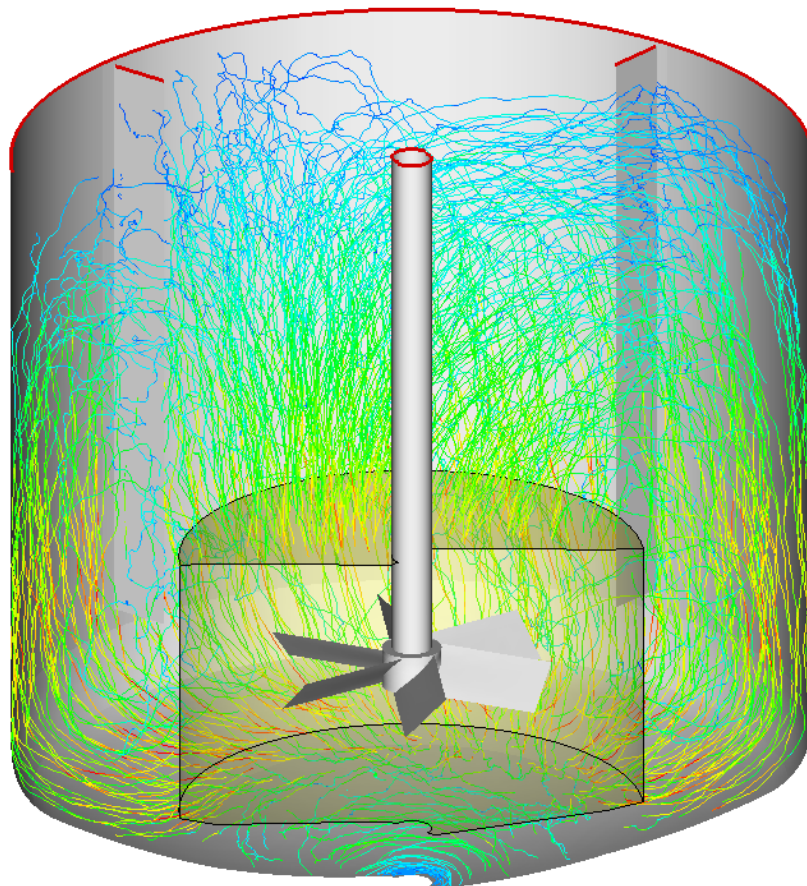


## Zur Berechnung von gerührten Suspensionen mit dem Euler-Lagrange-Verfahren



**Stefan Decker**

**urn:nbn:de:gbv:3-000009860**

[<http://nbn-resolving.de/urn/resolver.pl?urn=nbn%3Ade%3Agbv%3A3-000009860>]



# Zur Berechnung von gerührten Suspensionen mit dem Euler-Lagrange-Verfahren

Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades  
Doktor-Ingenieur (Dr.-Ing.)

vorgelegt der  
Mathematisch-Naturwissenschaftlich-Technischen Fakultät  
— Fachbereich Ingenieurwissenschaften —  
der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg

von  
Herrn Stefan Decker  
geb. am 02.04.1968 in Wilhermsdorf

Gutachter: Prof. Dr.-Ing. M. Sommerfeld  
Prof. Dr. rer. nat. M. Schäfer

Halle (Saale), 15. November 2005

**urn:nbn:de:gbv:3-000009860**

[<http://nbn-resolving.de/urn/resolver.pl?urn=nbn%3Ade%3Agbv%3A3-000009860>]



So eine Arbeit wird eigentlich nie fertig,  
man muss sie für fertig erklären,  
wenn man nach Zeit und Umständen  
das Möglichste getan hat.

*Johann Wolfgang von Goethe,  
Italienische Reise, 16. März 1787*

Für all die Geduldigen ...  
... und insbesondere für Kerstin & Anina sowie meine Eltern



# Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand primär während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für Strömungsmechanik der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg und am Lehrstuhl für Mechanische Verfahrenstechnik der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg. Sie wurde finanziell gefördert aus Mitteln des BMWI, wofür ich mich an dieser Stelle bedanken möchte.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. M. Sommerfeld für die Anregung und tatkräftige wissenschaftliche Förderung der Arbeit, seine Offenheit in allen anstehenden Fragen sowie für die Übernahme des Hauptreferates. Herrn Prof. F. Durst danke ich für die Möglichkeit zur wissenschaftlichen Arbeit an seinem Lehrstuhl. Weiterhin möchte ich mich bei Herrn Prof. M. Schäfer für das gezeigte Interesse an der Arbeit sowie die freundliche Bereitschaft zur Übernahme des Koreferates herzlich bedanken.

Natürlich trägt das Umfeld erheblich zum Gelingen einer Arbeit bei, so dass ich mich herzlichst bei allen ehemaligen Kollegen und studentischen Mitarbeitern in Erlangen und Merseburg bedanken möchte, die mich auf vielfache Weise bei meiner Arbeit unterstützt haben. Mein ausdrücklicher Dank gilt meinen Wegbegleitern Herrn Dipl.-Ing. M. Rüger und Herrn Dr.-Ing. G. Kohnen, für die fruchtbare Zusammenarbeit und unzählige Diskussionen.

Nicht zu vergessen sind die Kollegen und Vorgesetzten bei *die Bosch*, welche mir den Freiraum schafften diese Arbeit zu vollenden. Vielen Dank. Für viele wertvolle Hinweise bei den Korrekturen geht ein *muchas gracias* an Herrn Dr.-Ing. G. Urzua.

Auch meinen Freunden gebührt Dank, da sie mir in schwierigen Situationen immer zur Seite standen und eine lange Dürreperiode klaglos erduldeten.

Nicht zuletzt möchte ich meinen Eltern, Wilma und Georg Decker, von ganzen Herzen dafür danken, dass sie mir meine bisherige Laufbahn ermöglicht und mich stets in jeder Hinsicht unterstützt haben.

