

**Eigenlösungen der Maxwellgleichung auf  $S^1 \times S^3$   
und konforme Symmetrie,  
Untersuchungen am  $U(2)$ -Programm**

Dissertation



zur Erlangung des akademischen Grades

doctor rerum naturalium (Dr. rer. nat.)

vorgelegt der

Mathematisch-Naturwissenschaftlich-Technischen Fakultät  
der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg

von Herrn Karsten Busse

geb. am: 10.01.1968 in: Bad Harzburg

Gutachter:

1. Prof. Dr. E. Donth
2. Prof. Dr. J. Louis
3. Prof. Dr. St. Theisen

Halle (Saale), den 06.07.1998

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Vorwort . . . . .	1
1.2	Das $U(2)$ -Programm . . . . .	3
1.3	Ziel der Arbeit . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Raum- und Symmetriebetrachtungen</b>	<b>7</b>
2.1	Allgemeines . . . . .	7
2.2	Metrik . . . . .	8
2.3	Transformationen und konforme Symmetrie . . . . .	10
2.3.1	Infinitesimale konforme Generatoren . . . . .	14
2.3.2	$\rho$ -Transformationen . . . . .	17
2.3.3	Transformationen quasiprimärer Felder . . . . .	20
2.4	Lie-Gruppen und Algebren . . . . .	22
<b>3</b>	<b>Differentialgleichungen</b>	<b>24</b>
3.1	Klein-Gordon-Feld . . . . .	25
3.1.1	Masselose Klein-Gordon-Gleichung . . . . .	25
3.1.2	Erweiterte Klein-Gordon-Gleichung . . . . .	26
3.1.3	Konforme Generatoren als Stufenoperatoren . . . . .	27
3.2	Maxwell-Feld . . . . .	33
3.2.1	Wahl der Eichung . . . . .	33
3.2.2	Komplexes Lösungssystem . . . . .	34
3.2.3	Beispiele . . . . .	35

3.2.4	Ausgezeichnete Lösungen . . . . .	37
3.2.5	Proca-Gleichung . . . . .	38
3.3	Klassifizierung und Vergleich . . . . .	39
3.3.1	Nach der ersten Eichung . . . . .	40
3.3.2	Nach der zweiten Eichung . . . . .	44
<b>4</b>	<b>Diskussion</b>	<b>49</b>
4.1	Relevanz für das $U(2)$ -Programm . . . . .	49
4.1.1	Symmetrie . . . . .	49
4.1.2	Differentialgleichungen . . . . .	50
4.2	Verbindung zu anderen Theorien . . . . .	52
4.2.1	Motivation . . . . .	52
4.2.2	Klassisch: konforme = Skalen-Invarianz . . . . .	54
4.2.3	$SU(2, 2)$ : konforme $\neq$ Skalen-Invarianz . . . . .	55
4.3	Zusammenfassung . . . . .	57
	<b>Anhang</b>	<b>59</b>
<b>A</b>	<b>Das <math>U(2)</math>-Programm</b>	<b>59</b>
<b>B</b>	<b>Allgemeine Raum- und Symmetrieeigenschaften</b>	<b>61</b>
B.1	Generatoren der Lie-Algebra . . . . .	61
B.1.1	Biharmonische Koordinaten . . . . .	61
B.1.2	Reelle Erzeugende für $so(4, 2)$ im Minkowskiraum . . . . .	65
B.2	Vollständige Transformation . . . . .	66
B.2.1	$\rho$ -Transformationen und vollständige Transformation . . . . .	72
<b>C</b>	<b>Differentialgleichungen</b>	<b>73</b>
C.1	Klein-Gordon-Gleichung . . . . .	73
C.1.1	Verweis auf andere Literatur . . . . .	73
C.1.2	Anforderungen an die Lösungen . . . . .	74
C.2	Maxwellgleichung . . . . .	75

C.2.1	Aufstellung der Maxwellgleichung . . . . .	75
C.2.2	Eichansatz . . . . .	75
C.2.3	Lösungen . . . . .	79
C.2.4	Globale und andere ausgewählte Lösungen . . . . .	83
C.2.5	Explizite Maxwellgleichungen in 2. Eichung . . . . .	87
C.2.6	Verweis auf andere Literatur . . . . .	88
<b>D</b>	<b>P-Funktion und Hypergeometrische Funktion</b>	<b>91</b>
D.1	Riemannsche P-Funktion . . . . .	91
D.2	hypergeometrische Funktion . . . . .	93
D.3	Entwicklungen der P-Funktion durch Mathematica . . . . .	96
<b>E</b>	<b>Abkürzungen und Definitionen</b>	<b>103</b>
	<b>Literatur</b>	<b>106</b>

# Abbildungsverzeichnis

2.1	$\rho$ -Transformationen: $\vartheta$ -Parameterbereich . . . . .	18
-----	---	----

# Tabellenverzeichnis

2.1	Zulässige Koordinatenintervalle der biharmonischen Koordinaten . . . . .	9
2.2	Basis einer $su(2,2)$ -Algebra . . . . .	16
2.3	Auswirkungen der $\rho$ -Transformationen auf die Metrik . . . . .	19
3.1	Wirkung der $K^{\alpha\pm}$ -Felder auf Eigenwerte . . . . .	28
B.1	$\rho$ -Transformationen und $M^4$ Koordinaten . . . . .	72
D.1	Zusammenstellung der Entwicklungen der $P$ -Funktion . . . . .	100

# Kapitel 1

## Einleitung

### 1.1 Vorwort

Die Beschreibung der Natur, besonders die Beschreibung der Elementarteilchen und ihrer Wechselwirkungen, hat seit Tausenden von Jahren die Physiker und Philosophen beschäftigt. Die Entwicklung von den *Atomen* Demokrits bis zu den *Quarks* von Gell-Mann und Zweig [17] ging einher mit dem technischen Fortschritt. Das Wissen über elementare Prozesse erwuchs aus Messungen und Erfahrungen; diese führten zu Theorien, und diese wiederum erzeugten Vorhersagen, die durch weitere Messungen überprüft werden mußten. Auf diesem Wege hat sich das Standardmodell der Elementarteilchen entwickelt, das den derzeitigen Wissensstand sehr gut beschreiben kann und zudem noch Vorhersagen über weitere Teilchen (Higgs) macht.

Das Standardmodell wird aber nicht als eine endgültige Theorie gesehen, denn es stellt nur eine phänomenologische Beschreibung der Natur dar, und es scheinen keine schlüssigen Zusammenhänge zwischen den einzelnen Aussagen zu stehen. Man benötigt z.B. die Symmetriegruppe  $(SO(3,1) \otimes T^4) \times U(1) \times SU(2)_L \times SU(3)$  und eine Reihe von Parametern, wie die Feinstrukturkonstante  $\alpha$ , den Weinbergwinkel  $\theta_W$ , die Kopplungskonstante der starken Wechselwirkung  $\alpha_S$ , die Teilchenmassen und die Cabibbo-Kobayashi-Maskawa-Matrix. Um zwischen diesen freien Parametern Zusammenhänge zu finden, werden neue Theorien aufgestellt, die (a) das Spektrum und die Gesetze des Standardmodells reproduzieren, dabei (b) eine höhere (einfacher zu beschreibende) Symmetrie besitzen, deren Brechung zu

der gesuchten Symmetrie und eventuell zu den auftretenden Parametern führt sowie (c) potentielle Unstimmigkeiten des Standardmodells, z.B. bei Nichtexistenz des Higgs-Teilchens, umgehen.

Obwohl nicht klar ist, wie so eine übergeordnete Theorie aussehen könnte, werden einzelne Ansätze ausgeschlossen : Die Kaluza-Klein-Theorien erweitern den Minkowski-Raum  $M^4$  um eine heranzmultiplizierte Mannigfaltigkeit ( $M^4 \rightarrow M^4 \times M_{KK}$ ), deren Symmetriegruppe zu den Wechselwirkungen führen soll. Dabei können diese Theorien aber nicht die Chiralität erzeugen, die für die elektroschwache Theorie notwendig ist. Ein in den sechziger und siebziger Jahren erprobter Ansatz, eine Theorie mit einem konform invarianten Lagrangean, würde notwendig zu einem skalenunabhängigen Verhalten führen, dem z.B. die deutlich verschiedenen Massen der Elementarteilchen widersprechen (siehe z.B. [27]).

