5. Anhang

5.1 Eine unendlichdimensionale Itô-Formel

I. Gyöngy und N.V. Krylov beweisen in [24] eine unendlichdimensionale Itô-Formel, wobei sie die nachfolgenden Voraussetzungen und Begriffsbildungen voranstellen. Sei V ein separabler Banachraum und V^* sein Dualraum. Angenommen, es existiert ein Hilbertraum H und ein beschränkter linearer Operator $\Lambda : V \to H$, so dass ΛV dicht in H liegt. Sei weiterhin $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ eine Orthonormalbasis von H, so dass $e_i = \Lambda w_i$ für entsprechendes $w_i \in V$. Sei Π_k die Projektion von H auf den Unterraum, der durch $\{e_i\}_{i=1}^{k}$ erzeugt wird. Weiterhin bezeichne uz das Skalarprodukt von $u, z \in H$ bzw. das Skalarprodukt von $u \in V$ und $z \in V^*$. Sei h ein H-wertiges, lokal quadratisch integrierbares cadlag-Martingal. Für jede positive ganze Zahl k sei $w_k(t) := \sum_{i=1}^{k}(h(t)e_i)w_i$. Weiterhin sei $A(t)$ ein reellwertiger wachsender cadlag-Prozeß, der in der Null startet, $v(t)$ ein V-wertiger progressiv meßbarer Prozeß und $v^*(t)$ ein V^*-wertiger Prozeß, so dass $vv^*(t)$ progressiv meßbar ist für jedes $v \in V$. Weiterhin gelte, dass $|v(t)|$, $|v^*(t)|$ und $|v(t)||v^*(t)|$ fast sicher lokal integrierbar sind bezüglich $dA(t)$. Gyöngy und Krylov beweisen das folgende Theorem:

Theorem 5.1. *Sei τ eine Stoppzeit. Angenommen, für jedes $v \in V$ und für $dP \times dA(t)$-fast alle $(t, \omega) \in]0, \tau[$ gelte*

$$\Lambda v \Lambda v(t) = \int_{]0,t]} vv^*(u)\, dA(u) + \Lambda v h(t). \tag{5.1}$$

Dann existiert eine Teilmenge $\tilde{\Omega} \subset \Omega$ mit $P(\tilde{\Omega}) = 1$ und ein H-wertiger adaptierter cadlag-Prozeß, so dass $\tilde{h}(t) = \Lambda v(t)$ für $dP \times dA(t)$-fast alle $(t, \omega) \in]0, \tau[$. Weiterhin gilt für alle $\omega \in \tilde{\Omega}$, $t < \tau(\omega)$ und für alle $v \in V$

$$\Lambda v \tilde{h}(t) = \int_{]0,t]} vv^*(u)\, dA(u) + \Lambda v h(t) \tag{5.2}$$

$$\begin{aligned} \tilde{h}^2(t) &= h^2(0) + 2\int_{]0,t]} v(u)v^*(u)\, dA(u) \\ &\quad +2\int_{]0,t]} \tilde{h}(u-)\, dh(u) - \int_{]0,t]} |\Lambda^{*\,-1} v^*(u)|^2 \Delta A(u)\, dA(u) + [h]_t\,, \end{aligned} \tag{5.3}$$

wobei wir $|\Lambda^{*\,-1}v^*(u)| := \infty$ setzen, falls $v^*(u) \notin \Lambda^* H^*$. Dabei bezeichnet $[h]_t$ die quadratische Variation des Hilbertraum-wertigen Martingals.

Weiterhin zeigen Gyöngy und Krylov die Formel für den folgenden Spezialfall: Sei $V \subset H$ dicht und Λ die Identität auf V. Es existiere eine Konstante K, so dass $\|v\|_H \leq K\|v\|_V$ für alle $v \in V$ gilt. Weiterhin sei H eine dichte Teilmenge des Banachraumes V' und es gelte $|\varphi\psi| \leq |\varphi|_V |\psi|_{V'}$ für alle $\varphi \in V$ und $\psi \in V'$. Der beschränkte lineare Operator $T : V' \to V^*$ sei eindeutig und $v'(t)$ ein V'-wertiger progressiv meßbarer Prozeß, so dass auch $|v'(t)|$ fast sicher lokal integrierbar ist bezüglich $dA(t)$. Dann existiert $\Omega' \subset \Omega$ mit $P(\Omega') = 1$, so dass das Integral $\int_{]o,t]} v'(u)\, dA(u)$ für alle $\omega \in \Omega'$ und alle $t \geq 0$ existiert. Es gilt dann das folgende Theorem:

Theorem 5.2. *Sei $\tilde{h}(t) = \int_{]0,t]} v'(u)\, dA(u) + h(t)$ für $\omega \in \Omega'$ und $\tilde{h}(t) = 0 \in V'$ sonst. Angenommen, es gelte $\tilde{h}(t) = v(t)$ für $dP \times dA(t)$-fast alle (t, ω). Dann existiert ein $\Omega'' \subset \Omega$ mit $P(\Omega'') = 1$, so dass $\chi_{\Omega''}\tilde{h}(t)$ ein H-wertiger cadlag-Prozess ist. Für alle $\omega \in \Omega''$ und $t \geq 0$ gilt dann*

$$\begin{aligned} \tilde{h}^2(t) &= h^2(0) + 2\int_{]0,t]} \tilde{h}(u)v'(u)\, dA(u) \\ &\quad +2\int_{]0,t]} \tilde{h}(u-)\, dh(u) - \int_{]0,t]} |v'(u)|^2 \Delta A(u)\, dA(u) + [h]_t\,, \end{aligned} \tag{5.4}$$

wobei $|v'(u)| := \infty$, falls $v'(u) \notin H$ und $\tilde{h}(u)v'(u) := \infty$ ist, falls $\tilde{h}(u) \notin V$.