Meiner Frau Kerstin sowie meiner Tochter Anina, die auf viele gemeinsame Stunden verzichten mussten, kann ich gar nicht genug Dank dafür zollen, dass sie mich mit ihrer Liebe, Toleranz und Geduld durch all die Jahre begleitet haben. Ihrer tatkräftigen Unterstützung ist es zu verdanken, dass ich diesen Marathon bis zum Ende durchgestanden habe.

Gundelsheim, im Juli 2005

Stefan Decker





# Inhaltsverzeichnis

<b>Kurzfassung</b>	<b>xi</b>
<b>Abstract</b>	<b>xiii</b>
<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>xv</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2 Charakterisierung von Zweiphasenströmungen</b>	<b>5</b>
<b>3 Beschreibung der kontinuierlichen Phase</b>	<b>11</b>
3.1 Erhaltungsgleichungen in ihrer allgemeinen Form . . . . .	11
3.1.1 Massenerhaltung . . . . .	11
3.1.2 Impulserhaltung . . . . .	12
3.2 Zeitgemittelte Erhaltungsgleichungen . . . . .	13
3.3 Turbulenzmodellierung . . . . .	13
3.4 Rotation des Koordinatensystems . . . . .	19
3.5 Allgemeine Transportgleichung . . . . .	21
3.6 Randbedingungen . . . . .	21
<b>4 Beschreibung der dispersen Phase</b>	<b>23</b>
4.1 Wichtige Kennzahlen und Beziehungen . . . . .	23
4.2 Erhaltungsgleichungen für Teilchen in einer Strömung . . . . .	24
4.2.1 Teilchenort . . . . .	24
4.2.2 Teilchentranslationsgeschwindigkeit . . . . .	25
4.2.3 Teilchenrotationsgeschwindigkeit . . . . .	32
4.3 Partikeldispersionsmodell . . . . .	34
4.3.1 Modell der diskreten Wirbel . . . . .	34
4.3.2 Langevin-Gleichungsmodell . . . . .	35
4.4 Rückwirkung der dispersen Phase auf die kontinuierliche Phase . . . . .	39
4.5 Partikel-Partikel-Kollisionen . . . . .	41
4.5.1 Stochastische Modellierung - Überblick . . . . .	43
4.5.2 Generierung eines möglichen Stoßpartners . . . . .	44
4.5.3 Wahrscheinlichkeit für eine Kollision . . . . .	45
4.5.4 Entscheidung ob Kollision vorliegt oder nicht . . . . .	46
4.5.5 Generierung des Kollisionskontaktpunktes . . . . .	46

4.5.6	Kollisionsoperator . . . . .	47
4.6	Partikel-Wand-Kollisionen . . . . .	53
4.6.1	Allgemeines . . . . .	54
4.6.2	Kollisionsoperator . . . . .	54
4.6.3	Irreguläre Partikel-Wand-Kollisionen . . . . .	57
4.7	Schwarmeffekte . . . . .	60
<b>5</b>	<b>Numerische Berechnung von Zweiphasenströmungen</b>	<b>65</b>
5.1	Numerische Berechnung der fluiden Phase . . . . .	66
5.1.1	Beschreibung des eingesetzten Berechnungsverfahrens . . . . .	67
5.1.2	Strömungsberechnung im Rührkessel . . . . .	69
5.2	Numerische Berechnung der dispersen Phase . . . . .	75
5.2.1	Zeitschrittbestimmung für die Partikelbewegung . . . . .	75
5.2.2	Wechsel des Bezugssystems während der Bewegung entlang einer Partikeltrajektorie . . . . .	76
5.2.3	Weitere Unterteilung des Berechnungsgitters für die disperse Phase . . . . .	76
5.2.4	Berechnung der Mittelwerte der dispersen Phase in den ein- zelnen Kontrollvolumina . . . . .	78
5.2.5	Abschätzung des statistischen Fehlers . . . . .	80
5.2.6	Ermittlung einer ausreichenden Anzahl an repräsentativen Teilchen . . . . .	82
5.2.7	Parallelisierung . . . . .	83
5.3	Phasenkopplung . . . . .	85
5.4	Prinzipieller Programmablauf . . . . .	86
<b>6</b>	<b>Validierung anhand einer zweiphasigen vertikalen Rohrströmung</b>	<b>91</b>
6.1	Beschreibung des Testfalls . . . . .	91
6.2	Theoretische radiale Profile der axialen Strömungsgeschwindigkeit . . . . .	92
6.3	Numerische Berechnung und Vergleich mit Experimenten . . . . .	93
6.3.1	Reine Luftströmung . . . . .	93
6.3.2	Partikelbeladene Strömung . . . . .	96
<b>7</b>	<b>Suspendieren im Rührkessel</b>	<b>105</b>
7.1	Grundlegende Kenngrößen für eine Strömung im Rührkessel . . . . .	106
7.2	Beschreibung des Suspendierzustands . . . . .	107
7.3	Bisherige Arbeiten . . . . .	110
7.4	Geometrie und Berechnungsgitter . . . . .	140
7.5	Vergleichsmessungen . . . . .	145
7.6	Analyse des dimensionslosen normalen Wandabstands . . . . .	148
7.7	Analyse der Diskretisierung und der Gitterauflösung . . . . .	152
7.8	Visualisierung der Strömung . . . . .	179
7.9	Variation der Rührerdrehzahl . . . . .	184
7.10	Abschätzung der lokalen Stokeszahl . . . . .	191
7.11	Berechnung von Partikelbahnen . . . . .	193