Als vielversprechendste Ansätze gelten zur Zeit die Supergravitation und die Stringtheorie. Eine geschlossene Darstellung, die zum Standardmodell führt, ist aber auch hier noch nicht zu erkennen.

In dieser Arbeit wird ein weiterer Ansatz untersucht, der von Donth in den letzten fünfzehn Jahren entwickelt und teilweise veröffentlicht wurde [9]-[14]: das  $U(2)$ -Programm. Hierzu gibt es auch eine Reihe von unveröffentlichten Manuskripten, die mir bei der Abfassung der Arbeit zur Verfügung standen [8]. Ihnen ist auch die im Anhang, Abschnitt A, stehende Kurzfassung dieses Ansatzes im Stand von 1994, zu Beginn der vorliegenden Arbeit, entnommen, auf der die im nächsten Abschnitt folgende Beschreibung basiert.

Ausgangspunkt des  $U(2)$ -Programms ist eine Mannigfaltigkeit mit der Topologie  $S^1 \times S^3$  und Minkowski-artiger (1+3)-Signatur. Dabei wird eine Raum-Parametrisierung gewählt, bei der Lösungen (der Maxwell- und der Klein-Gordon-Gleichung) existieren, die zu allen drei  $U(1)$ -Untergruppen der  $SU(2,2)$ , also zu den Erzeugenden der Cartan-Unteralgebra, simultane Eigenlösungen sind. In einem Artikel von E. Schrödingers [34] werden mit der gleichen Parametrisierung Lösungen der Maxwellgleichung (und mit einer anderen Parametrisierung Lösungen der Dirac-Gleichung) in  $S^1 \times S^3$  gefunden, die jedoch wegen einer zusätzlichen Zwangsbedingung nur eine Teilmenge aller Lösungen darstellen und zudem nur als Feldstärken und nicht als Vektorpotentiale formuliert werden.

Ein wichtiger Punkt für das Verständnis des  $U(2)$ -Programms ist die Frage nach der



Querverbindung zu anderen Theorien. Hierbei bietet sich ein Zugang über die Symmetrieeigenschaften an, da die konformen Gruppen von  $S^1 \times S^3$  und  $M^4$  identisch sind. Diese Eigenschaft liegt darin begründet, daß  $(S^1 \times S^3)/\mathbb{Z}_2$  die konforme Kompaktifizierung des Minkowski–Raumes ist. Diese Räume spielen, wie auch die universelle Überlagerungsmannigfaltigkeit  $R^1 \times S^3$ , bei mehreren Autoren eine Rolle [15, 18, 22, 28, 35]. Die Arbeiten sind teilweise auch für das  $U(2)$ –Programm relevant, besonders aber die ausführliche Beschreibung der konformen Symmetrie in vier Dimensionen und der Lösungen der Klein-Gordon-Gleichung, die in dem Buch *Theory of Group Representations and Applications* von Barut und Raczka [1] sowie in dem Artikel von Kalnins et al. [24] zu finden sind.

## 1.2 Das $U(2)$ –Programm

Das  $U(2)$ –Programm ist ein Versuch, die Phänomene der Elementarteilchenphysik aus einigen wenigen Grundannahmen heraus abzuleiten. Dabei spielen teilweise naturphilosophische Aspekte eine Rolle, weswegen man das Programm (noch) nicht in einer geschlossenen mathematischen Form darstellen kann. Die Grundannahmen des  $U(2)$ –Programms bestehen aus acht Punkten, welche als **U1** bis **U8** in der Formulierung von Donth [8, Stand des  $U(2)$ –Programms 1994] im Anhang, Abschnitt A, angegeben sind. Die folgende Darstellung beruht im wesentlichen auf diesen Punkten. Es wird aber versucht, den mathematischen Gehalt stärker zu betonen und weitere Aspekte, besonders die im  $U(2)$ –Programm nicht berücksichtigte Konformität, einzuarbeiten.

Aus der Kenntnis heraus, daß die elektrische Ladung nur diskret auftritt, wird angenommen, daß eine kompakte Mannigfaltigkeit die natürliche Quelle für Elektromagnetismus darstellt (**U1**). Denn eine kompakte Mannigfaltigkeit ermöglicht eine Entwicklung von Feldern nach Wellen, die ein diskretes Eigenwertspektrum besitzen. Der Radius der Mannigfaltigkeit  $R_{S^3}$  darf dabei keine Rolle spielen. Speziell der Grenzfall  $R_{S^3} \rightarrow \infty$  muß erlaubt sein, da dieser für die Erklärung der instantanen Fernwirkung eines quantenmechanischen Experiments<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>Von Einstein als 'spukhafte Fernwirkung' (engl. „*spooky action at a distance*“) bezeichnet. Wird auch durch 'Kollaps der Wellenfunktion' beschrieben.

herangezogen wird (**U2**). Die Felder hängen auf der kompakten Mannigfaltigkeit nur von den internen Winkeln ab, der beliebig große Radius besitzt genausowenig Relevanz wie der Abstand eines Teilchen–Teilchen–Paares mit instantaner Fernwechselwirkung.

Für eine mathematische Beschreibung dieses Aspektes heißt dies speziell, daß eine Streckung (Dilatation) des kompakten Raumes eine invariante Operation sein muß.

Als Mannigfaltigkeit wird ein Raum mit der Topologie  $S^1 \times S^3$  und pseudoriemannscher Signatur (1+3) angesetzt. Dabei werden als Parametrisierung biharmonische Koordinaten gewählt (**U3** und **U4**). Diese Wahl ist natürlich, wenn man bedenkt, daß  $S^1 \times S^3$  die einfachste kompakte Überdeckung des  $M^4$  ist und die biharmonischen Koordinaten ein ausgezeichnetes Koordinatensystem darstellen. Die Auszeichnung manifestiert sich vor allem in der Beschreibung der Symmetriegruppe, die in Abschnitt 2.3.1 behandelt wird.

Die Maxwellgleichungen bilden den Ausgangspunkt für weitere Untersuchungen. Sie sind konform invariant, verhalten sich also für beliebigen Radius  $R_{S^3}$  immer gleich und sie stehen für langreichweitige Kräfte, ihre Lösungen sind also auf der gesamten Mannigfaltigkeit - im Gegensatz zur schwachen Wechselwirkung, die auf lokale Operatoren zurückgeführt wird - definiert.

Nach der Entwicklung der Vektorpotentiale in Eigenfunktionen (**U5**) werden diese weiter in Vakuumelemente zerlegt. Die Statistik dieser Vakuumelemente führt für große Eigenwerte (Meßprozeß führt zu Erwartungswert, der als Mittelung über alle möglichen Zustände gewonnen wird) zu einer diskreten, unendlich hohen Stufe, die mit der Punktförmigkeit der Elementarteilchen im  $M^4$  in Verbindung gebracht wird (**U6**). Neben der Identifizierung von einzelnen Symmetrien des Raumes und der Eigenlösungen mit Ladungssymmetrie ( $e^+$ ,  $e^-$ ) sowie den Generationen von Leptonen, verbleiben nur noch wenige Freiheitsgrade, wobei ein Differentialoperator mit der Erzeugung von Massen in Verbindung gebracht wird (**U8**).

Die Erzeugung von Objekten und Zusammenhängen im  $M^4$  aus den Erkenntnissen, die im  $S^1 \times S^3$  gewonnen wurden, geschieht über mehrere Stufen (**U7**), was im Rahmen dieser Arbeit aber nicht näher betrachtet wird.

## 1.3 Ziel der Arbeit

Das Ziel der Arbeit ist es, einige (der vielen) offene(n) Fragen des  $U(2)$ -Programms zu beantworten.