5.2 Die Parsevalsche Relation

Sei $\hat{v}(w)$ die Fourier-Transformierte von $v(x)$. Dann gilt im kontinuierlichen Fall

$$\int_{-\infty}^{\infty} |v(x)|^2\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{v}(s)|^2\, ds \tag{5.5}$$

und im diskreten Fall

$$\|\hat{v}\|_h^2 = \int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} |\hat{v}(\xi)|^2\, d\xi = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |v_m|^2 h = \|v\|_h^2. \tag{5.6}$$

Die beiden Beziehungen (5.5) und (5.6) heißen die Parsevalschen Relationen. Die Beziehung (5.6) kann man mit der Rechnung

$$\begin{aligned} \| \hat{v} \|_h^2 &= \int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} |\hat{v}(\xi)|^2\, d\xi \\ &= \int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} \overline{\hat{v}(\xi)} \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-mh\xi} v_m h\, d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} \overline{\hat{v}(\xi)} e^{-mh\xi}\, d\xi\, v_m h \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \overline{\int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} \hat{v}(\xi) e^{-mh\xi}\, d\xi\, v_m h} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \overline{v_m} v_m h = \| v \|_h^2 \end{aligned} \tag{5.7}$$

nachweisen. Für die Beziehung (5.5) sei der Leser auf die entsprechende funktionalanalytische Literatur verwiesen, vgl. z.B. Titchmarsh [62] oder Goldberg [12].

Betrachten wir nun die Laplace-Transformation. Angenommen, $v(t,x)$ sei eine stetige Funktion für $0 \le t < \infty$, $0 \le x \le l$, die der Abschätzung

$$|v(t,x)| \le Ce^{\alpha t} \tag{5.8}$$

genügt. Dann bezeichnet die Funktion

$$\hat{\hat{v}} = \hat{\hat{v}}(s,x) = \int_0^\infty e^{-st} v(t,x)\,dt, \quad 0 \le x \le l, \tag{5.9}$$

für $s = \eta + i\xi$ mit $\eta > \alpha$ die Laplace-Transformierte der Zeit für jedes feste x. Partielle Integration liefert die folgenden Beziehungen für die Laplace-Transformierte

$$\begin{aligned} s\hat{\hat{v}} &= \widehat{\widehat{\frac{\partial v}{\partial t}}} + v(0,x), \\ \hat{\hat{v}}_x &= \frac{\partial \hat{\hat{v}}}{\partial x} = \int_0^\infty e^{-st}\frac{\partial v(t,x)}{\partial x}\,dt = \widehat{\widehat{\frac{\partial v}{\partial x}}}. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Die Parsevalsche Relation für die Fourier-Transformierte liefert die folgende Beziehung für die Norm der Funktion und ihrer Laplace-Transformierten

$$\| v(t,\cdot) \|_\eta^2 = \int_{-\infty}^\infty e^{-2\eta t}|v(t,\cdot)|^2\,dt = \int_{-\infty}^\infty |\hat{\hat{v}}(\eta + i\xi,\cdot)|^2\,d\xi \tag{5.11}$$

für den kontinuierlichen Fall, und im diskreten Fall gilt

$$\| v \|_{\eta,\Delta t}^2 = \Delta t \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-2n\eta\Delta t}|v^n|^2 = \int_{-\frac{\pi}{\Delta t}}^{\frac{\pi}{\Delta t}} |\hat{\hat{v}}(\eta + i\xi,\cdot)|^2\,d\xi. \tag{5.12}$$

5.3 Die Davis-Burkholder-Gundy-Ungleichung

Theorem 5.3. Davis-Burkholder-Gundy-Ungleichung
Sei $M \in \mathcal{M}^{c,loc}$, wobei $\mathcal{M}^{c,loc}$ der Raum der stetigen, lokalen Martingale ist, und sei

$$M_t^* := \max_{0 \le s \le t} |M_s|. \tag{5.13}$$

Dann existieren für jedes $m > 0$ postive Konstanten k_m und K_m, die nur von m abhängen, so dass

$$k_m E\left(\langle M \rangle_T^m\right) \le E\left[(M_T^*)^{2m}\right] \le K_m E\left(\langle M \rangle_T^m\right) \tag{5.14}$$

gilt für jede beliebige Stoppzeit T. Insbesondere kann man z.B.

$$\left.\begin{array}{lll} k_m = (p/e)^p, & K_m = (32/p)^{p/2} & \textit{falls} \;\; 0 < p < 2 \\ k_m = 1, & K_m = 4 & \textit{falls} \;\; p = 2 \\ k_m = (2p)^{-p/2}, & K_m = (\frac{p^{p+1}}{2(p-1)^{p-1}})^{p/2} & \textit{falls} \;\; p > 2 \end{array}\right\} \tag{5.15}$$

wählen, obwohl diese Konstanten nicht optimal sind.

5.4 Das Gronwallsche Lemma

Lemma 5.1. (Gronwall) *Es seien $g(t)$ und $v(t)$ stetige Funktionen über $[0, T]$ und für die Funktion $h(t)$ gelte $0 \leq h(t) \in L^1[0, T]$, sowie in $[0, T]$*

$$v(t) \leq g(t) + \int_0^t h(\tau)v(\tau)\, d\tau. \tag{5.16}$$

Dann ist für $t \in [0, T]$

$$v(t) \leq g(t) + \int_0^t g(\tau)h(\tau)e^{H(t)-H(\tau)}\, d\tau, \tag{5.17}$$

mit $H(t) = \int_0^t h(\tau)\, d\tau$.