\big(W(t)-W^{n,\delta}(t)\big)dW^{n,\delta}(t)-\frac{1}{2}dt\big]\\
&+2\big\langle b^2v_\delta(t,x),v(t,x)-v_\delta(t,x)\big\rangle\big(W(t)-W^{n,\delta}(t)\big)dW^{n,\delta}(t)\\
&+2\big\langle b(v(t,x)-v_\delta(t,x)),v(t,x)-v_\delta(t,x)\big\rangle\big(W(t)-W^{n,\delta}(t)\big)dW^{n,\delta}(t)\\
&-2\big\langle b^2v(t,x),v(t,x)-v_\delta(t,x)\big\rangle\Big[\big(W(t)-W^{n,\delta}(t)\big)dW^{n,\delta}(t)-\frac{1}{2}dt\Big]\\
&+2\big\langle v(t,x)-v_\delta(t,x),b\big(v(t,x)-v_\delta(t,x)\big)\big\rangle dW(t)\\
&+2\big\langle v(t,x)-v_\delta(t,x),a\big(v_x(t,x)-v_{x,\delta}(t,x)\big)\big\rangle dt. \qquad (4.23)
\end{aligned}$$

Es ist unser nächstes Ziel die behauptete Konvergenz in Wahrscheinlichkeit unter Beschränktheitsannahmen zu zeigen. Wir führen deshalb die folgenden Stoppzeiten ein:

$$\begin{aligned}
\tau^1_{N,\delta} &= \inf\Big\{t \in [0,T] : \| v_\delta(t,x) \|^2_H \geq N\Big\} \\
\tau^1_N &= \inf\Big\{t \in [0,T] : \| v(t,x) \|^2_H \geq N\Big\} \\
\tau^2_N &= \inf\Big\{t \in [0,T] : \int_0^t \mid W(s) - W^{n,\delta}(s) \mid \cdot \mid \dot{W}^{n,\delta}(s) \mid ds \geq N\Big\} \\
\tau^3_{N,\delta} &= \inf\Big\{t \in [0,T] : \| v_{x,\delta}(t,x) \|^2_H \geq N\Big\} \\
\tau^3_N &= \inf\Big\{t \in [0,T] : \| v_x(t,x) \|^2_H \geq N\Big\} \\
\tau_{N,\delta} &= \min\Big\{\tau^1_{N,\delta},\, \tau^1_N,\, \tau^2_N,\, \tau^3_{N,\delta},\, \tau^3_N\Big\}.
\end{aligned}$$

Entsprechend benötigt man beschränkte Anfangswerte, die man wie folgt erhält:

$$v_{0,N,\delta} = \begin{cases} \frac{v_{0,\delta}}{\|v_{N,\delta}\|_H} \cdot N & : \ \| v_{N,\delta} \|_H > N \\ v_{0,\delta} & : \ \| v_{N,\delta} \|_H \leq N \end{cases}$$

$$v_{0,N} = \begin{cases} \frac{v_0}{\|v_N\|_H} \cdot N & : \ \| v_N \|_H > N \\ v_0 & : \ \| v_N \|_H \leq N. \end{cases}$$

Nun betrachten wir die Summanden von (4.23). Für den ersten Summanden

$$dR^1_\delta := 2d\big[\big\langle bv_\delta(t,x), v(t,x) - v_\delta(t,x)\big\rangle\big]\big(W(t) - W^{n,\delta}(t)\big) \tag{4.24}$$

gilt

$$R^1_\delta = 2\big\langle bv_\delta(t,x), v(t,x) - v_\delta(t,x)\big\rangle\big(W(t) - W^{n,\delta}(t)\big).$$

Daraus folgt, dass

$$\begin{aligned}
&\sup_{t\in[0,T]} R^1_\delta(\tau_{N,\delta} \wedge t) \\
&= \sup_{t\in[0,T]} \int_0^{\tau_{N,\delta}\wedge t} 2\Big\langle bv_\delta(t,x), v(t,x) - v_\delta(t,x)\Big\rangle dt \cdot \big(W(t) - W^{n,\delta}(t)\big) \longrightarrow 0
\end{aligned} \tag{4.25}$$

in Wahrscheinlichkeit gilt, da $W^{N,\delta}(t)$ gleichmäßig auf $[0,T]$ gegen $W(t)$ konvergiert. Nun betrachten wir die Terme aus (4.23), die ebenfalls den Faktor $(W(t) - W^{n,\delta}(t))$ enthalten, d.h.

$$\begin{aligned}
dR^2_\delta := &\Big\{2\Big\langle bav_{x,\delta}(t,x), v(t,x)\Big\rangle dt + 2\Big\langle bv_\delta(t,x), av_x(t,x) + \frac{b^2}{2}v(t,x)\Big\rangle dt \\
&-2\Big\langle av_{x,\delta}(t,x), bv_\delta(t,x)\Big\rangle dt - 2\Big\langle v_\delta(t,x), bav_\delta(t,x)\Big\rangle dt\Big\} \\
&\cdot\big(W(t) - W^{n,\delta}(t)\big).
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Diese Terme konvergieren wegen analoger Überlegungen zum Konvergenzbeweis von (4.25) gegen Null. Mit der Beziehung (4.20) enthält (4.23) auch den folgenden Term

$$2\Big\langle bv_\delta(t,x), bv(t,x)\Big\rangle dW(t) \cdot \big(W(t) - W^{n,\delta}(t)\big). \tag{4.27}$$

Setzt man

$$dI_\delta := \Big\langle bv_\delta(t,x), bv(t,x)\Big\rangle dW(t),$$

so folgt

$$\sup_{t\in[0,T]} I_\delta(t\wedge\tau_{N,\delta}) = \sup_{t\in[0,T]} \int_0^{\tau_{N,\delta}\wedge t} \Big\langle bv_\delta(t,x), bv(t,x)\Big\rangle dW(t) \tag{4.28}$$

und es gilt

$$\begin{aligned} & E\sup_{t\in[0,T]} \mid I_\delta(t\wedge\tau_{N,\delta})\big(W(t)-W^{n,\delta}(t)\big)\mid^2 \\ \leq\ & 2\int_t^{t\wedge\tau_{N,\delta}} E\sup_{t\in[0,T]} \mid \Big\langle bv_\delta(t,x), bv(t,x)\Big\rangle \mid^2 dt\cdot E\sup_{t\in[0,T]} \mid W(t)-W^{n,\delta}(t)\mid^2 \\ \leq\ & CE\sup_{t\in[0,T]} \mid W(t)-W^{n,\delta}(t)\mid^2 . \end{aligned} \tag{4.29}$$

Mit Lemma 4.1 folgt, dass (4.29) im quadratischen Mittel gegen Null strebt. Analog folgt, dass der Term

$$\begin{aligned} dR_\delta^3 \ :=\ & -2\Big\langle b^2v_\delta(t,x), v(t,x)\Big\rangle\big(W(t)-W^{n,\delta}(t)\big)dW^{n,\delta}(t) \\ & -2\Big\langle bv_\delta(t,x), bv(t,x)\Big\rangle\big(W(t)-W^{n,\delta}(t)\big)dW(t) \\ & +2\Big\langle bv_\delta(t,x), bv_\delta(t,x)\Big\rangle\big(W(t)-W^{n,\delta}(t)\big)dW^{n,\delta}(t) \\ & +2\Big\langle v_\delta(t,x), b^2v_\delta(t,x)\Big\rangle\big(W(t)-W^{n,\delta}(t)\big)dW^{n,\delta}(t) \\ & -2\big\langle bv_\delta(t,x), bv_\delta(t,x)\big\rangle\big(W(t)-W^{n,\delta}(t)\big)dW^{n,\delta}(t) \\ & +2\big\langle b^2v_\delta(t,x), v(t,x)-v_\delta(t,x)\big\rangle\big(W(t)-W^{n,\delta}(t)\big)dW^{n,\delta}(t) \end{aligned} \tag{4.30}$$

unter Benutzung von Lemma 4.1 im quadratischen Mittel gegen Null strebt. Für die nächsten Summanden in (4.23) führen wir

$$\begin{aligned} dR_\delta^4 \ :=\ & -2\big[\big\langle bv(t,x), bv(t,x)\big\rangle - \big\langle bv(t,x), bv_\delta(t,x)\big\rangle\big] \\ & \cdot\big[\big(W(t)-W^{n,\delta}(t)\big)dW^{n,\delta}(t) - \frac{1}{2}dt\big] \end{aligned} \tag{4.31}$$

und

$$dR_\delta^5 \ :=\ -2\big\langle b^2v(t,x), v(t,x)-v_\delta(t,x)\big\rangle\Big[\big(W(t)-W^{n,\delta}(t)\big)dW^{n,\delta}(t) - \frac{1}{2}dt\Big] \tag{4.32}$$

ein. Es gilt:

$$\begin{aligned} & \int_0^{t\wedge\tau_{N,\delta}} (W(s)-W^{N,\delta}(s))\dot W^{N,\delta}(s)ds \\ =\ & \int_0^{t\wedge\tau_{N,\delta}} W(s)\dot W^{N,\delta}(s)ds - \int_0^{t\wedge\tau_{N,\delta}} W^{N,\delta}(s)\dot W^{N,\delta}(s)ds \\ =\ & \int_0^{t\wedge\tau_{N,\delta}} W(s)dW^{N,\delta}(s) - \frac{1}{2}W^{N,\delta}(t\wedge\tau_{N,\delta})^2. \end{aligned} \tag{4.33}$$

Für den ersten Summanden in (4.33) erhält man mit partieller Integration

$$\begin{aligned}\int_0^{t\wedge\tau_{N,\delta}} W(s)dW^{N,\delta}(s) &= W(t\wedge\tau_{N,\delta})W^{N,\delta}(t\wedge\tau_{N,\delta}) - \int_0^{t\wedge\tau_{N,\delta}} W^{N,\delta}(s)dW(s)\\ &= W(t\wedge\tau_{N,\delta})W^{N,\delta}(t\wedge\tau_{N,\delta})\\ &\quad + \int_0^{t\wedge\tau_{N,\delta}}(W(s)-W^{N,\delta}(s))dW(s) - \int_0^{t\wedge\tau_{N,\delta}} W(s)dW(s)\\ &= W(t\wedge\tau_{N,\delta})W^{N,\delta}(t\wedge\tau_{N,\delta})\\ &\quad + \int_0^{t\wedge\tau_{N,\delta}}(W(s)-W^{N,\delta}(s))dW(s)\\ &\quad -\Big(\frac{1}{2}W^2(t\wedge\tau_{N,\delta}) - \frac{1}{2}(t\wedge\tau_{N,\delta})\Big) \end{aligned} \tag{4.34}$$

Eingesetzt in (4.33) ergibt sich

$$\begin{aligned}&\int_0^{t\wedge\tau_{N,\delta}}(W(t)-W^{N,\delta}(t))\dot{W}^{N,\delta}(t)ds\\ &= \int_0^{t\wedge\tau_{N,\delta}}(W(s)-W^{N,\delta}(s))dW(s) + \frac{1}{2}(t\wedge\tau_{N,\delta})\\ &\quad -\frac{1}{2}\Big(W(t\wedge\tau_{N,\delta})^2 - 2W(t\wedge\tau_{N,\delta})W^{N,\delta}(t\wedge\tau_{N,\delta}) + W^{N,\delta}(t\wedge\tau_{N,\delta})^2\Big). \end{aligned} \tag{4.35}$$

Aus (4.35) folgt

$$\begin{aligned}&\int_0^{t\wedge\tau_{N,\delta}}(W(t)-W^{N,\delta}(t))\dot{W}^{N,\delta}(t)ds - \frac{1}{2}(t\wedge\tau_{N,\delta})\\ &= \int_0^{t\wedge\tau_{N,\delta}}(W(s)-W^{N,\delta}(s))dW(s)\\ &\quad -\frac{1}{2}\Big(W(t\wedge\tau_{N,\delta}) - W^{N,\delta}(t\wedge\tau_{N,\delta})\Big)^2. \end{aligned} \tag{4.36}$$