---

7.12	Abschätzung des Fehlers durch die Betrachtung von Parcels . . . . .	197
7.13	Berechnung der Newtonzahl . . . . .	206
7.14	Konvergenzverhalten der Phasenkopplung . . . . .	209
7.15	Gegenüberstellung von Fluid- und Partikelströmung . . . . .	219
7.16	Parametervariationen und deren Effekt auf die Suspension . . . . .	227
7.17	Bedeutung von Phasenkopplung und Partikel-Partikel-Kollisionen . .	233
<b>8</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>239</b>
<b>9</b>	<b>Ausblick</b>	<b>245</b>
<b>A</b>	<b>Anhang</b>	<b>249</b>
A.1	Vergleich verschiedener Beziehungen für den Widerstandsbeiwert . . .	250
A.2	Unterteilung des Behälters in Höhenschichten . . . . .	253
A.3	Partikeleigenschaften bei Variation der Trajektorienanzahl . . . . .	255
A.4	Bedeutung der einzelnen Geschwindigkeitskomponenten . . . . .	259
A.5	Fluideigenschaften bei Variation der Gitterauflösung . . . . .	260
A.6	Fluideigenschaften bei Variation der Rührerdrehzahl . . . . .	265
A.7	Partikeleigenschaften: Vergleich von Berechnung und Messung . . . .	274
A.8	Fluideigenschaften mit/ohne Kopplung (PQT, PPK) . . . . .	279
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>287</b>



# Kurzfassung

Die vorliegende Dissertation befasst sich mit der numerischen Berechnung von gerührten Suspensionen unter Nutzung des Euler-Lagrange-Verfahrens. Dazu musste aufbauend auf ein vorhandenes 2d-Berechnungsprogramm ein entsprechendes 3d-Programmsystem entwickelt werden, welches auch den speziellen Anforderungen bei der Berechnung von Rührwerksströmungen genügt.

Für ein grundsätzliches Verständnis der Zweiphasenströmung ist es zunächst erforderlich, die physikalischen Zusammenhänge theoretisch zu beleuchten. Insbesondere die Erhaltungsgleichungen, die Turbulenzmodellierung, die Partikeldispersion sowie Zwei- und Vierwegekopplung werden dabei näher diskutiert. Bei der numerischen Umsetzung steht daneben die Erfassung der Rührerbewegung im Fokus. Weitere wichtige Punkte sind Fehlerabschätzungen und Möglichkeiten zur Beschleunigung der Berechnungen.

Aufgrund der zentralen Rolle der Partikel-Partikel-Kollisionen bei den betrachteten Berechnungen, wird die erfolgreiche Validierung der Kollisionsmodellierung anhand des Testfalls einer zweiphasigen vertikalen Rohrströmung stellvertretend für verschiedenste Validierungen an unterschiedlichen Testfällen vorgestellt.

Schließlich wird die Strömung in einem bewehrten Rührkessel mit Schrägblattrührer sowohl numerisch als auch experimentell untersucht, wobei das betrachtete Zweiphasensystem aus Wasser und Glaskügelchen besteht. Vergleiche der Berechnungen mit den ermittelten Messwerten zeigen insgesamt eine gute Übereinstimmung sowohl bei den Fluid- als auch bei den Partikelgeschwindigkeitskomponenten.

Die Rechnungen erfolgen in einem Halbmodell mit einer Auflösung von bis zu 2 Mio. Hexaederzellen. Zur Vermeidung eines signifikanten Fehlers bei der Förderleistung des Rührers, wird zunächst der dimensionslose normale Wandabstand im Zusammenhang mit der logarithmischen Wandfunktion analysiert. Bei der Untersuchung der Diskretisierung der konvektiven Flüsse sowie der Gitterauflösung zeigt sich, dass der Gewichtungsfaktor  $\gamma_{CDS}$  eine zentrale Rolle für die korrekte Berechnung der Strömungsstrukturen spielt. Die Gitterauflösung beeinflusst besonders die turbulenten Größen. Sowohl die berechneten als auch die gemessenen normierten Geschwindigkeiten korrelieren sehr gut mit der Rührerdrehzahl.

Die Anzahl der zu berechnenden Teilchenbahnen ist anhand eines akzeptablen Kompromisses zwischen Genauigkeit und Rechenzeit festzulegen. Eine der wichtigsten

Kennzahlen für gerührte Suspensionen ist die Newtonzahl, deren Berechnung gut mit Literaturdaten übereinstimmt. Von den verschiedenen Kriterien zur Bewertung der Konvergenz einer gekoppelten Zweiphasenströmung erweist sich die Beobachtung der Newtonzahl als beste Variante. Aufgrund von Entkopplungserscheinungen lässt sich das Konvergenzverhalten durch die Einführung innerer Lagrange-Schleifen nicht signifikant beschleunigen.

Insgesamt können die Teilchen der Strömung sehr gut folgen. Deutliche Geschwindigkeitsunterschiede werden lediglich in der Rührerzone und an der Behälterwand beobachtet. Der Rührerstrom verbreitert sich durch die Dispersion der Teilchen. Eine wichtige Erkenntnis ist, dass sich die dreidimensionale Feststoffverteilung bei Parametervariationen (Gitterauflösung, Teilchengröße, mittlere Konzentration) deutlich stärker ändert als die entsprechenden Geschwindigkeiten.

Die Bewertung der Bedeutung von Partikel-Partikel-Kollisionen erfolgt zunächst über eine Abschätzung der lokalen Stokeszahl. Dabei sind Partikel-Partikel-Kollisionen umso wahrscheinlicher, je größere Werte die Stokeszahl annimmt. Die Analyse ergibt, dass eine relevante Kollisionswahrscheinlichkeit nur lokal in einigen Bereichen vorkommt. Trotzdem zeigen die Berechnungen einen großen Effekt der Phasenkopplung sowie der Partikel-Partikel-Kollisionen auch bereits bei relativ kleinen mittleren Konzentrationen. Durch die dispergierende Wirkung der Kollisionen wird die Verteilung tendenziell homogener. Lokale Konzentrationsüberhöhungen, wie z.B. am Behälterboden, werden massiv verringert. Unphysikalische lokale Konzentrationsüberhöhungen werden bei zunehmender Gitterauflösung verstärkt, so dass die Berücksichtigung von Partikel-Partikel-Kollisionen noch weiter an Relevanz gewinnt.

