

## 2 Charakterisierung von Zweiphasenströmungen

Die in der vorliegenden Arbeit betrachteten Ableitungen beschränken sich auf disperse Zweiphasenströmungen (als grundlegende Literatur zum Thema Mehrphasenströmungen seien hier exemplarisch die Bücher von Crowe et al. [55] und Hetsroni [122] genannt), wobei feste Teilchen mit kugelförmiger Form (chemisch inert, nicht deformierbar und von homogener Dichte) in Gas- oder Flüssigkeitsströmungen betrachtet werden. Im Folgenden werden einige wichtige Größen zur Charakterisierung von Zweiphasenströmungen beschrieben. Je nach Bedeutung für die jeweiligen Untersuchungen wird auf die einzelnen Größen in den entsprechenden Abschnitten noch näher eingegangen.

### Beschreibung der Zusammensetzung

Zur Beschreibung der Partikelkonzentration lässt sich die Anzahl an Teilchen pro Volumen, die Partikelanzahldichte  $n_P$ , angeben. Es ist zu bemerken, dass die Dichte zwar an jeder beliebigen Stelle im Raum punktförmig definierbar ist, für statistisch abgesicherte Mittelwerte aber ein Mindestvolumen zur Mittelung zu betrachten ist. Eine ausführlichere Beschreibung und Quantifizierung dieser sowohl für die disperse als auch für die fluide Phase relevanten Grenzbetrachtung (besonders bei einer Kontinuumsbetrachtung) findet sich z.B. bei Crowe et al. [55] und Wassen [342].

Die Konzentration kann auch über den Volumenanteil der fluiden und der dispersen Phase  $\varphi_F$  und  $\varphi_P$  beschrieben werden, wobei  $\varphi_F + \varphi_P = 1$  gilt. Dabei muss, wie auch bei allen weiteren Größen, zwischen globalen und lokalen Werten unterschieden werden. Im Falle monodisperser kugelförmiger Teilchen gilt folgender Zusammenhang zwischen Partikelvolumenanteil und Partikelanzahldichte:

$$\varphi_P = \frac{1}{6}\pi d^3 n_P \quad (2.1)$$

Je nach Art der Kugelpackung lassen sich die maximal möglichen Volumenanteile der dispersen Phase bestimmen. Bei monodispersen Teilchen und kubisch einfacher Packung ist ein maximaler Volumenanteil von  $\varphi_P = 0.52$  erreichbar. Liegt in der Schüttung eine kubisch innenzentrierte Anordnung vor, so ist ein Volumenanteil von  $\varphi_P = 0.68$  realisierbar, während bei hexagonal oder kubisch dichtester Packung

jeweils ein Wert von  $\varphi_P = 0.74$  möglich ist. In der Realität ist allerdings mit einer Zufallsschüttung zu rechnen, in welcher ein maximaler Partikelvolumenanteil von  $\varphi_P \approx 0.63$  erreicht wird.

Durch Kombination der Volumenanteile der beiden Phasen mit der jeweiligen Dichte lassen sich die Gemischdichte der fluiden und der dispersen Phase berechnen. Aus der Summe der beiden Gemischdichten der einzelnen Phasen berechnet sich dann die Dichte des Gemisches  $\rho_G$ .

$$\rho_G = (1 - \varphi_P) \rho + \varphi_P \rho_P \quad (2.2)$$

Die mittlere kinematische Viskosität einer Suspension  $\nu_G$  wird nur geringfügig durch die Feststoffbeladung verändert. Sie lässt sich nach einem Ansatz von Eilers [82] für Gemische mit  $\varphi_P \leq 0.4$  wie folgt bestimmen:

$$\nu_G = \frac{\mu}{\rho_G} \left( 1 + \frac{5}{4} \frac{\varphi_P \varphi_{P,max}}{\varphi_{P,max} - \varphi_P} \right)^2 \quad (2.3)$$

Der maximale Partikelvolumenanteil  $\varphi_{P,max}$  bezieht sich dabei auf den Feststoffgehalt in der sedimentierten Bodenschicht, d.h. der Wert ist abhängig von der Partikelform und dem Partikelgrößenspektrum.