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz in Wahrscheinlichkeit gegen Null für $\delta \to 0$ geht die rechte Seite von Gleichung (4.36) gegen Null in Wahrscheinlichkeit und somit auch die linke Seite der Gleichung. Unter Beachtung von (4.36) gehen auch die Ausdrücke dR_δ^4 und dR_δ^5 in Wahrscheinlichkeit gegen Null. Führen wir die Schreibweisen

$$dR_\delta := dR_\delta^1 + dR_\delta^2 + dR_\delta^3 + dR_\delta^4 + dR_\delta^5, \tag{4.37}$$

$$d\phi_1(t) := 4b^2\big(W(t) - W^{N,\delta}(t)\big)dW^{N,\delta}(t), \tag{4.38}$$

$$d(\Delta_\delta(t)) := d \parallel v(t,x) - v_\delta(t,x) \parallel^2 \tag{4.39}$$

ein, so ergibt sich für Gleichung (4.23):

$$\begin{aligned} d(\Delta_\delta(t)) &= dR_\delta^1 + dR_\delta^2 + dR_\delta^3 + dR_\delta^4 + dR_\delta^5 \\ &\quad +4b^2(\Delta_\delta(t))dW^{N,\delta}(t)\big(W(t) - W^{N,\delta}(t)\big) \\ &\quad +2\big\langle v(t,x) - v_\delta(t,x), b\big(v(t,x) - v_\delta(t,x)\big)\big\rangle dW(t) \\ &\quad +2\big\langle v(t,x) - v_\delta(t,x), a\big(v_x(t,x) - v_{x,\delta}(t,x)\big)\big\rangle dt \\ &= dR_\delta + \phi_1(t)(\Delta_\delta(t)) + 2b((\Delta_\delta(t))dW(t) \\ &\quad +2\big\langle v(t,x) - v_\delta(t,x), a\big(v_x(t,x) - v_{x,\delta}(t,x)\big)\big\rangle dt \\ &\leq dR_\delta + \phi_1(t)(\Delta_\delta(t)) + 2b((\Delta_\delta(t))dW(t) \\ &\quad +2\|v(t,x) - v_\delta(t,x)\|_H |a| dt \\ &\leq dR_\delta + \phi_1(t)(\Delta_\delta(t)) + 2b((\Delta_\delta(t))dW(t) \\ &\quad +C\|v(t,x) - v_\delta(t,x)\|_H dt. \end{aligned} \tag{4.40}$$

Weiterhin führen wir die Prozesse

$$\Phi(t) := (|\ \phi_1(t)\ | + |\ C\ |), \tag{4.41}$$

$$\Lambda(t) := 2b((\Delta_\delta(t)) \tag{4.42}$$

ein. Es sei $\Xi(t) \leq 0$ P-f.s. der Prozess, der bei Addition auf der rechten Seite von (4.40) die Gleichung herstellt. Dann erhalten wir aus (4.40)

$$\begin{aligned} d(\Delta_\delta(t)) &= dR_\delta + \phi_1(t)(\Delta_\delta(t))dt + 2b((\Delta_\delta(t))dW(t) \\ &\quad +C(\Delta_\delta(t))dt + \Xi(t) \\ &= dR_\delta + \Phi(t)(\Delta_\delta t) + \Lambda(t)dW(t) + \Xi(t)dt. \end{aligned} \tag{4.43}$$

Nun wollen wir (4.43) in zwei Gleichungen zerlegen. Deshalb führen wir die Prozesse

$$d\overline{\Delta_\delta(t)} = \Phi(t)\overline{\Delta_\delta(t)}dt + \Lambda(t)dW(t), \tag{4.44}$$

$$\overline{\Delta_\delta(0)} = \|\ v_{0,N} - v_{0,N,\delta}\ \|_H^2, \tag{4.45}$$

und

$$d\underline{\Delta_\delta(t)} = \Phi(t)\underline{\Delta_\delta(t)}dt + dR_\delta(t) + \Xi(t)dt, \tag{4.46}$$

ein. Wir erhalten

$$\overline{\Delta_\delta(t)} = \overline{\Delta_\delta(0)} + \int_0^t \Phi(s)\overline{\Delta_\delta(s)}\, ds + \int_0^t \Lambda(s)dW(s) \tag{4.47}$$

$$\underline{\Delta_\delta(t)} = \int_0^t \Phi(s)\underline{\Delta_\delta(s)}\, ds + \int_0^t dR_\delta(s) + \int_0^t \Xi(s)ds. \tag{4.48}$$

Für die entsprechende Integralgleichung erhält man folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned}\underline{\Delta_\delta(t\wedge\tau_{N,\delta})} &= \int_0^{t\wedge\tau_{N,\delta}}\Phi(s)\underline{\Delta_\delta(s)}ds + R_\delta(t\wedge\tau_{N,\delta}) + \int_0^{t\wedge\tau_{N,\delta}}\Xi(s)ds \\ &\le \int_0^{t\wedge\tau_{N,\delta}}\Phi(s)\underline{\Delta_\delta(s)}ds + R_\delta(t\wedge\tau_{N,\delta}). \qquad (4.49)\end{aligned}$$

Addiert man (4.44) und (4.46), so erhält man

$$\Delta_\delta(t\wedge\tau_{N,\delta}) = \overline{\Delta_\delta(t\wedge\tau_{N,\delta})} + \underline{\Delta_\delta(t\wedge\tau_{N,\delta})}. \qquad (4.50)$$

Da $\Phi(t)$ positiv ist, kann man das Gronwallsche Lemma auf (4.49) anwenden und erhält

$$\underline{\Delta_\delta(t\wedge\tau_{N,\delta})} \le \int_0^{t\wedge\tau_{N,\delta}} \mid R_\delta(s)\mid \Phi(s)\exp\Big(\int_s^{t\wedge\tau_{N,\delta}}\Phi(\bar{s})d\bar{s}\Big)ds + \mid R_\delta(t\wedge\tau_{N,\delta})\mid. \qquad (4.51)$$

Die angewandte Version des Gronwallschen Lemmas findet man im Anhang 5.1 oder bei Wloka [67]. Die Lösung für die eindimensionale Itô-Gleichung (4.44) ist

$$\begin{aligned}\overline{\Delta_\delta(t\wedge\tau_{N,\delta})} &= \overline{\Delta_\delta(0)}\exp\Big(\int_0^{t\wedge\tau_{N,\delta}}\Phi(s)ds\Big) \\ &\quad + \exp\Big(\int_0^{t\wedge\tau_{N,\delta}}\Phi(s)ds\Big)\int_0^{t\wedge\tau_{N,\delta}}\exp\Big(-\int_0^s\Phi(\bar{s})d\bar{s}\Big)\Lambda(s)dW(s). \qquad (4.52)\end{aligned}$$

Die Konstruktion der Stoppzeiten liefert

$$\begin{aligned}\sup_{s\in[0,t\wedge\tau_{N,\delta}]}\Delta_\delta(s) &\le e^{(4b^2+C)N}\Delta_\delta(0) + \sup_{s\in[0,t\wedge\tau_{N,\delta}]}\mid R_\delta(s)\mid\big[(4b^2+C)Ne^{(4b^2+C)N}+1\big] \\ &\quad + e^{(4b^2+C)N}\sup_{s\in[0,t\wedge\tau_{N,\delta}]}\int_0^s\exp\Big(-\int_0^{\bar{s}}\Phi(\bar{\bar{s}})d\bar{\bar{s}}\Big)\Lambda(\bar{s})dW(\bar{s}). \qquad (4.53)\end{aligned}$$

Die Burkholder-Davis-Gundy-Ungleichung, siehe Anhang 5.3 oder [46], und die Eigenschaften der Stoppzeiten ergeben

$$
\begin{aligned}
E \sup_{s\in[0,t\wedge\tau_{N,\delta}]} \Delta_\delta(s) &\leq e^{(4b^2+C)N} E\Delta_\delta(0) + E \sup_{s\in[0,t\wedge\tau_{N,\delta}]} \mid R_\delta(s) \mid \big[(4b^2+C)Ne^{(4b^2+C)N}+1\big] \\
&\quad + e^{(4b^2+C)N} E \sup_{s\in[0,t\wedge\tau_{N,\delta}]} \mid \int_0^s \exp\Big(-\int_0^{\bar{s}} \Phi(\bar{\bar{s}})d\bar{\bar{s}}\Big)\Lambda(\bar{s})dW(\bar{s}) \mid \\
&\leq e^{(4b^2+C)N} E\Delta_\delta(0) + E \sup_{s\in[0,t\wedge\tau_{N,\delta}]} \mid R_\delta(s) \mid \big[(4b^2+C)Ne^{(4b^2+C)N}+1\big] \\
&\quad + e^{(4b^2+C)N} KE\Big\{\Big| \int_0^{t\wedge\tau_{N,\delta}} \exp\Big(-\int_0^{\bar{s}} \Phi(\bar{\bar{s}})d\bar{\bar{s}}\Big)\Lambda(\bar{s})dW(\bar{s})\Big|^2\Big\}^{\frac{1}{2}} \\
&\leq e^{(4b^2+C)N} E\Delta_\delta(0) + E \sup_{s\in[0,t\wedge\tau_{N,\delta}]} \mid R_\delta(s) \mid \big[(4b^2+C)Ne^{(4b^2+C)N}+1\big] \\
&\quad + e^{(4b^2+C)N} KE\Big\{ \int_0^{t\wedge\tau_{N,\delta}} \mid \exp\Big(-\int_0^{\bar{s}} \Phi(\bar{\bar{s}})d\bar{\bar{s}}\Big)\Lambda(\bar{s}) \mid^2 d\bar{s}\Big\}^{\frac{1}{2}} \\
&\leq e^{(4b^2+C)N} E\Delta_\delta(0) + E \sup_{s\in[0,t\wedge\tau_{N,\delta}]} \mid R_\delta(s) \mid \big[(4b^2+C)Ne^{(4b^2+C)N}+1\big] \\
&\quad + e^{(4b^2+C)N} KE\Big\{ \int_0^{t\wedge\tau_{N,\delta}} \mid \Lambda(\bar{s}) \mid^2 d\bar{s}\Big\}^{\frac{1}{2}} \\
&\leq e^{(4b^2+C)N} E\Delta_\delta(0) + E \sup_{s\in[0,t\wedge\tau_{N,\delta}]} \mid R_\delta(s) \mid \big[(4b^2+C)Ne^{(4b^2+C)N}+1\big] \\
&\quad + e^{(4b^2+C)N} KE\Big\{ \int_0^{t\wedge\tau_{N,\delta}} \Delta_\delta(\bar{s})^2 ds\Big\}^{\frac{1}{2}} \\
&\leq e^{(4b^2+C)N} E\Delta_\delta(0) + E \sup_{s\in[0,t\wedge\tau_{N,\delta}]} \mid R_\delta(s) \mid \big[(4b^2+C)Ne^{(4b^2+C)N}+1\big] \\
&\quad + e^{(4b^2+C)N} KE\Big\{ \sup_{s\in[0,t\wedge\tau_{N,\delta}]} \Delta_\delta(s) \int_0^{t\wedge\tau_{N,\delta}} \Delta_\delta(\bar{s}) ds\Big\}^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

Dabei ist K eine Konstante, die unabhängig von N und δ ist. Man erhält durch weitere elementare Umformungen

$$
\begin{aligned}
E \sup_{s\in[0,t\wedge\tau_{N,\delta}]} \Delta_\delta(s) &\leq e^{(4b^2+C)N} E\Delta_\delta(0) + E \sup_{s\in[0,t\wedge\tau_{N,\delta}]} \mid R_\delta(s) \mid \big[(4b^2+C)Ne^{4b^2N}+1\big] \\
&\quad + e^{(4b^2+C)N} KE\Big\{ \int_0^{t\wedge\tau_{N,\delta}} \sup_{\bar{s}\in[0,s\wedge\tau_{N,\delta}]} \Delta_\delta(\bar{s})^2 ds\Big\}^{\frac{1}{2}} \\
&\leq e^{(4b^2+C)N} E\Delta_\delta(0) + E \sup_{s\in[0,t\wedge\tau_{N,\delta}]} \mid R_\delta(s) \mid \big[(4b^2+C)Ne^{(4b^2+C)N}+1\big] \\
&\quad + 2e^{(8b^2+2C)N} K^2 \int_0^{t\wedge\tau_{N,\delta}} E \sup_{\bar{s}\in[0,s\wedge\tau_{N,\delta}]} \Delta_\delta(\bar{s}) ds \\
&\quad + \frac{1}{2} E \sup_{s\in[0,t\wedge\tau_{N,\delta}]} \Delta_\delta(s). \qquad (4.54)
\end{aligned}
$$

Das Gronwallsche Lemma sichert nun die Konvergenz von $E\sup_{s\in[0,t\wedge\tau_{N,\delta}]}\Delta_\delta(s)$ gegen Null für $\delta\to 0$. Zuletzt zeigen wir die Konvergenz für $E\sup_{s\in[0,T]}\Delta_\delta(s)$, d.h. wir zeigen die Konvergenz auf dem gesamten Zeitintervall $[0, T]$. Es gilt wegen der Isotonie

$$\begin{aligned} & P\Big\{ \sup_{s\in[0,T]} \Delta_\delta(s) \geq \varepsilon \Big\} \\ \leq \;& P\Big\{ \sup_{s\in[0,t\wedge\tau^2_{N,\delta}]} \Delta_\delta(s) \geq \varepsilon \Big\} + P\Big\{ \sup_{s\in[t\wedge\tau^2_{N,\delta},T]} \Delta_\delta(s) \geq \varepsilon \Big\} \\ \leq \;& P\Big\{ \sup_{s\in[0,t\wedge\tau^2_{N,\delta}]} \Delta_\delta(s) \geq \varepsilon \Big\} + P\Big\{ \tau^2_{N,\delta} < T \Big\}. \end{aligned} \tag{4.55}$$