Dabei werden drei Themenkomplexe angesprochen:

1. Die mit der Maxwellgleichung verbundene Symmetrie ist die vollständige konforme Gruppe. Da  $S^1 \times S^3$  zudem eine Überlagerungsmannigfaltigkeit des  $M^4$  darstellt, wirkt auf beiden Räumen dieselbe konforme Symmetriegruppe  $SO(4, 2)$  bzw.  $SU(2, 2)$ . Durch die Angabe der zugehörigen Differentialoperatoren werden die ursprünglich sieben Generatoren (die eigentlichen Killingvektoren des Raumes) um acht weitere ergänzt. Dabei ergibt sich eine 'natürliche' Erklärung für die Chiralität (also der Unterscheidung von 'rechts' und 'links' bei Wechselwirkungen). In Kapitel 2 der vorliegenden Arbeit werden die diesbezüglichen Ergebnisse und Ergänzungen zum  $U(2)$ -Programm dargelegt.
2. Nach den Punkten U5 und U6 wird den Eigenlösungen der quellenfreien Maxwell-Gleichungen eine besondere Bedeutung zugemessen. Im  $U(2)$ -Programm war nicht sichergestellt, wodurch die bisher bevorzugten 'komponententreuen' Lösungen der Maxwellgleichung explizit ausgezeichnet sind - bzw. daß keine anderen, ähnlich wichtigen Lösungen existieren. Erst mit Angabe des vollständigen Satzes der Eigenlösungen der Maxwell-Gleichung bezüglich der gewählten Basis ist die Möglichkeit gegeben, die Auszeichnung einzelner Lösungen genauer anzugeben. Mit der Wahl aller harmonischen 1-Formen, die nur tangential entlang der Tori wirken, treten neben den beiden bekannten komponententreuen (die  $A_1$ - und  $A_2$ -Lösungen) noch eine weitere einkomponentige ( $A_0$ -Lösung) und eine *Drittellösung* auf.

Die Eigenlösungen lassen sich als Kombination von komplexen Phasen und einer statistischen Verteilung von sogenannten *Vakuumelementen* (die im gewissen Sinn die Rolle von Quanten einnehmen) auffassen, wobei die Statistik aus Bose-Einstein und Fermi-Dirac zusammengesetzt ist. Mit dieser Verteilung und den Vakuumelementen werden im  $U(2)$ -Programm Erwartungswerte für die Feinstrukturkonstante und den Weinbergwinkel berechnet.

Die Eigenlösungen der Maxwell-Gleichungen, ergänzt um die der Klein-Gordon-Gleichung, welche für die Symmetriebetrachtungen interessant sind, bilden den Kernpunkt des Kapitels 3.

3. Wenn das  $U(2)$ -Programm ein richtiger Weg ist, wo liegen dann die Parallelen zu anerkannten Quantenfeldtheorien, die ja teilweise hervorragende Ergebnisse aufzuweisen haben? Die Beantwortung dieser Frage im letzten Kapitel dieser Arbeit trennt sich in manchen Punkten von dem bisherigen Programm (oder widerspricht ihm teilweise sogar). Es wird versucht, und dies ist als spekulativer Ansatz zu verstehen, das  $U(2)$ -Programm über eine konform invariante Theorie mit dem Standardmodell zu verknüpfen.

Im  $U(2)$ -Programm sind noch viele Details ungeklärt, daher werden einige Aspekte einer Elementarteilchentheorie außen vor gelassen oder nur als spekulative Ansätze diskutiert. Zum Teil werden in dieser Arbeit auch Aspekte, die diese spekulativen Ansätze betreffen, aufgegriffen. Darüber hinaus sind einzelne Zwischenergebnisse und kleinere Rechnungen für das  $U(2)$ -Programm relevant. Zu den zusätzlichen Ergebnissen in bezug auf das  $U(2)$ -Programm gehören z.B. Indizien für die starke Wechselwirkung und eine Verknüpfung eines  $U(2)$ -Massenoperators  $\partial_\partial$  mit den Symmetrieoperatoren.

Bei der Beschäftigung mit dem  $U(2)$ -Programm ergaben sich jedoch auch einige Aspekte, deren Motivation nicht nachvollzogen werden konnte. Möglicherweise fehlen nur Zwischenschritte, aber dennoch bedürfen diese Punkte einer ausführlicheren Auseinandersetzung. Zu diesen Aspekten gehören z.B. die Abbildung in den Minkowskiraum, die Existenz von genau drei Generationen und die Bestimmung der Massen der Elementarteilchen.

Wichtige Ergebnisse dieser Arbeit für das  $U(2)$ -Programm werden in Abschnitt 4.1 zusammengefaßt dargestellt.

# Kapitel 2

## Raum– und Symmetriebetrachtungen

### 2.1 Allgemeines

Die zugrundeliegende Mannigfaltigkeit besteht aus einem räumlichen Anteil, der von der 3-Sphäre  $S^3$  gebildet wird und einem zeitlichen  $S^1$  Anteil. Die relevanten topologischen Eigenschaften sind (unter Verwendung der Definitionen nach [5, 19], die auch in den folgenden Abschnitten die maßgeblichen Referenzen sind):

1. Die Betti-Zahlen  $\beta_i$  dieser Mannigfaltigkeit, also die Dimensionen der Kohomologiegruppen, lauten:  $\beta_0 = 1$ ,  $\beta_1 = 1$ ,  $\beta_2 = 0$ ,  $\beta_3 = 1$  und  $\beta_4 = 1$ .
2. Die Eulersche Charakteristik  $\chi(S^1 \times S^3)$  verschwindet demnach:  
$$\chi(S^1 \times S^3) = \sum (-1)^i \beta_i = 0.$$
3. Weil die zweite Kohomologiegruppe trivial ist ( $\beta_2 = 0$ ), gibt es keinen wesentlichen 2-Zyklus. Eine 2-Form  $F_{\mu\nu}$  kann auf ein global definiertes Potential  $A_\mu$  mit  $F = dA$  zurückgeführt werden, wenn  $dF = 0$  gilt.
4. Weil die Eulersche Charakteristik verschwindet, gibt es stetige und nullstellenfreie Vektorfelder auf  $S^1$  und  $S^3$ .

Für die Parametrisierung der Sphäre  $S^3$  bieten sich die biharmonischen Koordinaten an [24, 1]. Dieses Koordinatensystem ermöglicht nicht nur die Variablenseparation für die Lösungen der Klein–Gordon– und der Maxwell–Gleichung, sondern erlaubt zusätzlich die

Darstellung von Eigenfunktionen bezüglich der vollständigen Cartan-Subalgebra von der Symmetriegruppe von  $S^3$ . Es stellt insofern ein ausgezeichnetes Koordinatensystem dieser Mannigfaltigkeit dar.

## 2.2 Metrik

Die Metrik der 3-Sphäre  $S^3$  in biharmonischen Koordinaten läßt sich am einfachsten über die Einbettung in einen vierdimensionalen Euklidischen Raum gewinnen. Mit den Koordinaten  $x, y, z$  und  $w$  des flachen Raumes und der Nebenbedingung

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = R_{S^3}^2 = 1 \quad (2.1)$$

lassen sich die biharmonischen oder Zylinderkoordinaten mit der Koordinatentransformation

$$\left. \begin{aligned} x &= \cos(\vartheta) \cos(\varphi_1) \\ y &= \cos(\vartheta) \sin(\varphi_1) \\ z &= \sin(\vartheta) \cos(\varphi_2) \\ w &= \sin(\vartheta) \sin(\varphi_2) \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

mit  $\varphi_1, \varphi_2 \in [0, 2\pi)$ ,  $\vartheta \in [0, \pi/2]$  gewinnen.