Neben den Volumenanteilen lassen sich auch Massenanteile definieren. Verbreiteter ist allerdings die Angabe einer (globalen) Massenbeladung  $M$ . Dabei wird der Massenstrom der dispersen Phase  $\dot{m}_P$  mit dem der Fluidphase<sup>1</sup>  $\dot{m}_F$  ins Verhältnis gesetzt.

$$M = \frac{\dot{m}_P}{\dot{m}_F} = \frac{\rho_{GP} |\mathbf{V}|}{\rho_{GF} |\mathbf{U}|} = \frac{\varphi_P \rho_P |\mathbf{V}|}{(1 - \varphi_P) \rho |\mathbf{U}|} \quad (2.4)$$

### Teilchenabstand

Der Abstand der Teilchen lässt sich unter Zuhilfenahme der kinetischen Gastheorie (s. z.B. Wedler [344]) in Form einer mittleren freien Weglänge beschreiben. Für diese gilt unter Berücksichtigung der Bewegung der gestoßenen Teilchen ( $\rightarrow$  Maxwell'sche mittlere freie Weglänge):

$$\lambda_M = \frac{1}{\sqrt{2}} \pi^{-1} n_P^{-1} d^{-2} = \frac{1}{6\sqrt{2}} d \varphi_P^{-1} \quad (2.5)$$

Das mittlere Volumen, welches einem Teilchen zur Verfügung steht, beträgt  $n_P^{-1}$ . Dies entspricht einem Würfel mit einer Kantenlänge von  $\ell = n_P^{-1/3}$ . Bei monodispersen Teilchen gilt dann entsprechend

$$\ell = d \left( \frac{1}{6} \pi \varphi_P^{-1} \right)^{1/3} \quad (2.6)$$

Beispielhaft berechnet sich somit für Teilchen mit  $d = 100 \mu\text{m}$  und einem Partikelvolumenanteil von  $\varphi_P = 0.02$  eine Teilchenkonzentration von  $n_P \approx 38 \cdot 10^9 \text{ m}^{-3}$ , eine Würfelkantenlänge von  $\ell \approx 300 \mu\text{m}$  und eine mittlere freie Weglänge von  $\lambda_M \approx 590 \mu\text{m}$ .

<sup>1</sup>Die fluide Phase wird in diesem Zusammenhang auch oft als Trägerphase bezeichnet.

### Folgevermögen der einzelnen Teilchen

Die Partikelrelaxationszeit  $\tau_P$  beschreibt die Reaktionszeit eines Teilchens auf eine Änderung der Geschwindigkeit des umgebenden Fluids. Im Stokesschen Bereich gilt dann

$$\tau_P = \frac{1}{18} \rho_P d^2 \mu^{-1} \quad (2.7)$$

Betrachtet man außer der Widerstandskraft keine weiteren Kräfte, so reduziert sich die Partikelbewegungsgleichung auf

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \tau_P^{-1} (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \quad (2.8)$$

Bei konstanter Fluidgeschwindigkeit  $\mathbf{v}$  und einem ruhenden Teilchen zum Startzeitpunkt  $t = 0$  s ergibt sich für den Zeitpunkt  $t$  die folgende Lösung:

$$\mathbf{v} = [1 - \exp(-t \tau_P^{-1})] \mathbf{u} \quad (2.9)$$

Die Partikelrelaxationszeit  $\tau_P$  ist dann die Zeit, die ein Teilchen benötigt, um aus dem Ruhezustand auf 63% ( $= 1 - e^{-1}$ ) der Fluidgeschwindigkeit beschleunigt zu werden.