Mit den obigen Betrachtungen und der Markovschen Ungleichung folgt, dass der erste Summand der rechten Seite von Gleichung (4.55) in Wahrscheinlichkeit gegen Null strebt für jedes $\varepsilon > 0$. Damit bleibt noch zu zeigen, dass $P\{\tau^2_\delta < T\} \to 0$ für $\delta \to 0$ und $N \to \infty$. Dazu zeigen wir, dass τ^2_δ gegen T geht für $N \to \infty, \delta \to 0$. Hierzu betrachten wir die Definition von W^δ

$$W^\delta(t) = \begin{cases} 0 & ; \quad \text{falls } t \in [t_0\;,\; t^n_1) \\ W(t^n_{i-1}) + \frac{1}{\delta}\big(W(t^n_i) - W(t^n_{i-1})\big)(t - t^n_{i-1}) & ; \quad \text{falls } t \in [t^n_i\;,\; t^n_{i+1}\big)\;,\; i \geq 1. \end{cases}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} & \sup_\delta E \int_0^T \mid W(s) - W^\delta(s) \mid\mid \dot{W}^\delta(s) \mid ds \\ = \;& \sup_\delta E\Big\{ \sum_{k=0}^{2^n-1} \int_{t^n_k}^{t^n_{k+1}} \Big|W(s) - W(t^n_{k-1}) - \frac{2^n}{T}\big(W(t^n_k) - W(t^n_{k-1})\big)(s - t^n_{k-1})\Big| \\ & \cdot \frac{1}{\delta} \mid W(t^n_k) - W(t^n_{k-1}) \mid ds \Big\} \\ \leq \;& \sup_\delta E\Big\{ \sum_{k=0}^{2^n-1} \int_{t^n_k}^{t^n_{k+1}} \frac{1}{\delta}\big|W(s) - W(t^n_{k-1})\big|\big|W(t^n_k) - W(t^n_{k-1})\big| ds \Big\} \\ & + \sup_\delta E\Big\{ \sum_{k=0}^{2^n-1} \int_{t^n_k}^{t^n_{k+1}} \frac{2^{2n}}{T^2} \mid W(t^n_k) - W(t^n_{k-1}) \mid^2 \mid s - t^n_{k-1} \mid ds \Big\}. \end{aligned} \tag{4.56}$$

Den ersten Summanden der rechten Seite von (4.56) kann man unter Beachtung der Dreiecksungleichung

$$\mid W(s) - W^\delta(t^n_{k-1}) \mid \leq \mid W(s) - W^\delta(t^n_k) \mid + \mid W(t^n_k) - W^\delta(t^n_{k-1}) \mid$$

weiter abschätzen, und es ergibt sich

$$
\begin{aligned}
&\sup_\delta E\Big\{\sum_{k=0}^{2^n-1}\int_{t_k^n}^{t_{k+1}^n}\frac{1}{\delta}\big|W(s)-W(t_{k-1}^n)\big|\big|W(t_k^n)-W(t_{k-1}^n)\big|ds\Big\}\\
\leq\;& \sup_\delta\Big\{\sum_{k=0}^{2^n-1}\int_{t_k^n}^{t_{k+1}^n}\frac{1}{\delta}\Big[E\big|W(s)-W(t_k^n)\big|\big|W(t_k^n)-W(t_{k-1}^n)\big|\\
&+E\big|W(t_k^n)-W(t_{k-1}^n)\big|^2\Big]ds\Big\}\\
\leq\;& \sup_\delta\Big\{\sum_{k=0}^{2^n-1}\int_{t_k^n}^{t_{k+1}^n}\frac{1}{\delta}\Big[\frac{1}{2}E\big|W(s)-W(t_k^n)\big|^2+\frac{1}{2}E\big|W(t_k^n)-W(t_{k-1}^n)\big|^2\\
&+E\big|W(t_k^n)-W(t_{k-1}^n)\big|^2\Big]ds\Big\}\\
\leq\;& \sum_{k=0}^{2^n-1}\int_{t_k^n}^{t_{k+1}^n}2ds\\
\leq\;& 2T<\infty.
\end{aligned}\tag{4.57}
$$

Betrachten wir nun den zweiten Sumanden auf der rechten Seite von (4.56). Wegen $t_k^n = k2^{-n}T$ ergibt sich weiter

$$
\begin{aligned}
&\sup_\delta E\Big\{\sum_{k=0}^{2^n-1}\int_{t_k^n}^{t_{k+1}^n}\frac{2^{2n}}{T^2}\mid W(t_k^n)-W(t_{k-1}^n)\mid^2\mid s-t_{k-1}^n\mid ds\Big\}\\
=\;& \sup_\delta E\Big\{\sum_{k=0}^{2^n-1}\frac{2^{2n}}{T^2}\mid W(t_k^n)-W(t_{k-1}^n)\mid^2\int_{t_k^n}^{t_{k+1}^n}\mid s-t_{k-1}^n\mid ds\Big\}\\
=\;& \frac{1}{2}\sup_\delta E\sum_{k=0}^{2^n-1}\mid W(t_k^n)-W(t_{k-1}^n)\mid^2\\
=\;& \frac{T}{2}<\infty.
\end{aligned}\tag{4.58}
$$

Mit den Abschätzungen (4.57) und (4.58) folgt dann insbesondere

$$\sup_\delta E\int_0^T\mid W(s)-W^\delta(s)\mid\mid\dot W^\delta(s)\mid ds\leq 3T<\infty. \tag{4.59}$$

Eine entsprechende Rechnung ergibt, dass

$$\sup_\delta E\Big[\int_0^T\mid W(s)-W^\delta(s)\mid\mid\dot W^\delta(s)\mid ds\Big]^2\leq C(T). \tag{4.60}$$

Führen wir die abkürzende Schreibweise

$$\Theta(\delta):=\sup_\delta E\int_0^T\mid W(s)-W^\delta(s)\mid\mid\dot W^\delta(s)\mid ds \tag{4.61}$$

ein, so erhält man mit der Tschebyscheffschen Ungleichung

$$P\Big\{\mid\Theta(\delta)-E\Theta(\delta)\mid\geq N\Big\}\leq\frac{C(T)}{N^2} \tag{4.62}$$

und damit insbesondere

$$\lim_{N \longrightarrow \infty} P\Big\{ \mid \Theta(\delta) - E\Theta(\delta) \mid \geq N \Big\} \leq \lim_{N \longrightarrow \infty} \frac{C(T)}{N^2} = 0. \tag{4.63}$$

Damit gilt

$$\lim_{N \longrightarrow \infty} \tau^2_{N,\delta} = \infty,$$

und somit

$$\lim_{N \longrightarrow \infty} \sup_{\delta > 0} P\Big\{ \tau^2_{N,\delta} < T \Big\} = 0, \tag{4.64}$$

womit die behauptete Konvergenz bewiesen ist.

■

Dieser Satz ermöglicht es uns, die Gleichung (4.9) wie folgt umzuformen

$$v_\delta(t,x) \quad = \quad v_\delta(0,x) - \int_0^t a v_{x,\delta}(s,x) ds - \int_0^t b \dot{w}_\delta(s) v_\delta(s,x)\, ds. \tag{4.65}$$

Für (4.65) können wir stückweise

$$\frac{\partial v_\delta(t,x)}{\partial t} = a \frac{\partial v_\delta(t,x)}{\partial x} + b \dot{w}_\delta(t) v_\delta(t,x) \tag{4.66}$$

schreiben. Bei dieser Gleichung handelt es sich nun um eine gewöhnliche partielle Differentialgleichung, die den Zufall nur noch in den Koeffizienten von $v_\delta(t,x)$ enthält. In der deterministischen Terminologie spricht man hier von Termen niederer Ordnung, die sich entsprechend einfach behandeln lassen. Eine Approximation für $v_\delta(t,x)$ ist zum Beispiel die folgende Version des FTFS-Verfahrens

$$\begin{aligned} u^{n+1}_{k,\delta} &= (1+R)u^n_{k,\delta} - R u^n_{k+1,\delta} + b(W(n\Delta t) - W((n-1)\Delta t))) \frac{\Delta t}{\delta} u^n_{k,\delta} + \frac{b^2 \Delta t}{2} u^n_{k,\delta} \\ &= (1+R)u^n_{k,\delta} - R u^n_{k+1,\delta} + b(W(n\Delta t) - W((n-1)\Delta t))) u^n_{k,\delta} + \frac{b^2 \Delta t}{2} u^n_{k,\delta} \end{aligned} \tag{4.67}$$

für $t \in [t_n\ , t_{n-1})$, mit $\Delta t = t_i - t_{i-1} = \delta$ für $i = 2, ..., 2^n$. Für $t \in [t_0\ , t_1\ )$ definieren wir

$$u^{n+1}_{k,\delta} \quad = \quad (1+R)u^n_{k,\delta} - R u^n_{k+1,\delta} + \frac{b^2 \Delta t}{2} u^n_{k,\delta}. \tag{4.68}$$

Im Folgenden wird nun gezeigt, dass die vorgeschlagene Version (4.67), (4.68) des FTFS-Verfahrens stabil im quadratischen Mittel und konsistent im Sinne von Definition 3.1 ist. Das Verfahren (4.67) unterscheidet sich von dem ursprünglich vorgeschlagenen Verfahren (3.10) dadurch, dass auch der Anteil, der durch das Stratonovich-Integral eingeht, approximiert wird und dass sich die Zuwächse des Wiener-Prozesses um ein Segment nach unten verschieben.

Korollar 4.1. *Das Verfahren (4.67) ist im quadratischen Mittel stabil für $-1 \leq R \leq 0$.*

Beweis: Wendet man den $E|\cdot|^2$ an, so folgt

$$\begin{aligned}
E|u_{k,\delta}^{n+1}|^2 &= E|(1+R)u_{k,\delta}^n - Ru_{k+1,\delta}^n + b(W(n\Delta t) - W((n-1)\Delta t)))u_{k,\delta}^n + \frac{b^2\delta}{2}u_{k,\delta}^n|^2 \\
&= E|(1+R)u_{k,\delta}^n - Ru_{k+1,\delta}^n|^2 + b^2\delta E\left[\left((1+R)u_{k,\delta}^n - Ru_{k+1,\delta}^n\right)u_{k,\delta}^n\right] \\
&\quad + \frac{b^2\delta^2}{4}E|u_{k,\delta}^n|^2 \\
&\leq E|(1+R)u_{k,\delta}^n - Ru_{k+1,\delta}^n|^2 + b^2\delta\left[|1+R|E|u_{k,\delta}^n|^2 + 2|R|\left[E|u_{k+1,\delta}^n|^2 + E|u_{k,\delta}^n|^2\right]\right] \\
&\quad + \frac{b^2\delta^2}{4}E|u_{k,\delta}^n|^2. \qquad (4.69)
\end{aligned}$$

Addiert man nun wieder über alle k, multipliziert die Gleichung mit Δx durch, ordnet die Reihe um und verwendet die Voraussetzung $R = a\frac{\delta}{\Delta x}$, so erhält man

$$\begin{aligned}
\sum_{k+-\infty}^{\infty} E|u_{k,\delta}^{n+1}|^2\Delta x &\leq \sum_{k+-\infty}^{\infty}\left[(|1+R|+|R|)^2 + C_1\delta + C_2\delta^2\right]E|u_{k,\delta}^n|^2\Delta x \\
&\leq (1+C_3\delta)^{n+1}\sum_{k+-\infty}^{\infty} E|u_{k,\delta}^0|^2\Delta x, \qquad (4.70)
\end{aligned}$$

und die Aussage ist bewiesen.