# Abstract

In this doctoral thesis the numerical simulation of stirred suspensions is investigated using the Euler-Lagrange approach. For this purpose it was necessary to develop a 3d code on the basis of an existing 2d code. The special requirements of flow calculations in stirred tanks had to be taken into account.

In achieving a fundamental understanding of two-phase flows it is essential to deepen in their theoretical background. In particular, the equations of conservation, turbulence modeling, particle dispersion, two- and four-way coupling are discussed in detail. Equally important is the treatment of the impeller action towards the numerical implementation. Furthermore, error estimations and speed-up possibilities are dealt with.

The successful validation of the modeling is accomplished through various test cases. Because of the importance of particle-particle collisions for the considered calculations, the two-phase vertical pipe flow case is chosen for representation.

Finally, the flow in a baffled stirred vessel equipped with a pitched-blade turbine is investigated numerically and experimentally, considering a two-phase system consisting of water and glass beads. The comparison of simulations with gathered measurements showed good overall agreement of the fluid and particle velocities.

For the calculations, up to 2 million control volumes (hexahedrons) are used on a half-model. The dimensionless distance from the wall is analyzed in combination with the logarithmic wall function to prevent significant errors in calculating the pumping capacity of the impeller. The examination of the convective flux discretisation and the grid resolution reveals the significant role of the weighting factor  $\gamma_{CDS}$  in the calculation of reliable flow structures. The grid size mainly affects the turbulent quantities. Normed values of the calculated as well as measured velocities show an excellent correlation with the impeller speed.

The number of calculated particle trajectories is to be defined on the basis of a justifiable compromise between accuracy and calculation time. One of the most important indicators for stirred suspensions is the power number, whose calculation agrees very well with literature data. From the different criteria to estimate coupling convergence, the monitoring of the power number proves to be the best choice. The introduction of inner Lagrange-loops does not accelerate convergence in a significant manner because of de-coupling effects.

In general, the particles follow the fluid flow very well. Significant slip velocities only occur in the impeller region and near the wall. The impeller stream gets broader due to dispersion of the particles. It is important to realize that parameter variations (grid resolution, particle size, mean particle volume fraction) have a larger influence on the three-dimensional distribution of the particles than on the respective velocities.

The local Stokes number is estimated to evaluate the importance of particle-particle collisions, where larger Stokes numbers imply that collisions are more likely. Through this it is shown that relevant collisions occur only in a few delimited areas. Nevertheless, calculations show a large effect of phase coupling and particle-particle collisions even at relatively low mean particle volume fractions. The particle distribution tends to get more homogeneous as a result of collisions. As a matter of fact, high local concentrations, e.g. at the bottom of the vessel, are drastically reduced. Non-physical local concentration peaks are amplified with increased grid resolution and therefore the consideration of particle-particle collisions becomes even more relevant.



# Symbolverzeichnis

## Lateinische Symbole:

Symbol	Einheit	Bedeutung
$a_{SS}$	m	Abstand der Stromstörer zur Behälterwand
$A$	m <sup>2</sup>	Fläche
$Ac$	–	Beschleunigungszahl
$b_{BL}$	m	Breite der Rührerblätter
$b_{SS}$	m	Breite der Stromstörer
$\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$	m	Basisvektoren
$c_B$	–	Beiwert für die Basset-Kraft
$c_D$	–	Widerstandsbeiwert
$c_{LM}$	–	Beiwert für die Magnus-Kraft
$c_{LS}$	–	Beiwert für die Saffman-Kraft
$c_R$	–	Rotationsbeiwert
$c_{VM}$	–	Beiwert für die Kraft durch die virtuelle Masse
$C_L$	–	Proportionalitätskonstante für das Eulersche integrale Längenmaß der Turbulenz $L_E$
$C_T$	–	Proportionalitätskonstante für das Lagrangesche integrale Zeitmaß der Turbulenz $T_L$
$C_{\varepsilon,1} \dots C_{\varepsilon,3}$	–	Konstanten des $k$ - $\varepsilon$ -Turbulenzmodells ( $\varepsilon$ -Gleichung)
$C_\mu$	–	Konstante des $k$ - $\varepsilon$ -Turbulenzmodells ( $\mu_t$ -Gleichung)
Co	–	Courantzahl
$d$	m	Partikeldurchmesser
$d_{32}$	m	Sauter-Durchmesser
$d_N$	m	Durchmesser der Rührernabe
$d_R$	m	Durchmesser des Rührers
$d_W$	m	Durchmesser der Rührerwelle
$D$	m	Durchmesser des Rührbehälters