Zur Charakterisierung des Folgevermögens in einer turbulenten Strömung wird die Stokeszahl  $St$  herangezogen. Diese setzt die Partikelrelaxationszeit  $\tau_P$  in Beziehung zu einer charakteristischen Zeit der Strömung  $\tau_F$ <sup>2</sup>:

$$St = \tau_P / \tau_F \quad (2.10)$$

Ist  $St \ll 1$ , so ist die Partikelrelaxationszeit relativ klein im Vergleich zum Fluidzeitmaß und die Teilchen haben ausreichend Zeit für eine Angleichung ihrer Geschwindigkeit an die des Fluids. Die Schlupfgeschwindigkeit wird klein sein und die Teilchen können den Wirbelstrukturen folgen. Die Dispersion der dispersen Phase ist somit etwa von gleicher Größe wie die Dispersion des Fluids. Im Fall von  $St \gg 1$  haben die Teilchen praktisch keine Möglichkeit auf Änderungen der Fluidgeschwindigkeit zu reagieren, da die zeitliche Abfolge im Vergleich zur Partikelrelaxationszeit zu schnell erfolgt. Die Teilchenbahnen werden daher nur wenig durch Änderungen der Fluidgeschwindigkeit beeinflusst, d.h. die Teilchen durchqueren Wirbelstrukturen ohne auf diese zu reagieren. Die Dispersion des Fluids wird somit größer sein als die Dispersion der dispersen Phase. Sind die Zeitmaße von gleicher Größenordnung, so sind größere Wirbelstrukturen in der Lage die Teilchen für eine gewisse Zeit einzufangen. Dadurch kann es zu einer lokalen Konzentrationserhöhung kommen (s. z.B. Eaton & Fessler [80]). Es ist aber auch möglich, dass die Teilchen aus der Scherschicht herausgeschleudert werden, so dass die Dispersion der Partikelphase größer als die der Fluidphase sein kann. Diese Zusammenhänge konnten z.B. von Chung & Troutt [45] durch experimentelle und numerische Arbeiten bestätigt werden.

<sup>2</sup>Nach Nouri & Whitelaw [221] lässt sich das charakteristische Zeitmaß einer turbulenten Rührkesselströmung vereinfachend mit dem Quotienten aus der Rührerblattbreite und der Rührerumfangsgeschwindigkeit abschätzen.

### Verdünnte bzw. dichte Zweiphasenströmungen

Verdünnte Zweiphasenströmungen sind durch die lokalen fluiddynamischen Kräfte dominiert, während bei dichten Zweiphasenströmungen die Partikelbewegungen durch Kollisionen bestimmt werden. Eine qualitative Unterteilung lässt sich anhand des Verhältnisses von der Partikelrelaxationszeit  $\tau_P$  zu  $\tau_C$  vornehmen (s. Crowe [51][52] bzw. Crowe et al. [55]), wobei  $\tau_C$  die mittlere Zeit zwischen Partikel-Partikel-Kollisionen beschreibt<sup>3</sup>. Bei  $\tau_P/\tau_C < 1$  spricht man von verdünnten Strömungen (Kollisionen treten hier relativ selten auf und  $\tau_C$  ist somit sehr groß, d.h. die Teilchen haben zwischen den Kollisionen ausreichend Zeit um auf lokale Fluidkräfte zu reagieren) und bei  $\tau_P/\tau_C > 1$  entsprechend von dichten Zweiphasenströmungen (zwischen den Kollisionen bleibt kaum Reaktionszeit). Im Bereich von  $\tau_P/\tau_C \approx 1$  liegt keine klare Dominanz vor, so dass sowohl Fluidkräfte als auch Kollisionen für die Ausbildung der Strömung von Bedeutung sind.