■

Korollar 4.2. *Es sei $v(0,\cdot) \in C^{5,\alpha}$. Das Verfahren (4.67) ist konsistent zur Differentialgleichung (4.6) im Sinne von Definition 3.1.*

Beweis: Offensichtlich gilt

$$\begin{aligned}
&v((n+1)\Delta t, k\Delta x) \\
&= v(n\Delta t, k\Delta x) - \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t}\left(av_x(\tau,k\Delta x) + \frac{b^2}{2}v(\tau,k\Delta x)\right)d\tau - b\int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} v(\tau,k\Delta x)\,dW(\tau) \\
&= v(n\Delta t, k\Delta x) - av_x(n\Delta t, k\Delta x)\Delta t - bv(n\Delta t, k\Delta x)\left(W((n+1)\Delta t) - W(n\Delta t)\right) \\
&\quad - a\int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t}\left(v_x(\tau,k\Delta x) - v_x(n\Delta t,k\Delta x)\right)d\tau \\
&\quad - \frac{b^2}{2}\int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t}\left(v(\tau,k\Delta x) - v(n\Delta, k\Delta x)\right)d\tau - \frac{b^2}{2}v(n\Delta t,k\Delta x)\Delta t \\
&\quad - b\int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t}\left(v(\tau,k\Delta x) - v(n\Delta t,k\Delta x)\right)dW(\tau). \qquad (4.71)
\end{aligned}$$

Setzt man die Taylorentwicklung von $v_x(n\Delta t, k\Delta x)$ ein, so erhält man im quadratischen Mittel mit der Schwarzschen Ungleichung und den Eigenschaften des Itô-Integrales die Abschätzung

$$\begin{aligned}
&E\left|v((n+1)\Delta t, k\Delta x) - v(n\Delta t, k\Delta x) + \frac{a\Delta t}{\Delta x}\left(v(n\Delta t,(k+1)\Delta x) - v(n\Delta t, k\Delta x)\right)\right. \\
&\qquad \left. + \frac{b^2}{2} v(n\Delta t, k\Delta x)\Delta t + bv(n\Delta t, k\Delta x)\left(W((n+1)\Delta t) - W(n\Delta t)\right)\right|^2 \\
&\le \quad 4Ev_{xx}^2(n\Delta t,(k+\vartheta)\Delta x)\Delta t^2\Delta x^2 + 4a^2\Delta t\int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} E\left|v_x(\tau, k\Delta x) - v_x(n\Delta t, k\Delta x)\right|^2 d\tau \\
&\qquad +2b^2\Delta t\int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} E\left|v(\tau, k\Delta x) - v(n\Delta t, k\Delta x)\right|^2 d\tau \\
&\qquad +4b^2\int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} E\left|v(\tau, k\Delta x) - v(n\Delta t, k\Delta x)\right|^2 d\tau. \qquad (4.72)
\end{aligned}$$

Es bleibt an dieser Stelle nur die beiden letzten Terme zu untersuchen, da sich alle anderen Terme abschätzen lassen wie in (3.34) im Beweis von Theorem 3.4. Betrachten wir zuerst den letzten Summanden von (4.72). Nach der Integraldefinition existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein hinreichend kleines Δx, so dass

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} E\left|v(\tau, k\Delta x) - v(n\Delta t, k\Delta x)\right|^2 d\tau \\
&\le \quad \varepsilon + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} E\left|v(\tau, k\Delta x) - v(n\Delta t, k\Delta x)\right|^2 d\tau\, dx. \qquad (4.73)
\end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ eine beliebig kleine positive Zahl ist, kann es auch als Δt^2 gewählt werden. Theorem 2.6 liefert dann

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} E\left|v(\tau, k\Delta x) - v(n\Delta t, k\Delta x)\right|^2 d\tau \le \Delta t^2 + C\Delta t^2. \qquad (4.74)$$

Der vorletzte Summand läßt sich mit einer analogen Überlegung durch $\Delta t^3 + C\Delta t^3$ abschätzen. Das ist die Konsistenz.

■

Die Konvergenz des Schemas (4.67) folgt aus Theorem 3.7 im Sinne des 2. Teiles dieses Theorems, da der allgemeine Fall auch einen Lipschitz-stetigen Term enthält. Es läßt sich aber auch eine A-priori-Abschätzung analog zu der in Theorem 3.4 verwandten aufstellen, so dass man den Beweis analog führen kann.

Mit dieser Approximation haben wir ein Verfahren entwickelt, dass die Lösung von Gleichung (4.6) approximiert. Denn für $\delta \to 0$ approximiert $v_\delta(t,x)$ die ursprüngliche Funktion $v(t,x)$, $v_\delta(t,x)$ selbst wird durch die $u_{k,\delta}^n$ approximiert, so dass man am Ende zumindest eine schwache Approximation erhält. Weitere mögliche Approximationen erhält man durch entsprechende Abwandlung der anderen Verfahren.

4.3 Systeme hyperbolischer Differentialgleichungen

4.3.1 Anfangswertprobleme hyperbolischer Differentialgleichungssysteme

Wir beginnen bei der Betrachtung von Systemen hyperbolischer Differentialgleichungen mit Systemen von Anfangswertproblemen. Wir betrachten Systeme mit konstanten Koeffizienten, wobei die einzelnen Komponenten die folgende Gestalt haben:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} v^{(1)}(t,x) \\ v^{(2)}(t,x) \\ \vdots \\ v^{(m)}(t,x) \end{pmatrix}. \tag{4.75}$$

Dabei sind die Elemente der $m \times m$-Matrix A konstant, bei der Lösung $v(t,x)$ handelt es sich um eine m-dimensionale Vektorfunktion. Der Zufall soll in die Gleichung durch den verrauschten Vektor

$$v(t,x)dW(t) = \begin{pmatrix} v^{(1)}(t,x)dW^{(1)}(t) \\ v^{(2)}(t,x)dW^{(2)}(t) \\ \vdots \\ v^{(m)}(t,x)dW^{(m)}(t) \end{pmatrix}. \tag{4.76}$$

eingehen, wobei die einzelnen $W^{(j)}$, $j = 1, ..., m$, unabhängige Wiener-Prozesse sind. Wir erhalten dann das m-dimensinonale, hyperbolische stochastische Differentialgleichungssystem

$$d_t v(t,x) = A(v_x(t,x)dt + v(t,x)dW(t)). \tag{4.77}$$

Ist die Matrix A diagonalisierbar, so läßt sich die Differentialgleichung entkoppeln, so dass man m skalare Gleichungen erhält, die man separat lösen kann. Dazu bringt man die Matrix A auf Diagonalgestalt

$$S^{-1} A\, S = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_m \end{pmatrix}. \tag{4.78}$$

Führt man dabei neue Variablen

$$v(t,x) = S\tilde{v}(t,x) \tag{4.79}$$

ein, so erhält man für Gleichung (4.77)

$$d_t\tilde{v}(t,x) = \Lambda(\tilde{v}_x(t,x)dt + \tilde{v}(t,x))dW(t) \tag{4.80}$$

und man hat dann nur noch m skalare Gleichungen

$$d_t\tilde{v}^{(j)} = \lambda_j \left(\frac{\partial \tilde{v}^{(j)}}{\partial x} dt + \tilde{v}^{(j)} dW(t) \right). \tag{4.81}$$

zu lösen.

Wir betrachten im Folgenden die etwas allgemeineren Differentialgleichungssysteme

$$d_t v(t,x) = \Lambda \frac{\partial v(t,x)}{\partial x} dt + Bv(t,x)dW(t), \tag{4.82}$$

wobei B eine $m \times m$-Matrix in Diagonalform ist.

4.3.2 Randwertprobleme für Systeme hyperbolischer Differentialgleichungen

Wir betrachten zunächst Randwertaufgaben für Differentialgleichungssysteme

$$d_t\bar{v}(t,x) = A\frac{\partial \bar{v}(t,x)}{\partial x} dt + A\bar{v}(t,x)dW(t) \tag{4.83}$$

für $x \in [0,1]$ und $t \geq 0$, wobei A wiederum eine diagonalisierbare $m \times m$-Matrix ist. Dieses System läßt sich wie im Fall für Anfangswerte skalarisieren, indem wir das Gleichungssystem umformen. Mit der Matrix S der Eigenvektoren von A erhält man

$$S^{-1} A\, S = \Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda^I & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda^{II} & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda^{III} \end{pmatrix}. \tag{4.84}$$

Daraus ergibt sich für das Differentialgleichungssystem (4.83), wenn wir eine neue Variable $v(t,x) := S^{-1}\bar{v}(t,x)$ einführen

$$d_t v(t,x) \;=\; \Lambda \frac{\partial v(t,x)}{\partial x} dt + \Lambda v(t,x)dW(t). \tag{4.85}$$

Dabei enthält die $m \times m$-Diagonalmatrix Λ drei Diagonalmatrizen, Λ^I, Λ^{II} und Λ^{III}, die wie folgt gegeben sind

$$\begin{aligned}
\Lambda^I &= \begin{pmatrix} \lambda_1^I & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2^I & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_j^I \end{pmatrix}, \\
\Lambda^{II} &= \begin{pmatrix} \lambda_{j+1}^{II} & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_{j+2}^{II} & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_k^{II} \end{pmatrix}, \\
\Lambda^{III} &\equiv 0,
\end{aligned} \tag{4.86}$$

wobei für die Dimensionen $j + k + i = m$ gilt. Weiterhin gilt $\lambda_l^I > 0$ für $l = 1, ..., j$, $\lambda_l^{II} < 0$ für $l = j+1, ..., k$ und $\lambda_l^{III} = 0$ für $l = k+1, ..., m$. Dabei ist die Anfangswertfunktion durch

$$\bar{v}(t_0, x) = f(x) \in L^2(\mathbb{R}^m) \tag{4.87}$$

gegeben und die Randwertbedingungen sind durch die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{rcl} \bar{v}^I(t,1) &=& g^I(t) \\ \bar{v}^{II}(t,0) &=& g^{II}(t) \end{array}\right\} \tag{4.88}$$

gegeben. Dabei sind $v^I(t,x)$ die Komponenten von $v(t,x)$ für die gilt $\lambda_l^I > 0$ für $l = 1, ..., j$ und $v^{II}(t,x)$ diejenigen, für die gilt $\lambda_l^I < 0$ für $l = j+1, ..., k$. Man kann hier die Komponenten koppeln, indem man die Randwertbedingungen wie im deterministischen Fall (vgl. [21]) zu

$$\left.\begin{array}{rcl} v^{II}(t,0) &=& R_0^I v^I(t,0) + R_0^{III} v^{III}(t,0) + g^{II}(t) \\ v^I(t,1) &=& R_1^{II} v^{II}(t,1) + R_1^{III} v^{III}(t,1) + g^I(t) \end{array}\right\} \tag{4.89}$$

verallgmemeinert, wobei die R_0^I, R_1^I, R_0^{II}, R_1^{II}, R_0^{III} und R_1^{III} quadratische Matrizen sind, die auch zusätzlich von der Zeit t abhängen können. $\Lambda^{III} = 0$ impliziert

$$v^{III}(t,x) = f^{III}(x)\left(1 + \int_0^t dW(t)\right), \tag{4.90}$$

so dass wir nur die Randwertbedingungen an v^I und v^{II} betrachten müssen. Wir schreiben daher (4.89) wie folgt

$$\left.\begin{array}{rcl} v^{II}(t,0) &=& R^I v^I(t,0) + \tilde{g}^{II}(t), \\ v^I(t,1) &=& R_1^{II} v^{II}(t,1) + R_1^{III} v^{III}(t,1) + \tilde{g}^I(t), \end{array}\right\} \tag{4.91}$$

wobei

$$\left.\begin{array}{rcl} \tilde{g}^{II}(t) &=& g^{II}(t) + R_0^{III} f^{III}(0), \\ \tilde{g}^I(t) &=& g^I(t) + R_0^{III} f^{III}(1). \end{array}\right\} \tag{4.92}$$

Dabei sind $R^I := R_0^I$ und $R^{II} := R_1^{II}$. Die Anfangswertfunktion

$$v(t_0, x) = f(x) \tag{4.93}$$

ist eine m-dimensionale Vektorfunktion mit Komponenten in $L^2[0,1]$. Die Randwertbedingungen sind durch die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{rcl} v^{II}(t,0) &=& R^I(t) v^I(t,0) \\ v^I(t,1) &=& R^{II}(t) v^{II}(t,1) \end{array}\right\} \tag{4.94}$$

gegeben. Dieses System läßt sich, wie wir es in Abschnitt 4.2 für skalare Gleichungen gezeigt haben, durch ein System mit stückweise differenzierbaren Wiener-Prozessen approximieren:

$$\begin{aligned} d_t v_\delta(t,x) &= \Lambda \frac{\partial v_\delta(t,x)}{\partial x} dt + \Lambda v_\delta(t,x) dW^\delta(t) \\ &= \big(\Lambda \frac{\partial v_\delta(t,x)}{\partial x} + \Lambda \dot{w}_\delta v_\delta(t,x)\big) dt, \end{aligned} \tag{4.95}$$

wobei der Ausdruck $\Lambda\dot{w}_\delta v_\delta(t,x)dt$ durch

$$\int_0^t \Lambda\dot{w}_\delta v_\delta(t,x)dt = \frac{1}{\delta}\Lambda \sum_{i=1}^{2^n-1} \big(W(i\Delta t) - W((i-1)\Delta t)\big) \int_{t_i}^{t_{i+1}} v_\delta(t,x)\, dt \tag{4.96}$$

gegeben ist.