Symbol	Einheit	Bedeutung
$D_R$	m	Durchmesser des Rohres
$\mathcal{D}$	$s^{-1}$	Deformationstensor
$\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_3$	–	Basis- oder Einheitsvektoren eines rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystems
$E$	abh. von $\phi$	Abbruchfehler der Diskretisierung
$E_W$	$\text{kg m}^2 \text{s}^{-2}$	Wirbelenergie
$f$	–	Longitudinale Korrelationsfunktion
$f_D$	$s^{-1}$	Doppler-Frequenz
$f_K$	$s^{-1}$	Kollisions- bzw. Stoßfrequenz
$f_{KV}$	–	Faktor für die Unterteilung eines Kontrollvolumens in Subkontrollvolumina (bezieht sich auf eine Koordinatenrichtung, d.h. es resultieren $f_{KV}^3$ Subkontrollvolumina)
$f_s$	–	Faktor für den anteiligen Aufenthalt eines Parcels in einem bestimmten Kontrollvolumen (während eines Zeitschritts)
$f_{UR}$	–	Unterrelaxationsfaktor
$f_{\varepsilon_{rel}}$	–	Skalierungsfaktor für den relativen statistischen Fehler bei einer bestimmten geforderten statistischen Sicherheit
$\mathbf{f}_B$	$\text{kg m}^{-2} \text{s}^{-2}$	Volumenbezogene Volumenkraft
$\mathbf{f}_G$	$\text{kg m}^{-2} \text{s}^{-2}$	Volumenbezogene Gewichtskraft
$\mathbf{f}_M$	$\text{kg m}^{-2} \text{s}^{-2}$	Volumenbezogene magnetische Kraft
$\mathbf{f}_\Omega$	$\text{kg m}^{-2} \text{s}^{-2}$	Volumenbezogene Coriolis- und Zentrifugalkraft
$\mathbf{F}_B$	$\text{kg m s}^{-2}$	Basset-Kraft
$\mathbf{F}_D$	$\text{kg m s}^{-2}$	Widerstandskraft
$\mathbf{F}_G$	$\text{kg m s}^{-2}$	Gewichtskraft
$\mathbf{F}_{LM}$	$\text{kg m s}^{-2}$	Magnus-Kraft (Querkraft durch Partikelrotation)
$\mathbf{F}_{LS}$	$\text{kg m s}^{-2}$	Saffman-Kraft (Querkraft durch Scherströmung)
$\mathbf{F}_P$	$\text{kg m s}^{-2}$	Kraft durch Druckgradienten in der Strömung
$\mathbf{F}_{VM}$	$\text{kg m s}^{-2}$	Kraft durch die virtuelle Masse
$\mathbf{F}_\Omega$	$\text{kg m s}^{-2}$	Coriolis- und Zentrifugalkraft
Fr	–	Froudezahl
$g$	–	Transversale Korrelationsfunktion
$\mathbf{g}, g_i$	$\text{m s}^{-2}$	Erdbeschleunigung <sup>1</sup>
$G$	$\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-3}$	Produktionsterm für die turbulente kinetische Energie
$h_N$	m	Höhe der Rührernabe

<sup>1</sup>Notation hier und bei den folgenden Variablen: Vektor ( $\mathbf{V}$ ) und seine  $i$ -te Komponente ( $V_i$ ) bzw. Tensor ( $\mathcal{T}$ ) und seine  $ij$ -te Komponente ( $T_{ij}$ )

Symbol	Einheit	Bedeutung
$h_R$	m	Einbauhöhe des Rührers (Bodenabstand gemessen bis zur Rührermitte)
$h_{SS}$	m	Höhe der Stromstörer (eingetaucht)
$H$	m	Füllhöhe des Rührbehälters
$H_n$	abh. von $\phi$	Terme höherer Ordnung
$\mathcal{I}$	–	Einheitstensor
$I_P$	$\text{kg m}^2$	Massenträgheitsmoment eines Teilchens
$I_S$	–	Intensität der Segregation
$\mathbf{J}$	$\text{kg m s}^{-1}$	Bei Partikel-Kollisionen übertragener Impuls
$k$	$\text{m}^2 \text{s}^{-2}$	Turbulente kinetische Energie
$k_W$	$\text{m}^{-1}$	Wirbelwellenzahl
$\ell$	m	Länge
$\ell_{KV}$	m	Charakteristische Abmessung eines Kontrollvolumens
$L$	m	Längenmaß der Turbulenz
$L_E$	m	Eulersches integrales Längenmaß der Turbulenz
$L_R$	m	Rohrlänge
$m$	kg	Partikelmasse
$m_{eff}$	kg	Effektive Partikelmasse
$m_{RG}$	kg	Masse des Rührguts
$\dot{m}_F$	$\text{kg s}^{-1}$	Fluidmassenstrom
$\dot{m}_P$	$\text{kg s}^{-1}$	Partikelmassenstrom
$M$	–	Massenbeladung: Verhältnis von Partikel- zu Fluidmassenstrom
$n$	–	Stichprobengröße
$n_{min}$	–	Minimale Größe einer Stichprobe, um eine geforderte statistische Sicherheit erreichen
$n_s$	–	kumulierte Anzahl an Parcelzeitschritten in einem Kontrollvolumen
$n_e$	–	kumulierte Anzahl an Parcelzugängen in einem Kontrollvolumen
$n_{ps}$	–	kumulierte Anzahl an Partikelzeitschritten in einem Kontrollvolumen
$n_{pe}$	–	kumulierte Anzahl an Partikelzugängen in einem Kontrollvolumen
$n_B$	–	Brechungsindex
$n_{BL}$	–	Anzahl an Rührerblättern
$n_P$	$\text{m}^{-3}$	Partikelanzahldichte (für alle Größenklassen)

Symbol	Einheit	Bedeutung
$n_R$	$s^{-1}$	Rührerdrehzahl
$n_{R,1s}$	$s^{-1}$	Rührerdrehzahl bei Erfüllung des 1s-Kriteriums
$n_{R,90\%}$	$s^{-1}$	Rührerdrehzahl bei Erfüllung des 90%-Schichthöhenkriteriums
$n_{SS}$	–	Anzahl an Stromstörern
$N$	–	Anzahl an Partikeltrajektorien
$N_{max}$	–	Maximale Anzahl an zu berechneten Partikeltrajektorien
$N_{KI}$	–	Anzahl an Euler-Lagrange-Kopplungsiterationen
$N_L$	–	Anzahl an Lagrangeschen Zwischeniterationen (inneren Lagrange-Schleifen)
$N_P$	–	Anzahl an realen Teilchen, die durch ein repräsentatives Teilchen (Parcel) erfasst werden
Ne	–	Newtonzahl
$p$	$kg\ m^{-1}\ s^{-2}$	Druck
$P_R$	$kg\ m^2\ s^{-3}$	Rührerleistung bzw. Leistungseintrag
$P$	–	Wahrscheinlichkeit
$P_{PPK}$	–	Wahrscheinlichkeit für eine Partikel-Partikel-Kollision
$P_\alpha$	–	Irrtumswahrscheinlichkeit
$P_\varepsilon$	–	statistische Sicherheit
$r$	m	Radius
$\mathbf{r}, r_i$	m	Ortsvektor
$R_{AB}$	–	Geschwindigkeitskorrelation zwischen zwei kollidierenden Teilchen A und B
$\mathcal{R}_E, R_{E,ij}$	–	Eulerscher Korrelationstensor (auch Orts- bzw. Raumkorrelationstensor genannt)
$\mathbf{R}_E, R_{E,i}$	–	Eulerscher Korrelationsvektor; reduzierte Form von $\mathcal{R}_E$
$\mathcal{R}_L, R_{L,ij}$	–	Lagrangescher Korrelationstensor (auch Auto- bzw. Zeitkorrelationstensor genannt)
$\mathbf{R}_L, R_{L,i}$	–	Lagrangescher Korrelationsvektor; reduzierte Form von $\mathcal{R}_L$
$R_L$	–	Lagrangesche Korrelation; reduzierte Form von $\mathbf{R}_L$
$\mathbf{R}_P, R_{P,i}$	–	Effektiver Korrelationsvektor
Re	–	Reynoldszahl
Re <sub>P</sub>	–	Partikel-Reynoldszahl bzgl. Translation
Re <sub>R</sub>	–	Partikel-Reynoldszahl bzgl. Rotation
Re <sub>S</sub>	–	Partikel-Reynoldszahl bzgl. Scherung