Aus der Metrik  $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + dw^2$  des flachen Raumes folgt, unter Hinzunahme der  $S^1$  mit entgegengesetzter Signatur, die pseudoriemannsche Metrik von  $S^1 \times S^3$  mit biharmonischer Parametrisierung zu  $(\{\tau, \varphi_1, \varphi_2, \vartheta\} = \{x^0, x^1, x^2, x^3\})$ .

$$ds^2 = d\tau^2 - (\cos^2 \vartheta d\varphi_1^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi_2^2 + d\vartheta^2) \quad (2.3)$$

Der metrische Tensor  $g_{\mu\nu}$  ( $\mu, \nu = 0..3$ ) hat die Diagonalform mit der Determinante

$g = -\sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta$  und den Komponenten

$$g_{00} = 1 \quad , \quad g_{11} = -\cos^2 \vartheta \quad , \quad g_{22} = -\sin^2 \vartheta \quad , \quad g_{33} = -1 \quad . \quad (2.4)$$

Die nichtverschwindenden Christoffelsymbole ergeben sich zu:

$$\Gamma_{ij}^k := \frac{1}{2} g^{ks} (\partial_j g_{si} + \partial_i g_{sj} - \partial_s g_{ij}) \quad (2.5)$$

$$\Gamma_{13}^1 = \Gamma_{31}^1 = -\tan \vartheta_3 \quad , \quad \Gamma_{23}^2 = \Gamma_{32}^2 = \cot \vartheta_3 \quad , \quad \Gamma_{11}^3 = -\Gamma_{22}^3 = \sin \vartheta \cos \vartheta \quad (2.6)$$

	$\varphi_1 \in$	$\varphi_2 \in$	$\vartheta \in$	$s_\vartheta \in$	Randbedingungen (Stetigkeit)
I	$[0, 2\pi)$	$[0, 2\pi)$	$[0, \frac{\pi}{2}]$	$\{0, \frac{\pi}{2}\}$	$f(\varphi_1 = 0, \varphi_2, \vartheta) = f(\varphi_1 = 2\pi, \varphi_2, \vartheta)$ $f(\varphi_1, \varphi_2 = 0, \vartheta) = f(\varphi_1, \varphi_2 = 2\pi, \vartheta)$
II	$[0, \pi)$	$[0, 2\pi)$	$[0, \pi]$	$\{0, \frac{\pi}{2}, \pi\}$	$f(\varphi_1 = 0, \varphi_2, \vartheta) = f(\varphi_1 = \pi, \varphi_2, \pi - \vartheta)$ $f(\varphi_1, \varphi_2 = 0, \vartheta) = f(\varphi_1, \varphi_2 = 2\pi, \vartheta)$
III	$[0, 2\pi)$	$[0, \pi)$	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	$\{-\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}\}$	$f(\varphi_1 = 0, \varphi_2, \vartheta) = f(\varphi_1 = 2\pi, \varphi_2, \vartheta)$ $f(\varphi_1, \varphi_2 = 0, \vartheta) = f(\varphi_1, \varphi_2 = \pi, -\vartheta)$
IV	$[0, \pi)$	$[0, \pi)$	$[0, 2\pi)$	$\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, 3\frac{\pi}{2}\}$	$f(\varphi_1 = 0, \varphi_2, \vartheta) = f(\varphi_1 = \pi, \varphi_2, \pi - \vartheta + 2\pi)$ $f(\varphi_1, \varphi_2 = 0, \vartheta) = f(\varphi_1, \varphi_2 = \pi, 2\pi - \vartheta)$ $f(\varphi_1, \varphi_2, \vartheta = 0) = f(\varphi_1, \varphi_2, \vartheta = 2\pi)$

Tabelle 2.1: Zulässige Koordinatenintervalle der biharmonischen Koordinaten. Je nach Bereich des Intervalls für  $\vartheta$  erhält man andere singuläre Punkte  $s_\vartheta$  der Metrik.

Der Krümmungstensor und der Krümmungsskalar lauten:

$$R_{ikm}^j := \partial_k \Gamma_{mi}^j - \partial_m \Gamma_{ki}^j + \Gamma_{ks}^j \Gamma_{mi}^s - \Gamma_{ms}^j \Gamma_{ki}^s \quad (2.7)$$

$$R_{212}^1 = -R_{221}^1 = R_{232}^3 = -R_{223}^3 = \sin^2 \vartheta \quad (2.8)$$

$$R_{121}^2 = -R_{112}^2 = R_{131}^3 = -R_{113}^3 = \cos^2 \vartheta \quad (2.9)$$

$$R_{313}^1 = -R_{331}^1 = R_{323}^2 = -R_{332}^2 = 1 \quad \text{sonst } 0 \quad (2.10)$$

$$R_{\mu\nu} = \text{diag}(0, 2 \cos^2 \vartheta, 2 \sin^2 \vartheta, 2) \quad (2.11)$$

$$R = -6 \quad (2.12)$$

Die zulässigen Koordinatenintervalle lassen sich verschieden setzen. In Tabelle 2.1 sind vier Möglichkeiten aufgeführt, die aber unterschiedliche, durch die Metrik entstehende singuläre Punkte ( $\vartheta = s_\vartheta$ ) aufweisen und die zu erweiterten Randbedingungen führen. Der übliche Ansatz (Punkt I in der Tabelle) setzt sich aus drei geschlossenen *Zyklen*,  $\tau, \varphi_1$  und  $\varphi_2$ , und einem Intervall zusammen. Die Endpunkte des Intervalls sind dabei die singulären Punkte. In dieser Parametrisierung sind die beiden Heegaard-Tori der  $S^3$  durch die Randbedingung  $\Phi(\varphi_1, \varphi_2) = \Phi(\varphi_1 + 2\pi, \varphi_2) = \Phi(\varphi_1, \varphi_2 + 2\pi)$  gegeben.

Die in der Tabelle 2.1 angeführten Randbedingungen für Stetigkeit werden z.B. dann erfüllt, wenn sich die Funktion  $f(\varphi_1, \varphi_2, \vartheta)$  als Potenzreihe von

$$\text{I: } e^{i\varphi_1}, e^{i\varphi_2}, \vartheta$$

$$\text{II: } \cos \vartheta e^{i\varphi_1}, e^{i\varphi_2}, \sin \vartheta$$

$$\text{III: } e^{i\varphi_1}, \sin \vartheta e^{i\varphi_2}, \cos \vartheta$$

$$\text{IV: } \cos \vartheta e^{i\varphi_1}, \sin \vartheta e^{i\varphi_2}, \cos^2 \vartheta$$

darstellen läßt.

Da alle im  $U(2)$ -Programm auftretenden Funktionen nur mit den unter Punkt IV genannten Abhängigkeiten auftreten, ist es unerheblich, welches von den vier angegebenen Koordinatenintervallen für  $\vartheta$  angenommen wird.

Erweitert man das zulässige Koordinatenintervall von  $\vartheta$  noch auf einen Bereich in den komplexen Zahlen, und erlaubt man weiterhin einen konformen Faktor vor der Metrik, dann erhält man schließlich eine Reihe weiterer *Kopien* des Raumes  $S^1 \times S^3$ , die nicht kontinuierlich aus dem ursprünglichen Raum heraus gebildet werden können. Die Transformationen, die die Intervalle aufeinander abbilden, werden im folgenden  $\rho$ -Transformationen genannt und in Abschnitt 2.3.2 näher erläutert.

## 2.3 Transformationen und konforme Symmetrie

Bei metrisch-konformen Transformationen muß man zwei Arten unterscheiden. Die konformen Transformationen sind infinitesimale oder endliche Transformationen der Koordinaten, die die Metrik  $g_{\mu\nu}$  entweder unverändert lassen (entspricht den Killingfeldern und im  $M^4$  den Poincaré-Transformationen) oder nur um einen Faktor strecken (spezielle konforme Transformationen und Dilatationen). Die Weyl-Transformationen strecken ebenfalls die Metrik nur um einen Faktor, dieser läßt sich aber nicht auf infinitesimale Transformationen zurückführen.