Im Folgenden betrachten wir entkoppelte approximierte Differentialgleichungssysteme

$$\begin{aligned} d_t v_\delta(t,x) &= \Lambda\frac{\partial v_\delta(t,x)}{\partial x}dt + Bv_\delta(t,x)dW^\delta(t) \\ &= \big(\Lambda\frac{\partial v_\delta(t,x)}{\partial x} + B\dot{w}_\delta v_\delta(t,x)\big)dt, \end{aligned} \tag{4.97}$$

wobei die Matrix B eine $m \times m$-Diagonalmatrix ist.

Definition 4.1. Ein Problem

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{\partial v_\delta(t,x)}{\partial t} &= P(t,x,\tfrac{\partial}{\partial x},\omega)v_\delta(t,x) + F(t,x), \quad \text{mit } 0 \le x \le 1 \text{ und } t \ge t_0 := 0 \\ v_\delta(t_0,x) &= f(x), \end{aligned}\right\} \tag{4.98}$$

wobei $F(t,x) \in L^2([0,T]\times[0,1])$ ist, mit den Randwertbedingungen

$$\left.\begin{aligned} v_\delta(t,0) &= g^{II}(t) \\ v_\delta(t,1) &= g^{I}(t) \end{aligned}\right\} \tag{4.99}$$

und $F = g^I = g^{II} = 0$ heißt wohlgestellt, falls für jede Funktion $f \in C^\infty$, die nahe den Randwerten $x = 0$ und $x = 1$ verschwindet, eine Lösung existiert, für die

$$\|v_\delta(t,\cdot)\|^2 \le Ke^{\alpha(t-t_0)}\|v_\delta(t_0,\cdot)\|^2 \tag{4.100}$$

gilt, wobei die Konstanten K und α unabhängig von der Anfangswertfunktion f und dem Startpunkt t_0 sind.

Die Definition für den inhomogenen Fall erfolgt später (Definition 4.2). Dann gilt das folgende Theorem.

Theorem 4.2. *Sei $v_\delta(t,\cdot)$ eine Lösung des Problems (4.97), (4.93), (4.94). Dann ist das Problem wohlgestellt, d.h. es gilt*

$$\begin{aligned} \|v_\delta(t,\cdot)\|^2 &\le Ke^{2\alpha t}\|v_\delta(0,\cdot)\|^2 \\ &= Ke^{2\alpha t}\|f\|^2, \end{aligned} \tag{4.101}$$

wobei $\alpha = \alpha(\omega)$ und K eine positive Konstante ist.

Beweis: $(\cdot,\cdot)$ bezeichne das Skalarprodukt im $\mathbb{R}^m$. Differenziert man den Ausdruck $\|v_\delta\|^2$ bezüglich der Zeit t, so erhält man die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\|v_\delta(t,x))\|^2}{\partial t} &= \big\langle\frac{\partial v_\delta(t,x)}{\partial t}, v_\delta(t,x)\big\rangle + \big\langle v_\delta(t,x), \frac{\partial v_\delta(t,x)}{\partial t}\big\rangle \\
&= \big\langle \Lambda v_{x,\delta}(t,x), v_\delta(t,x)\big\rangle + \big\langle v_\delta(t,x), \Lambda v_{x,\delta}(t,x)\big\rangle \\
&\quad + \sum_{i=1}^{2^n-1}\Big[\big\langle\frac{B}{\delta}v_\delta(t,x)\big(W(i\Delta t)-W((i-1)\Delta t)\big), v_\delta(t,x)\big\rangle \\
&\quad + \big\langle v_\delta(t,x), \frac{B}{\delta}v_\delta(t,x)\big(W(i\Delta t)-W((i-1)\Delta t)\big)\big\rangle\Big] \\
&\le 2\alpha\|v_\delta\|^2 - \big\langle v_\delta(t,x), \Lambda_x v_\delta(t,x)\big\rangle + \left(v_\delta(t,x), \Lambda v_\delta(t,x)\right)\Big|_0^1 \\
&\le 2\alpha\|v_\delta\|^2 + \left(v_\delta(t,x), \Lambda v_\delta(t,x)\right)\Big|_0^1,
\end{aligned} \tag{4.102}$$

wobei

$$\begin{aligned}
&\frac{\big|\big\langle v_\delta(t,x), \big((B+B^*)\delta^{-1}\sum_{i=1}^{2^n-1}\big(W(i\Delta t)-W((i-1)\Delta t)\big)-\Lambda_x\big)v_\delta(t,x)\big\rangle\big|}{\|v_\delta\|^2} \\
\le\ & \|(B+B^*)\delta^{-1}\sum_{i=1}^{2^n-1}\big(W(i\Delta t)-W((i-1)\Delta t)\big)-\Lambda_x\| \\
\le\ & \max_{t\in[0,T], i\in\{1,\ldots,2^n\}}\|(B+B^*)\big(W(i\Delta t)-W((i-1)\Delta t)\big)-\Lambda_x\| \\
=:\ & \alpha(\omega).
\end{aligned} \tag{4.103}$$

Setzt man die zweite der Randwertbedingungen aus (4.94) ein, so erhält man

$$\begin{aligned}
(v_\delta(t,1), \Lambda v_\delta(t,1)) &= \big(v_\delta^I(t,1), \Lambda^I v_\delta^I(t,1)\big) + \big(v_\delta^{II}(t,1), \Lambda^{II} v_\delta^{II}(t,1)\big) \\
&= \big(R^{II}(t)v_\delta^{II}(t,1), \Lambda^I R^{II}(t)v_\delta^{II}(t,1)\big) + \big(v_\delta^{II}(t,1), \Lambda^{II} v_\delta^{II}(t,1)\big) \\
&= \big(v_\delta^{II}(t,1), C(t,1)v_\delta^{II}(t,1)\big),
\end{aligned} \tag{4.104}$$

wobei $C(t,1) = \Lambda^{II}(t,1) + R^{II*}(t)\Lambda^I R^{II}(t)$. Wir betrachten zunächst den Fall, dass $|R^{II}(t)|$ genügend klein ist. Dann gilt insbesondere

$$C(t,1) < \frac{1}{2}\Lambda^{II}(t,1), \tag{4.105}$$

womit sich die Gleichung (4.104) durch

$$(v_\delta(t,1), \Lambda v_\delta(t,1)) \le -\frac{\lambda_0}{2}\|v_\delta(t,1)\|^2 \tag{4.106}$$

mit $\lambda_0 := \min_l\{|\lambda_l^{II}|:\ l = j+1, ..., k\}$ abschätzen läßt. Eine entsprechende Abschätzung erhält man auch für

$$-\left(v_\delta(t,0), \Lambda v_\delta(t,0)\right) \le -\frac{\lambda_0}{2}\|v_\delta^I(t,0)\|^2. \tag{4.107}$$

Damit hat man für $|R^{II}(t)|$ genügend klein gezeigt, dass

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\|v_\delta(t,x)\|^2}{\partial t} + \frac{\lambda_0}{2}\Big[|v_\delta^I(t,1)|^2 + |v_\delta^{II}(t,0)|^2\Big] &\le 2\alpha\|v_\delta(0,x)\|^2, \\
\|v_\delta(t,x)\|^2 + \int_0^t \Big[|v_\delta(\tau,1)|^2 + |v_\delta(\tau,0)|^2\Big]\,d\tau &\le Ke^{2\alpha t}\|v_\delta(0,x)\|^2,
\end{aligned} \tag{4.108}$$

für eine Konstante K. Dabei wurde ausgenutzt, dass $v_\delta^I(t,1)$ und $v_\delta^{II}(t,0)$ als Linearkombinationen von $v_\delta^{II}(t,1)$ und $v_\delta^I(t,0)$ dargestellt werden können.

Wir betrachten nun den Fall, dass $R^I(t)$ und $R^{II}(t)$ nicht genügend klein sind. Wir führen in Gleichung (4.97) eine neue Funktion $d = d(x)$ ein, die nur von x abhängt. Wir setzen

$$v_\delta^I(t,x) = z^I(t,x), \tag{4.109}$$

$$v_\delta^{II}(t,x) = d(x) z^{II}(t,x). \tag{4.110}$$

Dabei ist dann die Funktion $z(t,x) = (z^I(t,x), z^{II}(t,x))^T$ Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{\partial z(t,x)}{\partial t} = \Lambda \frac{\partial z(t,x)}{\partial x} + B_d \dot{w}_\delta z(t,x) \tag{4.111}$$

mit $B_d = B_d(B, d(x))$. Für die beiden Randwertbedingungen gelten die Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} z^{II}(t,0) &= d^{-1}(0) R^I(t) z^I(t,0) \\ z^I(t,1) &= d(1) R^{II}(t) z^{II}(t,1). \end{aligned}\right\} \tag{4.112}$$

Man kann sich jetzt wieder durch eine geschickte Wahl der Funktion $d(x)$ die Situation des ersten Beweisschrittes herstellen, indem man für $d(x)$ eine glatte, invertierbare Funktion wählt, so dass $d^{-1}(0)R^I(t)$ und $d(1)R^{II}(t)$ genügend klein sind. Damit erhalten wir die Abschätzungen für $v_\delta(t,x)$.

■

Eine Verschärfung des Begriffs der Wohlgestelltheit ist die starke Wohlgestelltheit, bei der auf das Verschwinden der Funktion F und der Randwerte verzichtet wird.

Definition 4.2. Ein Problem

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial v_\delta(t,x)}{\partial t} &= P(t,x,\tfrac{\partial}{\partial x},\omega) v_\delta(t,x) + F(t,x), \quad \text{mit } 0 \le x \le 1 \text{ und } t \ge t_0 := 0 \\ v_\delta(t_0,x) &= f(x), \end{aligned}\right\} \tag{4.113}$$

wobei $F(t,x) \in L^2([0,T] \times [0,1])$ ist, mit den Randwertbedingungen

$$\left.\begin{aligned} v_\delta(t,0) &= g^{II}(t) \\ v_\delta(t,1) &= g^I(t) \end{aligned}\right\} \tag{4.114}$$

heißt stark wohlgestellt, falls es wohlgestellt ist im Sinne von Definition 4.1 und die folgende Abschätzung gilt

$$\begin{aligned} \|v_\delta(t,\cdot)\|^2 \le\ & K(t,t_0,\omega)\Big(\|v_\delta(t_0,\cdot)\|^2 + \int_{t_0}^t \|F(\tau,\cdot)\|^2 \\ & + |g^I(\tau)|^2 + |g^{II}(\tau)|^2 + |\left(g^I\right)'(\tau)|^2 + |\left(g^{II}\right)'(\tau)|^2 \big) \, d\tau \Big). \end{aligned} \tag{4.115}$$

Dabei ist die Funktion $K(t,t_0,\omega)$ für festes ω beschränkt auf jedem endlichen Zeitintervall $[0,T]$ und unabhänging von der Anfangswertfunktion f und dem Startpunkt t_0. $\|\cdot\|$ ist die Norm auf $L^2[0,1] \times ... \times L^2[0,1]$.

Im Folgenden soll gezeigt werden, dass das betrachtete inhomogene Randwertproblem auch dieser Definition genügt.

Theorem 4.3. *Für stochastische, hyperbolische Systeme (4.113) mit allgemeinen inhomogenen Randwertbedingungen*

$$\left.\begin{array}{rcl} v_\delta^{II}(t,0) & = & R^I(t)v_\delta^I(t,0)+g^{II}(t) \\ v_\delta^I(t,1) & = & R^{II}(t)v_\delta^{II}(t,1)+g^I(t) \end{array}\right\} \tag{4.116}$$

ist das Anfangsrandwertproblem (ARWP) stark wohlgestellt, d.h. es gilt (4.115).