Symbol	Einheit	Bedeutung
$Re_{vt}$	–	Grenz-Reynoldszahl, ab der vollausbildete turbulente Strömung vorliegt
$s$	–	Restitutionskoeffizient
$s_X^2, s_X$	abh. von $X$	Empirische Varianz bzw. Streuung von $X$
$s_{BL}$	m	Stärke der Rührerblätter
$s_{SS}$	m	Stärke der Stromstörer
$S_\phi$	abh. von $\phi$	Fluidquellterm für Variable $\phi$
$S_{\phi,P}$	abh. von $\phi$	Partikelquellterm für Variable $\phi$
$S_S$	m	Lineares Längenmaß der Segregation
$St$	–	Stokeszahl
$t$	s	Zeit
$t_{1P}$	s	Theoretische Zeit, welche ein einzelnes Parcel zu Erzeugung einer identischen Statistik benötigen würde
$t_{calc}$	s	Berechnungszeit
$t_{ref}$	s	Referenzzeit
$t_{KV}$	$s\,m^{-3}$	Mittlere Verweilzeit eines Teilchens in einem bestimmten Kontrollvolumen (bezogen auf dessen Volumen)
$\mathbf{T}$	$kg\,m^2\,s^{-2}$	Drehmoment durch die Strömung
$T_R$	$kg\,m^2\,s^{-2}$	Rührerdrehmoment
$\mathbf{T}_\Omega$	$kg\,m^2\,s^{-2}$	Zusätzliches Drehmoment durch Transformation auf ein rotierendes Koordinatensystem
$T$	s	Zeitmaß der Turbulenz
$T_D$	s	Zeit, die ein Teilchen zur Wirbeldurchquerung benötigt
$T_E$	s	Wirbellebensdauer
$\mathbf{T}_L, T_{L,i}$	s	Vektor der Lagrangeschen integralen Zeitmaße der Turbulenz für die verschiedenen Koordinatenrichtungen
$T_L$	s	Lagrangesches integrales Zeitmaß der Turbulenz; reduzierte Form von $\mathbf{T}_L$
$\mathcal{T}$	$kg\,m^{-1}\,s^{-2}$	Spannungstensor
$\mathbf{u}, u_i$	$m\,s^{-1}$	Momentane Fluidgeschwindigkeit
$\mathbf{U}, U_i$	$m\,s^{-1}$	Mittlere Fluidgeschwindigkeit
$\mathbf{u}', u'_i$	$m\,s^{-1}$	Schwankungsgeschwindigkeit des Fluids
$u_\tau$	$m\,s^{-1}$	Wandschubspannungsgeschwindigkeit
$U_{RU}$	$m\,s^{-1}$	Rührerumfangsgeschwindigkeit — tangentielle Geschwindigkeit an den Blattspitzen
$\bar{U}$	$m\,s^{-1}$	Querschnittsgemittelte Fluidgeschwindigkeit
$U^+$	–	Dimensionslose wandparallele Geschwindigkeit

Symbol	Einheit	Bedeutung
$\mathbf{v}, v_i$	$\text{m s}^{-1}$	Momentane Partikelgeschwindigkeit
$\mathbf{V}, V_i$	$\text{m s}^{-1}$	Mittlere Partikelgeschwindigkeit
$\mathbf{v}', v'_i$	$\text{m s}^{-1}$	Schwankungsgeschwindigkeit der Partikel
$v_{s1}$	$\text{m s}^{-1}$	Stationäre Sinkgeschwindigkeit eines einzelnen Teilchens
$v_s$	$\text{m s}^{-1}$	Stationäre Sinkgeschwindigkeit im Schwarm
$\mathbf{v}_{AB}$	$\text{m s}^{-1}$	Relative Geschwindigkeit zwischen Partikel $A$ und Partikel $B$
$V_{KV}$	$\text{m}^3$	Volumen eines Kontrollvolumens
$V_{RG}$	$\text{m}^3$	Volumen des Rührguts
$\mathbf{w}, w_i$	$\text{m s}^{-1}$	Relative Geschwindigkeit zwischen Fluid und Teilchen
$\mathbf{x}, x_i$	$\text{m}$	Betrachtete Koordinaten
$\mathbf{x}_P, x_{i,P}$	$\text{m}$	Momentane Partikelkoordinaten
$X$	abh. von $X$	Zufallsgröße
$x$	abh. von $x$	Merkmal einer Stichprobe
$\bar{x}$	abh. von $x$	Empirischer Mittelwert des Merkmals $x$ berechnet aus einer Stichprobe
$y_W$	$\text{m}$	Normaler Wandabstand
$y^+$	–	Dimensionsloser normaler Wandabstand
$Z_n$	–	Stichprobenfunktion
$z_\alpha$	–	Grenze des Konfidenzintervalls für $Z_n$ bei gegebener Irrtumswahrscheinlichkeit