Um das Transformationsverhalten von Feldern festzulegen, greift man am besten auf einen Lagrangean zurück. Die Wahl der Parametrisierung liefert das explizite Erscheinungsbild des Lagrangeans. Da man die Koordinaten als mathematisches Hilfsmittel ansehen kann, dürfen Umparametrisierungen, also beliebige Koordinatentransformationen, durchgeführt werden. Diese Transformationen haben keine Auswirkungen auf die physikalisch



relevanten Größen wie 'Ort' oder 'Impuls'. Die konformen Transformationen werden nun dadurch ausgezeichnet, daß die transformierten Koordinaten  $\tilde{x}^\mu$  ein gleichwertiges Bezugssystem wie die ursprünglichen Koordinaten darstellen; durch Lorentztransformationen kann ein ruhendes in ein bewegtes Bezugssystem transformiert werden, ohne daß sich die physikalischen Gesetze ändern. Die physikalisch relevanten Größen wie 'Ort' oder 'Impuls' werden aber an das neue Bezugssystem angepaßt, die Felder müssen transformiert werden.

Die Invarianz des Lagrangeans unter den Transformationen ist eine notwendige Voraussetzung ihrer Zulässigkeit, wobei jedoch totale Ableitungen auftreten dürfen. Man erwartet weiterhin, daß die *Konstanten* einer Theorie unbeeinflusst bleiben.<sup>1</sup> Zu ihnen zählen z.B. die Elementarladung  $e$  und die Masse  $m$  eines Teilchens.

Die verschiedenen Arten von *Transformationen* sind:

**allgemeine Koordinatentransformationen** [5] Diese Transformationen sind rein formaler Natur und spielen bei der Berechnung der Wirkung als Integral über die Lagrange-dichte keine Rolle. Diese Transformation wirkt nur auf die Koordinatenparametrisierung, Spinorindizes<sup>2</sup> bleiben unbeeinflusst.

$$x^\mu \rightarrow y^\mu = y^\mu(x) \quad (2.13)$$

$$\text{mit } \Omega_\nu^\mu := \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\nu} \quad \text{und} \quad \text{Det}(\Omega_\nu^\mu) \neq 0$$

$$T_{\mu\dots\nu\dots}(x) \rightarrow \tilde{T}_{\mu\dots\nu\dots}(y) = (\Omega^{-1})_\mu^\rho \dots \Omega_\sigma^\nu \dots T_{\rho\dots\sigma\dots}(x(y)) \quad (2.14)$$

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \tilde{g}_{\mu\nu} = (\Omega^{-1})_\mu^\rho (\Omega^{-1})_\nu^\sigma g_{\rho\sigma} \quad (2.15)$$

$$\text{Det}(-g_{\mu\nu}) \rightarrow \text{Det}(-\tilde{g}_{\mu\nu}) = \text{Det}(\Omega_\rho^\mu)^{-2} \text{Det}(-g_{\rho\sigma}) \quad (2.16)$$

$$dV_x \rightarrow dV_y = \text{Det}(\Omega) dV_x \quad (2.17)$$

**Konforme, Poincaré- und Lorentz-Transformation** [1] Die konformen, Poincaré- und Lorentz-Transformationen beruhen auf genau den Umparametrisierungen, die das Wegelement  $ds^2$  invariant lassen und die Metrik  $g_{\mu\nu} = \lambda^2 \tilde{g}_{\mu\nu}$  nur mit einem Faktor

<sup>1</sup>Diese Erwartung wird manchmal erst nach Einführung eines weiteren Feldes, z.B. dem Dilaton, erfüllt.

<sup>2</sup>Im  $U(2)$ -Programm spielen Spinoren im Raum  $S^1 \times S^3$  keine Rolle. Sie werden erst bei der Abbildung in den  $M^4$  erzeugt. Alle folgenden Betrachtungen über Spinorindizes beziehen sich deshalb auch nur auf Spinoren im  $M^4$ . Siehe auch S.105.

skalieren. Dieser Faktor ist bei den Poincaré- und Lorentz-Transformationen identisch 1. Alle diese Transformationen sollen durch infinitesimale Generatoren, z.B. als Differentialoperatoren wie in Tabelle 2.2,<sup>3</sup> erzeugt werden können, wodurch z.B. die Paritätstransformation gesondert behandelt werden muß.

Im Anschluß an eine solche Umparametrisierung wird die transformierte Koordinate  $\tilde{x}^\mu$  wieder als ursprüngliche Koordinate interpretiert (Reparametrisierung), mit der Bedeutung, daß beide Punkte physikalisch gleichwertig sind.

$$x^\mu \xrightarrow{\text{Transf.}} \tilde{x}^\mu := e^{\alpha_i X^i} x^\mu \xrightarrow{\text{Reparam.}} x^\mu, \quad (2.18)$$

Nun ergeben sich zwischen den Transformationen mit  $\lambda^2 \equiv 1$  und denen mit  $\lambda^2 \neq 1$  (Dilatation und spezielle konforme Transformation) signifikante Unterschiede.

Die Transformationsmatrizen werden durch

$$\Lambda_\nu^\mu := \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\nu} \quad (2.19)$$

$$S_a^b := \left( e^{\alpha_i \tilde{X}^i} \right)_a^b \quad (2.20)$$

erhalten, wobei  $\tilde{X}^i$  die Matrixdarstellung des infinitesimalen Generators  $X^i$  ist.

1.)  $\lambda^2 = 1$ : Poincaré- und Lorentz-Transformationen: Das Wegelement  $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$  bleibt identisch erhalten, ebenso die Koordinaten  $x^\mu$ , Koordinatendifferentiale  $dx^\mu$  und die partielle Ableitung  $\partial_\mu$  (Basis der Tangentialvektoren).

Tensoren und Spinoren werden entsprechend ihrer Indexstruktur transformiert.

2.)  $\lambda^2 \neq 1$ : spezielle konforme Transformationen: Das Wegelement  $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \rightarrow \lambda^2 ds^2$  wird mit einem konformen Faktor  $\lambda^2$  skaliert. Die Koordinaten  $x^\mu$ , Koordinatendifferentiale  $dx^\mu$  und die partielle Ableitung  $\partial_\mu$  bleiben wiederum identisch erhalten.

Tensoren  $T_{\mu\dots\nu\dots}$  und Spinoren  $\Psi^a$  transformieren neben ihrer Indexstruktur nun auch mit einem weiteren Faktor. Die Transformationsmatrizen sind wieder durch die Gleichungen (2.19) und (2.20) gegeben, der Exponent des Vorfaktors ist eine feldabhängige Größe  $d(T)$ , die konforme Skalendimension von  $T$ .

---

<sup>3</sup>Andere Darstellungen sind für die biharmonischen Koordinaten und für kartesische Koordinaten im Anhang B.1 gegeben.

$$T_{\mu..}{}^{\nu..}(x) \rightarrow \tilde{T}_{\mu..}{}^{\nu..}(y) = \lambda^{-d(T)} (\Lambda^{-1})_{\mu}^{\rho} \cdots \Lambda_{\sigma}^{\nu} \cdots T_{\rho..}{}^{\sigma..}(x(y)) \quad (2.21)$$

$$\Psi^a \rightarrow \tilde{\Psi}^a = \lambda^{-d(\Psi)} S_b^a(\alpha_j) \Psi^b = \lambda^{-d(\Psi)} \left( e^{\alpha_j \tilde{X}^j} \right)_b^a \Psi^b \quad (2.22)$$

Während die Lorentz-Transformationen z.B. das Skalarprodukt  $(a, b)$  von Vektoren oder Tensoren invariant lassen, wirken die speziellen konformen Transformationen nur winkeltreu, d.h.  $\cos \psi = \frac{(a,b)}{\sqrt{(a,a)(b,b)}}$  bleibt invariant.