Beweis: Wir führen zwei neue Variablen

$$\left.\begin{array}{rcl} \tilde{v}_\delta^I(t,x) & := & v_\delta^I(t,x)+g^I(t)x \\ \tilde{v}_\delta^{II}(t,x) & := & v_\delta^{II}(t,x)+g^{II}(t)(1-x) \end{array}\right\} \tag{4.117}$$

ein und erhalten dadurch ein Problem mit homogenen Randwerten

$$\left.\begin{array}{rclcl} \tilde{v}_\delta^I(t,1) & := & R^{II}(t)\tilde{v}_\delta^{II}(t,1) & = & R^{II}(t)v_\delta^{II}(t,1) \\ \tilde{v}_\delta^{II}(t,0) & := & R^I(t)v_\delta^I(t,0) & = & R^I(t)v_\delta^I(t,0), \end{array}\right\} \tag{4.118}$$

wobei sich aber die Anfangswertfunktion und die Funktion F ändern. Es gilt insbesondere

$$\left.\begin{array}{rcl} \frac{\partial\tilde{v}_\delta^I(t,x)}{\partial t} & = & \Lambda^I\frac{\partial v_\delta^I(t,x)}{\partial x}-g^I(t)+B^Iv_\delta^I(t,x)\dot{W}_\delta(t)+g^I(t)\dot{W}_\delta(t) \\ & & +F^I(t,x)-\left(g^I\right)'(t)x \\ \frac{\partial\tilde{v}_\delta^{II}(t,x)}{\partial t} & = & \Lambda^{II}\frac{\partial v_\delta^{II}(t,x)}{\partial x}+g^{II}(t)+B^{II}v_\delta^{II}(t,x)\dot{W}_\delta(t)+g^{II}(t)\dot{W}_\delta(t) \\ & & +F^{II}(t,x)-\left(g^{II}\right)'(t)(1-x). \end{array}\right\} \tag{4.119}$$

Differenziert man den Ausdruck $\|\tilde{v}_\delta\|^2$ bezüglich der Zeit t, so erhält man mit (4.119) die Abschätzung

$$\begin{aligned} & \frac{\partial\|\tilde{v}_\delta(t,x))\|^2}{\partial t} \\ = & \left\langle\frac{\partial\tilde{v}_\delta(t,x)}{\partial t},\tilde{v}_\delta(t,x)\right\rangle+\left\langle\tilde{v}_\delta(t,x),\frac{\partial\tilde{v}_\delta(t,x)}{\partial t}\right\rangle \\ = & \left\langle\Lambda v_{x,\delta}(t,x),v_\delta(t,x)\right\rangle+\left\langle v_\delta(t,x),\Lambda v_{x,\delta}(t,x)\right\rangle \\ & +\left\langle v_\delta(t,x),F(t,x)+g(t)-(g)'(t)h(x)\right\rangle+\left\langle F(t,x)+g(t)+(g)'(t)h(x),v_\delta(t,x)\right\rangle \\ & +\sum_{i=1}^{2^n-1}\Big[\Big\langle\left(\frac{B}{\delta}v_\delta(t,x)+\frac{g(t)}{\delta}\right)\big(W(i\Delta t)-W((i-1)\Delta t)\big),v_\delta(t,x)\Big\rangle \\ & +\Big\langle v_\delta(t,x),\left(\frac{B}{\delta}v_\delta(t,x)+\frac{g(t)}{\delta}\right)\big(W(i\Delta t)-W((i-1)\Delta t)\big)\Big\rangle\Big] \\ = & -\left\langle v_\delta(t,x),\Lambda_x v_\delta(t,x)\right\rangle+\left.\left(\tilde{v}_\delta(t,x),\Lambda\tilde{v}_\delta(t,x)\right)\right|_0^1 \\ & +\left\langle v_\delta(t,x),F(t,x)+g(t)-(g)'(t)h(x)\right\rangle+\left\langle F(t,x)+g(t)+(g)'(t)h(x),v_\delta(t,x)\right\rangle \\ & +\sum_{i=1}^{2^n-1}\Big[\Big\langle\left(\frac{B}{\delta}v_\delta(t,x)+\frac{g(t)}{\delta}\right)\big(W(i\Delta t)-W((i-1)\Delta t)\big),v_\delta(t,x)\Big\rangle \\ & +\Big\langle v_\delta(t,x),\left(\frac{B}{\delta}v_\delta(t,x)+\frac{g(t)}{\delta}\right)\big(W(i\Delta t)-W((i-1)\Delta t)\big)\Big\rangle\Big]. \end{aligned} \tag{4.120}$$

wobei

$$h(x) = \begin{pmatrix} h^I(x) \\ h^{II}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 1-x \end{pmatrix}, \qquad g(t) = \begin{pmatrix} g^I(t) \\ g^{II}(t) \end{pmatrix}.$$

Schätzt man nun alle Summanden der rechten Seite von (4.120) ab, wie dies hier exemplarisch für fünften Summanden (vgl. dazu Beziehung (4.96)) geschieht

$$\begin{aligned}
&\Big\langle \left(\frac{B}{\delta}v_\delta(t,x) + \frac{g(t)}{\delta}\right) \sum_{i=1}^{2^n-1} \big(W(i\Delta t) - W((i-1)\Delta t)\big), v_\delta(t,x)\Big\rangle \\
\leq\ & \Big\langle \frac{B}{\delta}v_\delta(t,x) \sum_{i=1}^{2^n-1} \big(W(i\Delta t) - W((i-1)\Delta t)\big), v_\delta(t,x)\Big\rangle \\
& + \Big\langle \frac{g(t)}{\delta} \sum_{i=1}^{2^n-1} \big(W(i\Delta t) - W((i-1)\Delta t)\big), v_\delta(t,x)\Big\rangle \\
\leq\ & \frac{\left|\big\langle v_\delta(t,x) \sum_{i=1}^{2^n-1} \big(W(i\Delta t) - W((i-1)\Delta t)\big), v_\delta(t,x)\big\rangle\right|}{\|v_\delta(t,x)\|^2} \cdot \|v_\delta(t,x)\|^2 \\
& + \beta(t,\omega)\left(\|v_\delta(t,x)\|^2 + |g(t)|^2\right) \\
\leq\ & \alpha(t,\omega)\left(\|v_\delta(t,x)\|^2 + |g(t)|^2\right),
\end{aligned} \tag{4.121}$$

so kann man (4.120) abschätzen durch

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\|\tilde v_\delta(t,x))\|^2}{\partial t} \leq\ & \beta(t,\omega)\Big(\|v_\delta(t,x)\|^2 + \|F^I(t,x)\|^2 + \|F^{II}(t,x)\|^2 + \|g(t)\|^2 \\
& + \|\left(g^I\right)'(t)\|^2 + \|\left(g^{II}\right)'(t)\|^2\Big) + \left(\tilde v_\delta(t,x), \Lambda \tilde v_\delta(t,x)\right)\Big|_0^1.
\end{aligned} \tag{4.122}$$

Setzt man die zweite der Randwertbedingungen aus (4.118) ein, so erhält man

$$\begin{aligned}
(\tilde v_\delta(t,1), \Lambda\tilde v_\delta(t,1)) &= \big(v_\delta^I(t,1), \Lambda^I v_\delta^I(t,1)\big) + \big(v_\delta^{II}(t,1), \Lambda^{II} v_\delta^{II}(t,1)\big) \\
&= \big(R^{II}(t)v_\delta^{II}(t,1), \Lambda^I R^{II}(t)v_\delta^{II}(t,1)\big) + \big(v_\delta^{II}(t,1), \Lambda^{II} v_\delta^{II}(t,1)\big) \\
&= \big(v_\delta^{II}(t,1), C(t,1)v_\delta^{II}(t,1)\big),
\end{aligned} \tag{4.123}$$

wobei $C(t,1) = \Lambda^{II}(t,1) + R^{II*}(t)\Lambda^I R^{II}(t)$. Wir betrachten zunächst den Fall, dass $|R^{II}(t)|$ genügend klein ist. Dann gilt insbesondere

$$C(t,1) < \frac{1}{2}\Lambda^{II}(t,1), \tag{4.124}$$

womit sich die Gleichung (4.123) durch

$$(v_\delta(t,1), \Lambda v_\delta(t,1)) \leq -\frac{\lambda_0}{2}\|v_\delta(t,1)\|^2 \tag{4.125}$$

mit $\lambda_0 := \min_l\{|\lambda_l^{II}| :\ l = j+1, ..., k\}$ abschätzen läßt. Eine entsprechende Abschätzung erhält man auch für

$$-\left(v_\delta(t,0), \Lambda v_\delta(t,0)\right) \leq -\frac{\lambda_0}{2}\|v_\delta^I(t,0)\|^2. \tag{4.126}$$

Damit hat man für $|R^{II}(t)|$ genügend klein gezeigt, dass gilt:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\|v_\delta(t,x)\|^2}{\partial t} + \frac{\lambda_0}{2}\left[|v_\delta^I(t,1)|^2 + |v_\delta^{II}(t,0)|^2\right] \\
&\leq \gamma(t,\omega)\left(\|v_\delta(0,x)\|^2 + \|F^I(t,x)\|^2 + \|F^{II}(t,x)\|^2 + \|g(t)\|^2\right. \\
&\quad \left. + \|\left(g^I\right)'(t)\|^2 + \|\left(g^{II}\right)'(t)\|^2\right). \qquad (4.127)
\end{aligned}$$

Daraus erhält man

$$\begin{aligned}
&\|v_\delta(t,x)\|^2 + \int_0^t \left[|v_\delta(\tau,1)|^2 + |v_\delta(\tau,0)|^2\right] d\tau \\
&\leq K(t,t_0,\omega)\left(\|v_\delta(0,x)\|^2 + \int_0^t \left(\|F^I(t,x)\|^2 + \|F^{II}(t,x)\|^2 + \|g(t)\|^2\right.\right. \\
&\quad \left.\left. + \|\left(g^I\right)'(t)\|^2 + \|\left(g^{II}\right)'(t)\|^2\right) d\tau\right). \qquad (4.128)
\end{aligned}$$

Dabei wurde ausgenutzt, dass $\tilde{v}_\delta^I(t,1)$ und $\tilde{v}_\delta^{II}(t,0)$ als Linearkombinationen von $\tilde{v}_\delta^{II}(t,1)$ und $\tilde{v}_\delta^I(t,0)$ dargestellt werden können.

Wir betrachten nun den Fall, dass $R^I(t)$ und $R^{II}(t)$ nicht genügend klein sind. Wir führen in Gleichung (4.97) wiederum eine neue Funktion $d = d(x)$ ein, die nur von x abhängt. Es sei

$$\tilde{v}_\delta^I(t,x) = z^I(t,x), \qquad (4.129)$$

$$\tilde{v}_\delta^{II}(t,x) = d(x)z^{II}(t,x). \qquad (4.130)$$

Dabei ist dann die Funktion $z(t,x) = (z^I(t,x), z^{II}(t,x))^T$ Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{\partial z(t,x)}{\partial t} = \Lambda\frac{\partial z(t,x)}{\partial x} + B_d\dot{w}_\delta z(t,x) \qquad (4.131)$$

mit $B_d = B_d(B, d(x))$. Für die beiden Randwertbedingungen gelten die Beziehungen

$$\left.\begin{aligned}
z^{II}(t,0) &= d^{-1}(0)R^I(t)z^I(t,0) \\
z^I(t,1) &= d(1)R^{II}(t)z^{II}(t,1).
\end{aligned}\right\} \qquad (4.132)$$

Durch geschickte Wahl von $d(x)$, kann man sich wieder die Situation des ersten Beweisschrittes von Theorem 4.2 herstellen, womit wir die Abschätzungen für $v_\delta(t,x)$ erhalten.

■

Nachfolgend werden „Energie-Abschätzungen“der Form

$$2\Re\langle Pv_\delta, v_\delta\rangle = \langle Pv_\delta, v_\delta\rangle + \langle v_\delta, Pv_\delta\rangle \leq \alpha(\omega)\|v_\delta\|^2$$

für die Differentialgleichung

$$\frac{\partial v_\delta(t,x)}{\partial t} = Pv_\delta, \qquad (4.133)$$

für $0 \leq x \leq 1$ und $t_0 \leq t \leq T < \infty$ betrachtet. Dabei galt für die Randwertbedingungen

$$v_\delta(t,0) = 0 = v_\delta(t,1). \qquad (4.134)$$

Falls der rechte Randpunkt $+\infty$ ist, so kann die Randwertbedingung an der Stelle $x = 1$ durch die Bedingung $\|v_\delta(t, \cdot)\| < \infty$ ersetzt werden, und man kann annehmen, dass $v_\delta(t, x)$ und alle Ableitungen gegen Null gehen, falls $x \to \infty$.

Es empfiehlt sich für die späteren Betrachtungen den Operator P für festes t zu charakterisieren.

Definition 4.3. Ein Operator P heißt halbbeschränkt, falls eine positve Konstante $\alpha = \alpha(\omega)$ existiert, so dass für alle Funktionen $z \in \mathcal{V} := \{z \in C^\infty, z(0) = 0 = z(1)\}$

$$2\Re\langle Pz, z\rangle = \langle Pz, z\rangle + \langle z, Pz\rangle \leq \alpha(\omega)\|z\|^2 \tag{4.135}$$

gilt. Ist dabei der rechte Randpunkt $+\infty$, so ersetzt man die rechte Randwertbedingung $z(1) = 0$ durch die Forderung $\|z\| < \infty$.

Im Folgenden wäre natürlich ein Theorem ideal, welches die Wohlgestelltheit eines stochastischen Randwertproblems für den Fall, dass der Operator P halbbeschränkt ist, garantiert. Aber eine solche Aussage gilt schon im deterministischen Fall nicht, vgl. [21]. Man kann durch Hinzunahme weiterer Randwertbedingungen das Problem so verändern, dass zwar der Operator P halbbeschränkt bleibt, das Randwertproblem aber keine Lösung mehr hat, weil die Lösung am Rand überbestimmt ist.