## Griechische Symbole:

Symbol	Einheit	Bedeutung
$\alpha_{BL}$	rad bzw. $^\circ$	Anstellwinkel der Rührerblätter
$\alpha$	rad bzw. $^\circ$	Auftreffwinkel bei Partikel-Wand-Kollisionen (der Winkel zwischen Teilchenbahn und Wand)
$\gamma_i$	–	Linearer Interpolationsfaktor
$\gamma_{CDS}$	–	Gewichtungsfaktor bei der Diskretisierung der konvektiven Flüsse (Anteil an $CDS$ )
$\gamma_R$	rad bzw. $^\circ$	Rauhigkeitswinkel
$\gamma_\rho$	–	Relative Dichte $\rho/\rho_P$
$\Gamma_\phi$	abh. von $\phi$	Diffusionskoeffizient für Variable $\phi$

Symbol	Einheit	Bedeutung
$\delta_\ell$	m	Dicke der laminaren Grenzschicht
$\Delta\mathbf{r}, \Delta r_i$	m	Ortsverschiebungsvektor (Differenz zweier Ortsvektoren)
$\Delta r$	m	Betrag des Ortsverschiebungsvektors $ \Delta\mathbf{r} $
$\Delta t$	s	Betrachteter Zeitschritt
$\Delta x_S$	m	Interferenzstreifenabstand im Messvolumen
$\Delta x_R$	m	Profiltraganteil
$\Delta z_R$	m	Mittlere Rauhtiefe
$\varepsilon$	$\text{m}^2 \text{s}^{-3}$	Dissipationsrate der turbulenten kinetischen Energie
$\varepsilon_{rel}$	–	Relativer statistischer Fehler
$\zeta$	–	Gleichverteilte Zufallszahl
$\eta_K$	m	Kolsche s Mikromaß der Turbulenz
$\theta$	rad bzw. °	Winkelcoordinate im Zylinderkoordinatensystem
$\Theta_L$	rad bzw. °	Halber Kreuzungswinkel der Laserstrahlen
$\vartheta_g$	rad bzw. °	Geometrischer Stoßwinkel
$\vartheta$	rad bzw. °	Wirksamer Stoßwinkel
$\vartheta_0$	rad bzw. °	Grenzstoßwinkel
$\kappa$	–	Von Kármán Konstante ( $\kappa = 0.41$ )
$\lambda$	m	Wellenlänge
$\lambda_M$	m	Maxwellsche mittlere freie Weglänge
$\mu$	$\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-1}$	Dynamische Viskosität des Fluids
$\mu_B$	$\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-1}$	Kompressionsviskosität
$\mu_d, \mu_s$	–	Dynamischer und statischer Reibungsbeiwert
$\mu_t$	$\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-1}$	Turbulente Viskosität
$\mu_X$	abh. von $X$	Erwartungswert (bzw. Mittelwert) von $X$ <sup>2</sup>
$\nu$	$\text{m}^2 \text{s}^{-1}$	Kinematische Viskosität des Fluids
$\nu_G$	$\text{m}^2 \text{s}^{-1}$	Mittlere kinematische Viskosität der Suspension
$\xi$	–	Gauß-verteile Zufallszahl mit einem Erwartungswert von 0 und einer Varianz von 1
$\rho$	$\text{kg m}^{-3}$	Dichte des Fluids
$\rho_G$	$\text{kg m}^{-3}$	Gemischdichte
$\rho_P$	$\text{kg m}^{-3}$	Dichte der Partikel
$\sigma_k$	–	Konstante für $k$ - $\varepsilon$ -Turbulenzmodell ( $k$ -Gleichung)
$\sigma_\varepsilon$	–	Konstante für $k$ - $\varepsilon$ -Turbulenzmodell ( $\varepsilon$ -Gleichung)
$\sigma_X^2, \sigma_X$	abh. von $X$	Varianz bzw. Streuung von $X$ <sup>3</sup>

<sup>2</sup>Der Erwartungswert  $\mu_X$  ist das 1. Moment der Verteilung von  $X$

<sup>3</sup>Die Varianz  $\sigma_X$  ist das 2. zentrale Moment der Verteilung von  $X$

Symbol	Einheit	Bedeutung
$\tau_C$	s	Mittlere Zeit zwischen Partikel-Partikel-Kollisionen
$\tau_F$	s	Charakteristisches Zeitmaß der Strömung
$\tau_K$	s	Zeitmaß der kleinsten Wirbel nach Kolmogorov
$\tau_P$	s	Partikelrelaxationszeit
$\tau_W$	$\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-2}$	Wandschubspannung
$\Upsilon_S$	–	Verhältnis aus $\text{Re}_S$ und $\text{Re}_P$
$\Upsilon_R$	–	Verhältnis aus $\text{Re}_R$ und $\text{Re}_P$
$\varphi$	abh. von $\varphi$	Skalare Größe: Momentanwert
$\phi$	abh. von $\phi$	Skalare Größe: Mittelwert
$\varphi'$	abh. von $\varphi'$	Skalare Größe: Schwankungswert
$\varphi_F$	–	Volumenanteil der fluiden Phase
$\varphi_P$	–	Volumenanteil der dispersen Phase
$\varphi_{P,max}$	–	Maximal möglicher Volumenanteil der dispersen Phase (abhängig von der Teilchenform und dem Partikelgrößenspektrum)
$\varphi_{P,M}$	–	Mittlerer Volumenanteil der dispersen Phase (bezogen auf das gesamte Strömungsgebiet)
$\psi$	–	Symmetrischer Schiefeparameter der Kollision
$\psi_0$	–	Grenzschiefeparameter
$\omega_{\mathbf{F}}, \omega_{i,F}$	$\text{s}^{-1}$	Rotation der Fluidströmung
$\omega_{\mathbf{P}}, \omega_{i,P}$	$\text{s}^{-1}$	Momentane Partikelwinkelgeschwindigkeit
$\omega_{\mathbf{r}}, \omega_{i,r}$	$\text{s}^{-1}$	Relative Winkelgeschwindigkeit zwischen Fluid und Teilchen
$\Omega_{\mathbf{G}}, \Omega_{i,G}$	$\text{s}^{-1}$	Winkelgeschwindigkeit des rotierenden Koordinatensystems
$\Omega_G$	$\text{s}^{-1}$	Betrag der Winkelgeschwindigkeit des rotierenden Koordinatensystems $ \Omega_{\mathbf{G}} $
$\Omega_R$	$\text{s}^{-1}$	Winkelgeschwindigkeit des Rührers