Der Faktor  $\lambda^2$  wird durch die Transformation festgelegt.

$$ds^2 \rightarrow \widetilde{ds^2} = g_{\mu\nu}(y) dy^{\mu} dy^{\nu} = g_{\mu\nu}(y(x)) \Lambda_{\rho}^{\mu} \Lambda_{\sigma}^{\nu} dx^{\rho} dx^{\sigma} \stackrel{!}{=} \lambda^2(y) g_{\rho\sigma}(x) dx^{\rho} dx^{\sigma} \quad (2.23)$$

$$\rightarrow \lambda^2(y) g_{\rho\sigma}(x) = g_{\mu\nu}(y(x)) \Lambda_{\rho}^{\mu} \Lambda_{\sigma}^{\nu} \quad (2.24)$$

$$\lambda^2(y) = \frac{1}{4} g^{\rho\sigma}(x) g_{\mu\nu}(y) \Lambda_{\rho}^{\mu} \Lambda_{\sigma}^{\nu} \quad (2.25)$$

$$= \left( (\det \Lambda)^2 \frac{\det g_{\mu\nu}(y)}{\det g_{\mu\nu}(x)} \right)^{1/4} \quad (2.26)$$

Einige Erläuterungen zu den letzten Gleichungen: Durch Multiplikation und Aufsummation von Gleichung (2.24) mit  $g^{\rho\sigma}(x)$  erhält man auf der linken Seite einen Term  $\lambda^2 g^{\rho\sigma}(x) g_{\rho\sigma}(x) = \lambda^2 \delta_{\rho}^{\rho} = 4\lambda^2$ . Diese 4 tritt in Gleichung (2.25) auf der rechten Seite auf. Eine andere Methode zur Bestimmung von  $\lambda^2$  wird in Gleichung (2.26) besprochen. Durch Bildung der Determinanten beider Seiten von Gleichung (2.24) erhält man auf der linken Seite einen Term  $\lambda^8 \det g_{\rho\sigma}(x)$  und auf der rechten Seite  $\det(g_{\mu\nu}(y) \Lambda \Lambda) = \det g_{\mu\nu}(y) \det \Lambda \det \Lambda$ , woraus schließlich Gleichung (2.26) folgt.

An dieser Stelle ist auf einen wichtigen Unterschied zur Literatur hinzuweisen. Es wird in der Regel angenommen (z.B.[16]), daß ein Spinor nur unter Lorentz-Transformationen nichttrivial transformiert, da er in der irreduziblen Darstellung der Lorentz-Gruppe liegt. Diese Voraussetzung liegt in dem hier gezeigten Fall aber nicht vor. Der Spinor transformiert unter allen Transformationen, auch den Translationen, nichttrivial, da er in der irreduziblen Darstellung der konformen Gruppe liegt.

**Weyl-Transformation** : Eine Verallgemeinerung der konformen Transformationen mit Reparametrisierung stellen die Weyl-Transformation dar. Bei ihnen muß jedoch der Faktor  $\lambda^2$  nicht der Gleichung (2.24) genügen, er wird also nicht auf eine infinitesimale

Transformation zurückgeführt. Folgt man der Literatur [15, 21], dann kann das Transformationsverhalten direkt von der konformen Transformation übernommen werden. **Diese einfache Aussage trifft hier nicht auf Spinoren zu!** Weil ein Spinor auch unter Dilatation nichttrivial transformiert, muß sich eine lokale (ortsabhängige) Dilatation — und so sollte sich eine Weyl-Transformation im einfachsten Fall verhalten — genauso auswirken. Die anderen Felder, also die ohne Spinorindex, lassen sich problemlos auf die herkömmliche Weise Weyl-transformieren:

$$x^\mu \rightarrow x^\mu \quad A_\mu \rightarrow A_\mu \quad F_{\mu\nu\dots} \rightarrow F_{\mu\nu\dots} \quad (2.27)$$

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \lambda_W^2 g_{\mu\nu} \quad (2.28)$$

$$T_{\mu\dots\nu\dots}(x) \rightarrow \tilde{T}_{\mu\dots\nu\dots}(x) = \lambda_W^{-d(T)} T_{\mu\dots\nu\dots}(x) \quad (2.29)$$

Die Transformationsgesetze für einen  $SU(2, 2)$ -Spinor zu finden, sprengt den Rahmen dieser Untersuchung. Der einfache Ansatz lokaler Dilatationen wird wahrscheinlich nicht ausreichen, da z.B. im  $M^4$  auch die speziellen konformen Transformationen ein ortsabhängiges  $\lambda^2$  besitzen.

### 2.3.1 Infinitesimale konforme Generatoren

Da  $S^1 \times S^3$  eine Überlagerungsmannigfaltigkeit von  $M^4$  ist, können die bekannten infinitesimalen Generatoren des Minkowskiraumes direkt übernommen werden. Da zudem eine Parametrisierung des  $M^4$  möglich ist, die zu der biharmonischen Parametrisierung (als Weyl-Transformation) konform äquivalent ist, lassen sie sich einfach angeben. Im Anhang, Abschnitt B.1, sind die Darstellungen der Algebra  $su(2, 2)$  und  $so(4, 2)$  durch Differentialoperatoren für die biharmonischen Koordinaten und für kartesische Koordinaten des Minkowskiraums gegeben.

Die Killingfelder (Killingvektoren)  $X^i = X^{i\mu} \underline{e}_\mu \sim X^{i\mu} \partial_\mu$  werden aus der Symmetrie des Raumes abgeleitet und beschreiben die Isometrien des Raumes. Die Killingfelder von  $S_3$  bilden eine Basis der Liealgebra  $o(4)$  der orthogonalen Gruppe  $O(4)$ <sup>4</sup> und lassen sich in der

---

<sup>4</sup>Diese Symmetriegruppe liegt auch bei einem  $1/r$ -Potential in der klassischen Theorie, also beim Kepler-Problem und beim Wasserstoffatom, vor.

euklidischen Parametrisierung besonders einfach angeben ( $\mu, \nu = 1 \dots 4$ ) [24]:

$$D_{\mu\nu} := x_\nu \partial_{x_\mu} - x_\mu \partial_{x_\nu} \quad (2.30)$$

Sie lassen sich z.B. in der Form  $X^2$  bis  $X^7$  nach Gleichung (B.16) oder durch Linearkombinationen ( $L_i, R_i$  bzw.  $K^{a,\pm}, K^{b,\pm}$ ) darstellen. Der Killingvektor der Zeitrichtung liegt mit dem Differentialoperator  $X^1$  vor.

Durch Anwendung der  $\rho$ -Transformationen, die im folgenden Abschnitt definiert werden, kann man diese sieben Generatoren der Killingfelder zu dem gesamten Satz der konformen Generatoren erweitern. Dies führt zu demselben Ergebnis, wie es durch die konforme Gruppe des Minkowskiraumes mittels Koordinatentransformation erzeugt wird.

Man besitzt nunmehr fünfzehn Differentialoperatoren, die sich in reeller Form durch die Gleichung (B.16) oder in komplexer Form wie in Tabelle 2.2 darstellen lassen. Da sie eine Basis für eine  $su(2, 2)$ -Algebra darstellen, lassen sich die Vertauschungsrelationen auch in Matrixform angeben. Dabei ist es günstiger, von der komplexen Darstellung,  $K^{\alpha\pm}, \alpha \in \{a, \dots, f\}$ , auszugehen. Die Vertauschungsrelationen können dann durch die folgende Matrix  $K_m^n$  ausgedrückt werden:

$$K_m^n := i \begin{pmatrix} \partial_\Sigma - \frac{\partial}{\partial\varphi_2} & K^{b+} & iK^{d+} & iK^{e+} \\ K^{b-} & \partial_\Sigma - \frac{\partial}{\partial\varphi_1} & iK^{f+} & iK^{c+} \\ iK^{d-} & iK^{f-} & \partial_\Sigma - \frac{\partial}{\partial\tau} & K^{a+} \\ iK^{e-} & iK^{c-} & K^{a-} & -\partial_\Sigma \end{pmatrix} \quad (2.49)$$

$$\text{mit } \partial_\Sigma := \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial\varphi_1} + \frac{\partial}{\partial\varphi_2} + \frac{\partial}{\partial\tau} \right) \quad (2.50)$$

$$[K_m^n, K_r^s] = i \cdot (\delta_r^n K_m^s - \delta_m^s K_r^n) \quad (2.51)$$

Die zugehörige Matrixdarstellung lautet dann einfach

$$K^{\alpha\pm} \sim K_m^n \Rightarrow \widetilde{K^{\alpha\pm}} \sim (\delta_{m,a} \delta_{n,b})^b, \quad (2.52)$$

wobei Vorfaktoren ( $\pm 1, \pm i$ ) entsprechend der Einträge in der Matrix (2.49) auftreten.