Definition 4.4. Wir betrachten das Problem (4.97), (4.93), (4.116).

(i) Wir nennen das Problem wohlgestellt im verallgemeinerten Sinne für den Fall $f \equiv g^I \equiv g^{II} \equiv 0$, falls für eine glatte, kompatible Funktion F eine Lösung existiert, die die Abschätzung

$$\int_0^\infty e^{-2\eta t}\|v_\delta(t, \cdot)\|^2 \leq K(\eta) \int_0^\infty e^{-2\eta t}\|F(t, \cdot)\|^2\, dt \tag{4.136}$$

für alle $\eta(\omega) > \eta_0$ erfüllt, wobei $\lim_{\eta\to\infty} K(\eta) = 0$. Dabei sind die Konstanten η_0 und $K(\eta, \omega)$ unabhängig von F.

(ii) Wir nennen das Problem stark wohlgestellt im verallgemeinerten Sinne, falls

$$\int_0^\infty e^{-2\eta t}\|v_\delta(t, \cdot)\|^2 \leq K(\eta) \int_0^\infty e^{-2\eta t} \left(\|F(t, \cdot)\|^2 + |g^I(t)|^2 + |g^{II}(t)|^2\right)\, dt \tag{4.137}$$

für alle $\eta(\omega) > \eta_0$ erfüllt ist, wobei $\lim_{\eta\to\infty} k(\eta) = 0$. Dabei sind die Konstanten η_0 und $K(\eta, \omega)$ unabhängig von F.

Bemerkung 4.2. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man annehmen, dass die Funktion f konstant Null ist. Andernfalls betrachtet man einfach eine neue Variable. Man setzt

$$\tilde{v}_\delta(t, x) = v_\delta(t, x) - h(t)f(x), \tag{4.138}$$

wobei $h(t),\ t \in [0, T]$, eine glatte Funktion mit $h(0) = 1$ ist.

Theorem 4.4. *Angenommen, der Operator* $P = P(t, x, \frac{\partial}{\partial x}, \dot{w}_\delta)$ *ist halbbeschränkt, d.h. es gilt*

$$\Re(v_\delta, Pv_\delta) \leq \alpha \|v_\delta\|^2, \tag{4.139}$$

wobei $\alpha = \alpha(\omega)$*. Dann ist das Problem (4.97), (4.93), (4.94) wohlgestellt im verallgemeinerten Sinne.*

Beweis: Mit der Substitution $z(t,x) := e^{-\eta t} v_\delta(t,x)$ ergibt sich

$$\frac{\partial z(t,x)}{\partial t} = e^{-\eta t} \frac{\partial v_\delta(t,x)}{\partial t} - \eta e^{-\eta t} v_\delta(t,x), \tag{4.140}$$

damit erhält man für (4.97)

$$\frac{\partial z(t,x)}{\partial t} = (P - \eta I) z(t,x) - \eta e^{-\eta t} F(t,x) =: Cz(t,x). \tag{4.141}$$

Es gilt die folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \|z(t,x)\|^2}{\partial t} \\
&= \big\langle Cz(t,x), z \big\rangle + \big\langle z, Cz(t,x) \big\rangle \\
&= \Big\langle A \frac{\partial z(t,x)}{\partial x} + (B\dot{w}_\delta - \eta I)\, z(t,x), z(t,x) \Big\rangle + \Big\langle z(t,x), A \frac{\partial z(t,x)}{\partial x} + (B\dot{w}_\delta - \eta I)\, z(t,x) \Big\rangle \\
&\quad + 2\big\langle z(t,x), e^{-\eta t} F(t,x) \big\rangle \\
&= \big\langle Pz(t,x), z(t,x) \big\rangle + \big\langle z(t,x), Pz(t,x) \big\rangle - 2\eta \big\langle z(t,x), z(t,x) \big\rangle + 2\big\langle z(t,x), e^{-\eta t} F(t,x) \big\rangle \\
&\leq 2\alpha(\omega)\|z(t,x)\|2 - 2\eta \|z(t,x)\|^2 + \tilde{\eta}\|z(t,x)\|^2 + \frac{1}{\tilde{\eta}} \|F(t,x)\|^2, \\
&= -\tilde{\eta}\|z(t,x)\|^2 + \frac{1}{\tilde{\eta}} \|F(t,x)\|^2,
\end{aligned} \tag{4.142}$$

wobei $\|\cdot\|$ die euklidische Norm und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Skalarprodukt im $\mathbb{R}^m$ ist. Dabei wurde bei der Abschätzung die zufällige Konstante $\tilde{\eta}(\omega)$ so gewählt, dass

$$\tilde{\eta} = \tilde{\eta}(\omega) := \eta - \alpha(\omega) > 0 \tag{4.143}$$

gilt. Mit der Lösungsformel für gewöhnliche lineare Differentialgleichungen kann man das Normquadrat der Lösung wie folgt abschätzen:

$$\|z(t,\cdot)\|^2 \leq \int_0^t e^{-\tilde{\eta}(t-\tau)} G(\tau)\, d\tau, \tag{4.144}$$

wobei die Funktion $G(\tau)$ durch $G(\tau) := \frac{1}{\tilde{\eta}} \|F(t,\cdot)\|^2$ definiert ist. Wir führen weiter die Funktion

$$\varphi(t) := \begin{cases} e^{-\tilde{\eta} t}, & \text{für} \quad t \geq 0, \\ 0, & \text{für} \quad t < 0 \end{cases} \tag{4.145}$$

ein. Damit kann man die Wohlgestelltheit im verallgemeinerten Sinn zeigen:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \|z(t,x)\|^2 dt &\leq \int_0^\infty \left(\int_0^t \varphi(t-\tau)G(\tau)\,d\tau\right)\,dt\\ &\leq \int_0^\infty \left(\int_\tau^\infty \phi(t-\tau)\,dt\right)G(\tau)\,d\tau\\ &\leq \int_0^\infty \left[\frac{-1}{\tilde{\eta}}\varphi(t-\tau)\Big|_{t=\tau}^\infty\right]G(\tau)\,d\tau\\ &= \frac{1}{\eta}\int_0^\infty G(\tau)\,d\tau\\ &= \frac{1}{\tilde{\eta}^2}\int_0^\infty e^{-2\tilde{\eta}\tau}\|F(\tau,\cdot)\|^2\,d\tau. \qquad (4.146)\end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung gezeigt. ∎

Man kann zeigen, dass das Problem (4.97), (4.93), (4.94) bereits wohlgestellt ist, wenn das deterministische Problem wohlgestellt ist, d.h. es gilt das folgende Theorem.

Theorem 4.5. *Angenommen, das deterministische Problem*

$$\frac{\partial v(t,x))}{\partial t} = A\frac{\partial}{\partial x}v(t,x) + F(t,x)$$

ist wohlgestellt im verallgemeinerten Sinne. Dann ist auch das stochastische Problem

$$\frac{\partial v_\delta(t,x))}{\partial t} = \left(A\frac{\partial}{\partial x} + B\dot{w}_\delta\right)v_\delta(t,x) + F(t,x) \qquad (4.147)$$

für $0 \leq x \leq 1$ *und* $0 \leq t \leq T$ *mit*

$$v_\delta(0,x) \;=\; 0 \qquad (4.148)$$

und homogenen Randwertbedingungen wohlgestellt.

Beweis: Formal kann man den Term $P_0 v_\delta(t,x) := B\dot{w}_\delta v_\delta(t,x)$ als einen zusätzlichen Term betrachten. Dann gilt nach der Annahme

$$\int_0^\infty e^{-2\eta t}\|v_\delta(t,\cdot)\|^2 \leq K(\eta)\int_0^\infty e^{-2\eta t}\left(\|P_0 v_\delta(t,\cdot)\|^2 + \|F(t,\cdot)\|^2\right)\,dt. \qquad (4.149)$$

Eine einfache Umformung ergibt nun, dass

$$(1-\alpha(\omega)K(\eta))\int_0^\infty e^{-2\eta t}\|z(t,\cdot)\|^2 \leq K(\eta)\int_0^\infty e^{-2\eta t}\|F(t,\cdot)\|^2\,dt. \qquad (4.150)$$

Setzt man nun

$$K_1(\eta,\omega) := \frac{K(\eta)}{1-\alpha(\omega)K(\eta)}, \qquad (4.151)$$

so gilt $\lim_{\eta\to\infty} K_1(\eta,\omega) = 0$, und damit ist die Behauptung bewiesen.

∎

Theorem 4.6. *Das stochastische Problem*

$$\frac{\partial v_\delta(t,x))}{\partial t} = \left(\Lambda \frac{\partial}{\partial x} + B\dot{w}_\delta\right) v_\delta(t,x) + F(t,x) \tag{4.152}$$

für $0 \le x \le 1$ und $0 \le t \le T$ mit der Anfangswertbedingung

$$v_\delta(0,x) \quad = \quad 0 \tag{4.153}$$

und den Randwertbedingungen

$$\left.\begin{array}{rcl} v_\delta(t,0) & = & g_0(t) \\ \|v_\delta(t,\cdot)\| & < & \infty \end{array}\right\} \tag{4.154}$$

für jedes feste t ist stark wohlgestellt im verallgemeinerten Sinne.

Beweis: Wendet man die Laplace-Transformation

$$\hat{z}(s,x) = \int_0^\infty e^{-st} z(t,x) dt \tag{4.155}$$

auf Gleichung (4.152) an, wobei $s = i\xi + \eta$ und $\xi,\ \eta \in \mathbb{R}^1$ gesetzt wird, so erhält man

$$\int_0^\infty e^{-st} d_t v_\delta(t,x)\, dt = \Lambda \int_0^\infty e^{-st} \left(v_{x,\delta}(t,x) + F(t,x)\right) dt + B \int_0^\infty e^{-st} \dot{w}_\delta v_\delta(t,x)\, dt. \tag{4.156}$$

Wenn man die linke Seite der Gleichung partiell integriert, so erhält man unter Berücksichtigung der Voraussetzung $f \equiv 0$

$$\int_0^\infty e^{-st} d_t v_\delta(t,x)\, dt = e^{-st} v_\delta(t,x)\Big|_0^\infty + s \int_0^\infty e^{-st} v_\delta(t,x)\, dt \tag{4.157}$$

die folgende Darstellung der Laplace-Transformierten

$$s\hat{v}_\delta(t,x) = \Lambda \hat{v}_{x,\delta}(t,x) + B\dot{w}_\delta \hat{v}_\delta + \hat{F}(t,x). \tag{4.158}$$

Die transformierte Randwertbedingung hat die Form

$$\hat{v}_\delta^{II}(s,0) \quad = \quad R^I \hat{v}_\delta^I(s,0) + \hat{g}^{II}(s,0) \tag{4.159}$$

$$\|\hat{v}_\delta(s,\cdot)\| \quad < \quad \infty. \tag{4.160}$$

Dieses Gleichungssystem läßt sich in zwei Systeme aufspalten

$$s\hat{v}_\delta^I(t,x) \quad = \quad \Lambda^I \hat{v}_{x,\delta}^I(t,x) + B^I \dot{w}_\delta \hat{v}_\delta^I(t,x) + \hat{F}^I(t,x) \tag{4.161}$$

$$s\hat{v}_\delta^{II}(t,x) \quad = \quad \Lambda^{II} \hat{v}_{x,\delta}^{II}(t,x) + B^{II} \dot{w}_\delta \hat{v}_\delta^{II}(t,x) + \hat{F}^{II}(t,x), \tag{4.162}$$

wobei die Matrizen B^I und B^{II} die Unterdiagonalmatrizen der Matrix B mit $\dim B^I = \dim \Lambda^I$ und $\dim B^{II} = \dim \Lambda^{II}$ sind.