## Indizes:

Symbol	Bedeutung
*	Nach der Kollision



Symbol	Bedeutung
$\perp$	Senkrecht zu den Interferenzstreifen im Messvolumen und in der Ebene der sich kreuzenden Laserstrahlen
$A$	Partikel $A$
$B$	Partikel $B$
$BKS$	Bewegtes Koordinatensystem (Translation und Rotation)
$c$	Auf der Symmetrielinie / im Zentrum
$F$	Am Ort des Fluidelements
$K$	Am Kontaktpunkt
$KS$	Koordinatensystem
$m$	Räumlicher Mittelwert
$n$	Normale Richtung
$P$	Am Partikelort
$PPK$	Partikel-Partikel-Kollision
$PWK$	Partikel-Wand-Kollision
$RKS$	Ruhendes Koordinatensystem (ortsfest)
$r$	Radiale Richtung
$t$	Tangentiale Richtung

## Abkürzungen:

Abkürzung	Bedeutung
$AFFT$	<i>A</i> daptive <i>F</i> orce- <i>F</i> ield <i>T</i> echnique
$ASS$	<i>A</i> pproximate <i>S</i> teady- <i>S</i> tate
$BDS$	<i>B</i> ackward <i>D</i> ifference <i>S</i> cheme
$CDS$	<i>C</i> entral <i>D</i> ifference <i>S</i> cheme
$CFD$	<i>C</i> omputational <i>F</i> luid <i>D</i> ynamics
$CM$	<i>C</i> licking <i>M</i> esh
$CS$	<i>C</i> omputational <i>S</i> napshot
$DDD$	<i>D</i> ynamic <i>D</i> omain <i>D</i> ecomposition
$DNS$	<i>D</i> irecte <i>N</i> umerical <i>S</i> imulation
$DRB$	<i>D</i> irichlet- <i>R</i> and <i>B</i> edingung
$FDS$	<i>F</i> orward <i>D</i> ifference <i>S</i> cheme
$FEM$	<i>F</i> inite <i>E</i> lements <i>M</i> ethod

Abkürzung	Bedeutung
<i>FMG</i>	<i>F</i> ull <i>M</i> ulti <i>G</i> rid Method
<i>FR</i>	<i>F</i> rozen <i>R</i> otor
<i>FVM</i>	<i>F</i> inite <i>V</i> olumes <i>M</i> ethod
<i>IBC</i>	<i>I</i> mpeller <i>B</i> oundary <i>C</i> ondition
<i>ILU</i>	<i>I</i> ncomplete <i>L</i> ower- <i>U</i> pper Decomposition
<i>IO</i>	<i>I</i> nnner- <i>O</i> uter
<i>KV</i>	<i>K</i> ontroll <i>V</i> olumen
<i>LES</i>	<i>L</i> arge <i>E</i> ddy <i>S</i> imulation
<i>LDA</i>	<i>L</i> aser- <i>D</i> oppler <i>A</i> nemometry
<i>MDM</i>	<i>M</i> oving <i>D</i> eforming <i>M</i> esh
<i>MFR</i>	<i>M</i> ultiple <i>F</i> rames of <i>R</i> eference
<i>MPI</i>	<i>M</i> essage <i>P</i> assing <i>I</i> nterface
<i>NRB</i>	<i>N</i> eumann- <i>R</i> and <i>B</i> edingung
<i>PDA</i>	<i>P</i> hase- <i>D</i> oppler <i>A</i> nemometry
<i>PISO</i>	<i>P</i> ressure <i>I</i> mplicit with <i>S</i> plitting of <i>O</i> perators
<i>PIV</i>	<i>P</i> article <i>I</i> mage <i>V</i> elocimetry
<i>PPK</i>	<i>P</i> artikel- <i>P</i> artikel <i>K</i> ollisionen
<i>PQT</i>	<i>P</i> artikel <i>Q</i> uell <i>T</i> erme
<i>RANS</i>	<i>R</i> eynolds <i>A</i> veraged <i>N</i> avier- <i>S</i> tokes Equation
<i>RB</i>	<i>R</i> and <i>B</i> edingung
<i>RNG</i>	<i>R</i> e <i>N</i> ormalisation <i>G</i> roup
<i>RS</i>	<i>R</i> eynolds <i>S</i> tress
<i>SDD</i>	<i>S</i> tatic <i>D</i> omain <i>D</i> ecomposition
<i>SGS</i>	<i>S</i> ub <i>G</i> rid <i>S</i> cale
<i>SIMPLE</i>	<i>S</i> emi <i>I</i> mplicit Method for <i>P</i> ressure <i>L</i> inked <i>E</i> quations
<i>SIP</i>	<i>S</i> trongly <i>I</i> mplicit <i>P</i> rocedure
<i>SIPSOL</i>	<i>SIP-SOL</i> ver
<i>SM</i>	<i>S</i> liding <i>M</i> esh
<i>UDS</i>	<i>U</i> pwind <i>D</i> ifference <i>S</i> cheme