Die Matrixdarstellung der im  $M^4$  üblich verwendeten infinitesimalen Generatoren ist im Anhang, Gleichung (B.46), zu finden.

Basis einer  $su(2, 2)$ -Algebra

$$K^{a+} = e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} \frac{1}{2} \left( \frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi_1} - \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi_2} + i \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) \quad (2.31)$$

$$K^{a-} = e^{-i(\varphi_1+\varphi_2)} \frac{1}{2} \left( \frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi_1} - \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi_2} - i \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) \quad (2.32)$$

$$K^a = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial \varphi_1} + \frac{\partial}{\partial \varphi_2} \right) \quad (2.33)$$

$$K^{b+} = e^{i(\varphi_1-\varphi_2)} \frac{1}{2} \left( \frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi_1} + \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi_2} + i \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) \quad (2.34)$$

$$K^{b-} = e^{-i(\varphi_1-\varphi_2)} \frac{1}{2} \left( \frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi_1} + \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi_2} - i \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) \quad (2.35)$$

$$K^b = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial \varphi_2} - \frac{\partial}{\partial \varphi_1} \right) \quad (2.36)$$

$$K^{c+} = e^{i(\tau+\varphi_2)} \frac{1}{2} \left( \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi_2} - i \cos \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) \quad (2.37)$$

$$K^{c-} = e^{-i(\tau+\varphi_2)} \frac{1}{2} \left( \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi_2} + i \cos \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) \quad (2.38)$$

$$K^c = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \varphi_2} \right) \quad (2.39)$$

$$K^{d+} = e^{i(\tau-\varphi_2)} \frac{1}{2} \left( \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi_2} - i \cos \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) \quad (2.40)$$

$$K^{d-} = e^{-i(\tau-\varphi_2)} \frac{1}{2} \left( \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi_2} + i \cos \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) \quad (2.41)$$

$$K^d = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial \varphi_2} \right) \quad (2.42)$$

$$K^{e+} = e^{i(\tau+\varphi_1)} \frac{1}{2} \left( \cos \vartheta \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{1}{\cos \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi_1} + i \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) \quad (2.43)$$

$$K^{e-} = e^{-i(\tau+\varphi_1)} \frac{1}{2} \left( \cos \vartheta \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{1}{\cos \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi_1} - i \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) \quad (2.44)$$

$$K^e = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \varphi_1} \right) \quad (2.45)$$

$$K^{f+} = e^{i(\tau-\varphi_1)} \frac{1}{2} \left( \cos \vartheta \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{1}{\cos \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi_1} + i \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) \quad (2.46)$$

$$K^{f-} = e^{-i(\tau-\varphi_1)} \frac{1}{2} \left( \cos \vartheta \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{1}{\cos \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi_1} - i \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) \quad (2.47)$$

$$K^f = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial \varphi_1} \right) \quad (2.48)$$

Tabelle 2.2: Diese Differentialoperatoren bilden eine Basis für eine  $su(2, 2)$ -Algebra. Sie bestehen aus zwei  $su(2)$  ( $K^a$  und  $K^b$ ) und vier  $su(1, 1)$  ( $K^c$  bis  $K^f$ ) Unteralgebren. Von den insgesamt achtzehn Differentialoperatoren sind aber nur fünfzehn linear unabhängig: zwölf  $K^{\alpha\pm}$  und drei der  $K^\alpha$ .

Die infinitesimalen Generatoren werden durch eine Exponentialabbildung zu endlichen Transformationen. Dabei hängt die Wahl der Darstellung von dem zu transformierenden Objekt ab.

1. Auf Koordinaten wendet man die Differentialoperatoren an, sie erzeugen die konformen Abbildungen:

$$x^\mu \rightarrow x^{\mu'} = e^{\alpha_i X^i} x^\mu. \quad (2.53)$$

Als Beispiele seien z.B. eine Translation im Minkowskiraum

$$x^\mu \rightarrow x^{\mu'} = e^{\alpha^\mu \partial_\mu} x^\mu = (1 + \alpha^\mu \partial_\mu + \alpha^\mu \partial_\mu \alpha^\mu \partial_\mu / 2 + \dots) x^\mu = (x^\mu + \alpha^\mu + 0) \quad (2.54)$$

und für biharmonische Koordinaten die Transformation  $K^{a+}$

$$\varphi_1 \rightarrow \varphi_1' = e^{\alpha K^{a+}} \varphi_1 = \varphi_1 - i \left( \exp\left(i \frac{\alpha \sin \vartheta}{2 \cos \vartheta} e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}\right) - 1 \right) \quad (2.55)$$

$$\cos \vartheta e^{i\varphi_1} \rightarrow e^{\alpha K^{a+}} \cos \vartheta e^{i\varphi_1} = \cos \vartheta e^{i\varphi_1} \quad (2.56)$$

$$\sin \vartheta e^{i\varphi_2} \rightarrow e^{\alpha K^{a+}} \sin \vartheta e^{i\varphi_2} = \sin \vartheta e^{i\varphi_2} \quad (2.57)$$

$$\cos \vartheta e^{-i\varphi_1} \rightarrow e^{\alpha K^{a+}} \cos \vartheta e^{-i\varphi_1} = \cos \vartheta e^{-i\varphi_1} - i\alpha \sin \vartheta e^{i\varphi_2} \quad (2.58)$$

$$\sin \vartheta e^{-i\varphi_2} \rightarrow e^{\alpha K^{a+}} \sin \vartheta e^{-i\varphi_2} = \sin \vartheta e^{-i\varphi_2} + i\alpha \cos \vartheta e^{i\varphi_1} \quad (2.59)$$

angegeben.

2. In Form komplexer  $4 \times 4$ -Matrizen sollen sie auf einen 4-komponentigen Spinor wirken. Betrachtet man die Darstellung der Symmetriegruppe im Minkowskiraum, dann ist, unter der Wirkung von Lorentztransformationen, dieser Spinor mit dem Dirac-Spinor identisch (siehe z.B. [1] und Anhang S. 66). Das Transformationsverhalten des Spinors ist nun für alle konformen Transformationen festgelegt. Dabei koppeln im  $M^4$  die speziellen konformen Transformationen genauso wie das Eichfeld der schwachen Wechselwirkung mit  $\gamma^\mu(1 - \gamma^5)$  an einen Spinor, was als Indiz für eine Verbindung dieser beiden, eigentlich verschiedenen Phänomene angenommen werden kann.

### 2.3.2 $\rho$ -Transformationen

Die  $\rho$ -Transformationen sind global definierte konforme Transformationen von  $S^1 \times S^3$ , deren Konformfaktor  $\lambda^2$  nur von  $z = \cos^2 \vartheta$  abhängig ist. Dabei wird das ursprüngliche Koordi-