Als Abschätzung für  $\tau_C$  sollen hier die Ergebnisse einer ausführlichen Analyse von Sommerfeld [294] dienen. Dieser hatte die Stoßfrequenz  $f_K$  (wobei  $f_K = \tau_C^{-1}$  gilt) mit Hilfe der kinetischen Gastheorie sowie der Annahme von Isotropie abgeleitet. Bei monodispersen Teilchen ergibt sich somit für die Stoßfrequenz:

$$f_K = 24\pi^{-1/2} \varphi_P d^{-1} \sigma_v \quad (2.11)$$

Dabei lässt sich die Standardabweichung der Partikelfluktationsgeschwindigkeit  $\sigma_v$  in etwa von gleicher Größenordnung wie die mittlere Fluidfluktationsgeschwindigkeit  $\sigma_u$  ansetzen. Für diese gilt bei Kenntnis der turbulenten kinetischen Energie  $k$  und isotroper Turbulenz  $\sigma_u = (\frac{2}{3}k)^{1/2}$ . Nimmt man vereinfachend die Partikelrelaxationszeit für Stokessche Bedingungen ( $\tau_P = \frac{1}{18} \rho_P d^2 \mu^{-1}$ ) an, so resultiert die folgende Bedingung für verdünnte Zweiphasenströmungen:

$$\tau_P/\tau_C = \frac{4}{3}\pi^{-1/2} d \rho_P \varphi_P \mu^{-1} \sigma_v < 1 \quad (2.12)$$

$$\text{bzw.} \quad \varphi_P < \frac{3}{4}\pi^{1/2} d^{-1} \rho_P^{-1} \mu \sigma_v^{-1} \approx \frac{3}{4}\pi^{1/2} d^{-1} \rho_P^{-1} \mu (\frac{2}{3}k)^{-1/2} \quad (2.13)$$

Die Bedeutung von Partikel-Partikel-Kollisionen ist also umso größer, je schwerer und größer die Teilchen sind und je stärker ihre Geschwindigkeit schwankt. Eine

<sup>3</sup>Elghobashi [84] unterscheidet zwischen verdünnter und dichter Zweiphasenströmung auf Basis des Partikelvolumenanteils sowie dem Verhältnis von Partikelrelaxationszeit zum turbulenten Zeitmaß. Er spricht bereits ab einem Partikelvolumenanteil von 0.001 von einer dichten Zweiphasenströmung. Einen anderen Ansatz legen Lun et al. [186][184] zu Grunde. Sie argumentieren bei der Abgrenzung von verdünnter zu dichter Zweiphasenströmung über den dominanten Mechanismus für die Energie- und Impulsübertragung bei granularen Strömungen. Danach liegt eine dichte Zweiphasenströmung ab einem Partikelvolumenanteil von ca. 0.1 vor, da dann die Übertragung nicht mehr durch die Kinetik, sondern durch die Kollisionen bestimmt wird. Bei Berechnungen einer turbulenten Zweiphasenströmung (Gas/Feststoff) im horizontalen Kanal zeigten Lun & Liu [185] allerdings, dass Partikel-Partikel-Kollisionen auch bei Strömungen mit Partikelvolumenanteilen der Größenordnung 0.001 eine sehr wichtige Rolle für das Erreichen einer vollentwickelten stationären Suspension spielen. Aus ihrer Sicht sollte der Effekt daher nicht vernachlässigt werden.

Erhöhung der Fluidviskosität reduziert die Bedeutung der Kollisionen. Betrachtet man Glaskügelchen ( $\rho_P = 2500 \text{ kg m}^{-3}$ ) in einer turbulenten Wasser-Strömung ( $\mu = 10^{-3} \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$ ) mit  $k \approx 0.03 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$  (dies entspricht  $\sigma_u = 0.14 \text{ m s}^{-1}$ ), so errechnen sich Grenzpartikelvolumenanteile von 0.038 bei  $d = 100 \mu\text{m}$ , 0.019 bei  $d = 200 \mu\text{m}$  und 0.0076 bei  $d = 500 \mu\text{m}$ . Je nach Anwendungsfall sind somit bei gerührten Partikelsuspensionen der Übergangsbereich und/oder der kollisionsdominierte Bereich von Relevanz, wobei im Rührkessel in verschiedenen Zonen unterschiedliche Gewichtungen der Bedeutung von Kollisionen und Fluidkräften vorliegen können.