Man hat also zwei Systeme linearer gewöhnlicher Differentialgleichungen mit stochastischen Koeffizienten

$$\hat{v}^I_{x,\delta}(t,x) = (\Lambda^I)^{-1} s\hat{v}^I_\delta(t,x) - (\Lambda^I)^{-1} B^I \dot{w}_\delta \hat{v}^I_\delta(t,x) - (\Lambda^I)^{-1}\hat{F}^I(t,x) \tag{4.163}$$

$$\hat{v}^{II}_{x,\delta}(t,x) = (\Lambda^{II})^{-1} s\hat{v}^{II}_\delta(t,x) + (\Lambda^{II})^{-1} B^{II} \dot{w}_\delta \hat{v}^{II}_\delta(t,x) + (\Lambda^{II})^{-1}\hat{F}^{II}(t,x). \tag{4.164}$$

Die Lösungen haben dann die folgende Gestalt

$$\hat{v}^I_\delta(t,x) = \frac{1}{e^{((\Lambda^I)^{-1}s-(\Lambda^I)^{-1}B^I\dot{w}_\delta)x}} \int_0^x (\Lambda^I)^{-1}\hat{F}^I(t,z) e^{((\Lambda^I)^{-1}s-(\Lambda^I)^{-1}B^I\dot{w}_\delta)z}\, dz \tag{4.165}$$

$$\begin{aligned}\hat{v}^{II}_\delta(t,x) &= \frac{1}{e^{((\Lambda^{II})^{-1}s-(\Lambda^{II})^{-1}B^{II}\dot{w}_\delta)x}} \int_0^x (\Lambda^{II})^{-1}\hat{F}^{II}(t,z) e^{((\Lambda^{II})^{-1}s-(\Lambda^{I})^{-1}B^{II}\dot{w}_\delta)z}\, dz \\ &\quad + e^{((\Lambda^{II})^{-1}s-(\Lambda^{II})^{-1}B^{II}\dot{w}_\delta)x}\hat{v}^{II}_\delta(s,0).\end{aligned} \tag{4.166}$$

wobei $\hat{v}^{II}_\delta(s,0)$ durch die Randwertbedingung (4.154) bestimmt ist. Betrachtet man (4.161), so erhält man für das Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ im Hilbertraum die Beziehung

$$\begin{aligned}&\langle \hat{v}^I_\delta, s\hat{v}^I_\delta\rangle + \langle s\hat{v}^I_\delta, \hat{v}^I_\delta\rangle = \langle \hat{v}^I_\delta, \Lambda^I \hat{v}^I_{x,\delta}(t,x)\rangle + \langle \Lambda^I\hat{v}^I_{x,\delta}(t,x), \hat{v}^I_\delta\rangle \\ &\quad + \langle \hat{v}^I_\delta, \Lambda^I B^I \dot{w}_\delta \hat{v}^I_\delta(t,x) + \hat{F}^I(t,x)\rangle + \langle \Lambda^I B^I \dot{w}_\delta \hat{v}^I_\delta(t,x) + \hat{F}^I(t,x), \hat{v}^I_\delta\rangle\end{aligned} \tag{4.167}$$

oder

$$\eta\|\hat{v}^I_\delta\|^2 = \Re\langle \hat{v}^I_\delta, \Lambda^I\hat{v}^I_{x,\delta}\rangle + \Re\langle \hat{v}^I_\delta, \hat{F}^I\rangle + \Re\langle \hat{v}^I_\delta, B^I\dot{w}_\delta\hat{v}_\delta\rangle. \tag{4.168}$$

Integriert man das erste Skalarprodukt auf der rechten Seite von (4.168) partiell, so erhält man

$$\int_0^\infty \left(\hat{v}^I_\delta, \Lambda^I\hat{v}^I_{x,\delta}\right) dx = \left(\hat{v}^I_\delta, \Lambda^I\hat{v}^I_\delta\right)\Big|_0^\infty - \int_0^\infty \left(\hat{v}^I_{x,\delta}, \Lambda^I\hat{v}^I_\delta\right) dx, \tag{4.169}$$

woraus man wegen des Verschwindens von $\hat{v}^I_\delta$ für $x \to \infty$

$$\int_0^\infty \Re\left(\hat{v}^I_\delta \Lambda^I\hat{v}^I_{x,\delta}\right) dx = -\frac{1}{2}\left(\hat{v}^I_\delta(0,s), \Lambda^I\hat{v}^I_\delta(s,0)\right) \tag{4.170}$$

erhält. Eingesetzt in (4.168) ergibt dies

$$\eta\|\hat{v}^I_\delta\|^2 + \frac{1}{2}\left(\hat{v}^I_\delta(0,s), \Lambda^I\hat{v}^I_\delta(s,0)\right) \le \|\hat{v}^I_\delta\|\left(\|\hat{F}^I\| + \|B^I\dot{w}_\delta\|\right), \tag{4.171}$$

daraus folgt

$$\|\hat{v}^I_\delta\| \le \frac{1}{\eta}\left(\|\hat{F}^I\| + \|B^I\dot{w}_\delta\|\right). \tag{4.172}$$

Weiter kann man aus (4.171) schließen, dass

$$\frac{1}{2}\left(\hat{v}^I_\delta(0,s), \Lambda^I\hat{v}^I_\delta(s,0)\right) \le \left(\|\hat{F}^I\| + \|B^I\dot{w}_\delta\|\right) \tag{4.173}$$

gilt, daraus folgt

$$|\hat{v}^I_\delta(s,0)| \leq \frac{C}{\sqrt{\eta}}\left(\|\hat{F}^I\| + \|B^I\dot{w}_\delta\|\right). \tag{4.174}$$

Entsprechend erhält man für das zweite Gleichungssystem bezüglich $\hat{v}^{II}_\delta$ nach einigen algebraischen Umformungen

$$\begin{aligned} \eta\|\hat{v}^{II}_\delta\|^2 &\leq \|\hat{v}^{II}_\delta\|\left(\|\hat{F}^{II} + B^{II}\dot{w}_\delta\|\right) - \frac{1}{2}\left(\hat{v}^{II}_\delta(0,s), \Lambda^{II}\hat{v}^{II}_\delta(s,0)\right) \\ &\leq \frac{\eta}{2}\|\hat{v}^{II}_\delta\|^2 + \frac{1}{2\eta}\|\hat{F}^{II} + B^{II}\dot{w}_\delta\|^2 + \frac{1}{2}\left(\hat{v}^{II}_\delta(0,s), \left(-\Lambda^{II}\right)\hat{v}^{II}_\delta(s,0)\right), \end{aligned} \tag{4.175}$$

woraus wegen $\lambda^{II}_l < 0, \forall l = j+1, ..., k$, schließlich folgt

$$\eta\|\hat{v}^{II}_\delta\|^2 \leq C\left(\frac{1}{\eta}\|\hat{F}^{II} + B^{II}\dot{w}_\delta\|^2 + |\hat{v}_\delta(s,0)|^2\right). \tag{4.176}$$

Aus der Randwertbedingung (4.159) folgt mit (4.174) die Abschätzung

$$\begin{aligned} |\hat{v}^{II}_\delta(s,0)|^2 &\leq C\left(|\hat{g}^{II}(s)|^2 + |\hat{v}^I_\delta(s,0)|^2\right) \\ &\leq C\left(|\hat{g}^{II}(s)|^2 + \frac{1}{\eta}\left(\|\hat{F}^I\|^2 + \|B^I\dot{w}_\delta\|^2\right)\right). \end{aligned} \tag{4.177}$$

Damit hat man die Abschätzungen

$$\eta\|\hat{v}_\delta\|^2 \leq C\left(\frac{1}{\eta}\left(\|\hat{F}\|^2 + \|B\dot{w}_\delta\|^2\right) + |\hat{g}^{II}|^2\right) \tag{4.178}$$

$$|\hat{v}_\delta(s,0)|^2 \leq C\left(\frac{1}{\eta}\left(\|\hat{F}\|^2 + \|B\dot{w}_\delta\|^2\right) + |\hat{g}^{II}|\right). \tag{4.179}$$

erhalten. Invertiert man die Laplace-Transformation, so erhält man die Lösung des Problems

$$e^{-\eta t}v_\delta(t,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi t}\hat{v}_\delta(x, i\xi + \eta)\, d\xi, \tag{4.180}$$

wendet man weiterhin die Parsevalsche Relation an, so erhält man für beliebiges $\eta > 0$, wobei $s = \eta + i\xi$, für (4.178) die Abschätzung

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\eta t}\|v_\delta(t,x)\|^2\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\|\hat{v}_\delta(s,\cdot)\|^2\, d\xi \\ &\leq C\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\eta^2}\left(\|\hat{F}\|^2 + \|B\dot{w}_\delta\|^2\right) + \frac{1}{\eta}|\hat{g}^{II}|^2\right) d\xi \\ &\leq C\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\eta t}\left(\frac{1}{\eta^2}\left(\|F(t,\cdot)\|^2 + \|B\dot{w}_\delta\|^2\right) + \frac{1}{\eta}|g(t)|^2\right) dt. \end{aligned} \tag{4.181}$$

Entsprechend erhält man für (4.179)

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\eta t}\|v_\delta(t,0)\|^2\, dt \\ &\leq C\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\eta t}\left(\frac{1}{\eta}\left(\|F(t,\cdot)\|^2 + \|B\dot{w}_\delta\|^2\right) + |g(t)|^2\right) dt. \end{aligned} \tag{4.182}$$

Damit ist gezeigt, dass auch in diesem Fall die Lösung in Abhängigkeit der Anfangs- und Randwerte abgeschätzt werden kann.

■

Dieser Beweis führt aber im folgenden auch zu einer weiterführenden Begriffsbildung der Wohlgestelltheit. In ähnlicher Weise wie sich die Wohlgestelltheit der Differentialgleichung mit stochastischen Koeffizienten in den Termen niederer Ordnung auf die Wohlgestelltheit der deterministischen Problemstellung zurückführen läßt, läßt sich auch die Stabilität der entsprechenden approximierenden stochastischen Differenzenschemata auf die Stabilität des deterministischen Schemas zurückführen. Es gilt die folgende Aussage:

Definition 4.5. Ein Approximationsverfahren des Types

$$\left.\begin{array}{rcl} u_k^{n+1} &=& (Q+Q_0)u_k^n + F_k^n, \\ u(0,x) &=& u_0(x) = 0, \\ u_0(t) &=& 0 \end{array}\right\} \tag{4.183}$$

für ein homogenes stochastisches Randwertproblem mit Anfangswertfunktion konstant Null heißt stabil im verallgemeinerten Sinne, wenn für genügend kleines h eine eindeutige Lösung existiert, die der folgenden Ungleichung genügt:

$$\int_0^\infty e^{-2\eta t}\|u(t)\|_h^2\,dt \leq K(\eta)\int_0^\infty \|F(t)\|_h^2\,dt \tag{4.184}$$

für alle $\eta(\omega) > \eta_0$. Dabei sind η_0 und $K(\eta)$ Konstanten, die nicht von F abhängen, und es gilt

$$\lim_{\eta\to\infty} K(\eta) = 0 \quad P-\text{f.s.} \tag{4.185}$$

Gilt stattdessen nur, dass die Anfangswertfunktion konstant gleich Null ist, so nennt man die Approximation stark stabil im verallgemeinerten Sinne, wenn statt der Bedingung (4.184) die Bedingung

$$\int_0^\infty e^{-2\eta t}\|u(t)\|_h^2\,dt \leq K(\eta)\int_0^\infty \left(\|F(t)\|_h^2 + |g(t)|^2\right)\,dt \tag{4.186}$$

erfüllt ist.

Theorem 4.7. *Angenommen, die Approximation des deterministischen Problems*

$$\left.\begin{array}{rcccl} \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} &=& Qu(t,x) &+& F(t,x), \\ u(0,x) &=& u_0(x) &=& f(x) \in L^2(\mathbb{R}^1), \\ u_0(t) &=& 0 && \end{array}\right\} \tag{4.187}$$

ist stabil, $Q_0 := B\dot{w}_\delta$ sei ein Operator niederer Ordnung mit stochastischen Koeffizienten, dann ist auch das stochastische System

$$\left.\begin{array}{rcccl} \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} &=& (Q+Q_0)u(t,x) &+& F(t,x), \\ u(0,x) &=& u_0(x) &=& f(x) \in L^2(\mathbb{R}^1), \\ u_0(t) &=& 0 && \end{array}\right\} \tag{4.188}$$

stabil.

Beweis: Formal kann man den Term $Q_0 = B\dot{w}_\delta$ als einen zusätzlichen Term betrachten, den man wie den Term $F(t,x)$ behandelt. Dann gilt

$$\int_0^\infty e^{-2\eta t}\|u(t,\cdot)\|^2 \leq K(\eta)\int_0^\infty e^{-2\eta t}\left(\|Q_0 u(t,\cdot)\|^2 + \|F(t,\cdot)\|^2\right) dt. \tag{4.189}$$

Eine einfache Umformung ergibt nun, dass

$$(1-\alpha(\omega)K(\eta))\int_0^\infty e^{-2\eta t}\|u(t,\cdot)\|^2 \leq K(\eta)\int_0^\infty e^{-2\eta t}\|F(t,\cdot)\|^2\, dt. \tag{4.190}$$

Setzt man

$$K_1(\eta,\omega) := \frac{K(\eta)}{1-\alpha(\omega)K(\eta)}, \tag{4.191}$$

so gilt $\lim_{\eta\to\infty} K_1(\eta,\omega) = 0$. Für η genügend groß, erhalten wir

$$\int_0^\infty e^{-2\eta t}\|u(t,\cdot)\|^2 \leq K_1(\eta)\int_0^\infty e^{-2\eta t}\|F(t,\cdot)\|^2\, dt. \tag{4.192}$$

$\blacksquare$