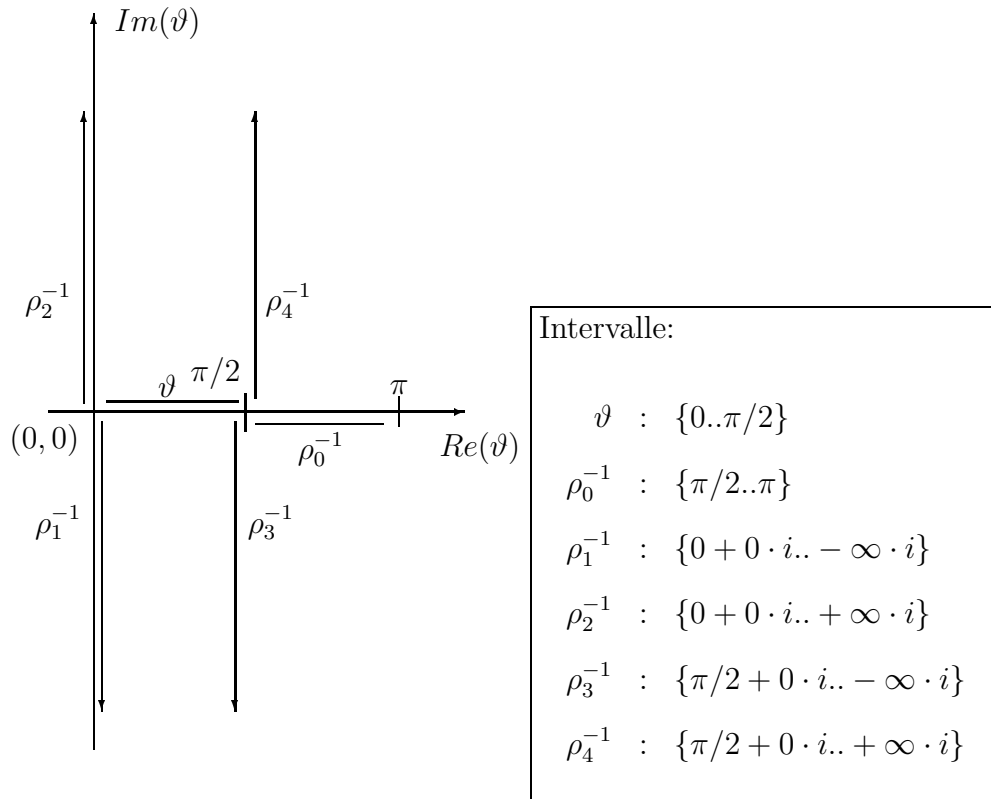


Abbildung 2.1: Parameterbereich von  $\vartheta$ , der durch die  $\rho$ -Transformationen abgedeckt wird. Liegt  $\rho_i$  in dem Basisintervall  $\{0.. \pi/2\}$ , dann liegt das Urbild  $\rho_i^{-1}$  in den angegebenen Intervallen einer komplexen  $\vartheta$ -Ebene.

natenintervall von  $\vartheta$  auf andere Intervalle in der komplexen Zahlenebene abgebildet (siehe Bild 2.1). Außerdem stellen die  $\rho$ -Transformationen die vollständige Symmetrie zwischen den drei Tori  $\tau, \varphi_1$  und  $\varphi_2$  her.

$$\left. \begin{aligned}
 \rho_0 &:= \pi/2 + \vartheta & : z \rightarrow 1 - z \\
 \rho_1 &:= i \ln(\tan(\vartheta/2)) & : z \rightarrow 1/(1 - z) \\
 \rho_2 &:= i \ln(\tan(\pi/4 + \vartheta/2)) & : z \rightarrow 1/z \\
 \rho_3 &:= \pi/2 + i \ln(\tan(\vartheta/2)) & : z \rightarrow -z/(1 - z) \\
 \rho_4 &:= \pi/2 + i \ln(\tan(\pi/4 + \vartheta/2)) & : z \rightarrow -(1 - z)/z
 \end{aligned} \right\} \quad (2.60)$$



Die  $\hat{\rho}$ -Transformationen lassen sich kurz charakterisieren, wenn die Gleichungen (2.60) sowie die Auswirkungen auf die Metrik (2.61) nach Tabelle 2.3 betrachtet werden:

$$ds^2 = \lambda^2 \left( d(x^0)^2 - (\cos^2(x^3)d(x^1)^2 + \sin^2(x^3)d(x^2)^2 + d(x^3)^2) \right) \quad (2.61)$$

Transf.	$\lambda^2$	$(x^0)$	$(x^1)$	$(x^2)$	$(x^3)$	Inv.Tr.	Struktur
Id.	1	$\tau$	$\varphi_1$	$\varphi_2$	$\vartheta$	1	1
$\hat{\rho}_0$	1	$\tau$	$\varphi_2$	$\varphi_1$	$\rho_0$	$\hat{\rho}_0$	$\mathbb{Z}_2$
$\hat{\rho}_1$	$-\cos^{-2}(\rho_1)$	$\varphi_2$	$\tau$	$\varphi_1$	$\rho_1$	$\hat{\rho}_4$	$\mathbb{Z}_3$
$\hat{\rho}_2$	$-\cos^{-2}(\rho_2)$	$\varphi_1$	$\tau$	$\varphi_2$	$\rho_2$	$\hat{\rho}_2$	$\mathbb{Z}_2$
$\hat{\rho}_3$	$-\sin^{-2}(\rho_3)$	$\varphi_2$	$\varphi_1$	$\tau$	$\rho_3$	$\hat{\rho}_3$	$\mathbb{Z}_2$
$\hat{\rho}_4$	$-\sin^{-2}(\rho_4)$	$\varphi_1$	$\varphi_2$	$\tau$	$\rho_4$	$\hat{\rho}_1$	$\mathbb{Z}_3$

Tabelle 2.3: Auswirkungen der  $\rho$ -Transformationen auf die Metrik:  $\rho$ -Transformationen sind global definierte konforme Transformationen, die die Metrik (Gleichung (2.61)) konform mit dem Faktor  $\lambda^2$  transformieren. Mit Inv.Tr. wird die jeweilige Rücktransformation angegeben, und die Struktur  $\mathbb{Z}_i$  beschreibt, daß nach  $i$ -maliger Anwendung die Identität vorliegt.

Die Transformation  $\rho_0$  wirkt wie eine Paritätsoperation. Die Richtung von  $d\vartheta$  bleibt positiv, während die Richtungen von  $d\varphi_1$  und  $d\varphi_2$  gegeneinander vertauscht werden.<sup>5</sup>

Die Transformationen  $\rho_1$  und  $\rho_4$  vertauschen die drei Tori  $\tau, \varphi_1$  und  $\varphi_2$  zyklisch untereinander;  $\rho_2$  und  $\rho_3$  gehen unter Anwendung von  $\rho_0$  aus ihnen hervor.

Die  $\rho$ -Transformationen können nicht durch endliche konforme Transformationen erzeugt werden. Für  $\rho_0$  als Paritätsoperation ist dies offensichtlich, und für  $\rho_1$  muß es ebenfalls gelten, weil diese Transformation die Signatur der Metrik von (1+3) auf (3+1) verändert.<sup>6</sup> Da alle anderen Transformationen durch diese beiden ausgedrückt werden können,

$$\hat{\rho}_2 = \hat{\rho}_1 \cdot \hat{\rho}_0, \quad \hat{\rho}_3 = \hat{\rho}_0 \cdot \hat{\rho}_1, \quad \text{und} \quad \hat{\rho}_4 = \hat{\rho}_1 \cdot \hat{\rho}_1, \quad (2.62)$$

<sup>5</sup>Achtung: Die im  $U(2)$ -Programm übliche Transformation  $\vartheta \rightarrow \pi/2 - \vartheta$  ist eine Drehung der 3-Sphäre auf sich selbst, während  $\rho_0$  als Paritätsoperation eine nichttriviale Transformation darstellt.

<sup>6</sup>Solange konforme Invarianz besteht, spielt das globale Vorzeichen der Metrik keine Rolle!

läßt sich leicht verifizieren, daß keine dieser Transformationen kontinuierlich, also über endliche konforme Transformationen, aus der Identität gewonnen werden können.

Die  $\rho_i$  erzeugen mit  $z = \cos^2 \vartheta$  eine Basis für gebrochen lineare Transformationen:  $\{\vartheta \rightarrow (\rho_0, \rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4)\} \simeq \{z \rightarrow (1-z, 1/(1-z), 1/z, -z/(1-z), -(1-z)/z)\}$ . Dabei bilden die  $\rho$ -Transformationen einen abgeschlossenen Satz von diskreten Transformationen: die *Dihedrale Gruppe*  $D_3$  (die Symmetriegruppe eines gleichseitigen Dreiecks). [23] Es gilt:  $D_3 = gp\{\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_0\}$  mit  $\hat{\rho}_1^3 = \hat{\rho}_0^2 = (\hat{\rho}_0\hat{\rho}_1)^2 = Id$ . Mit Hilfe dieser Gruppe werden in Abschnitt 3.3.2 die Lösungen der Maxwellgleichung klassifiziert.<sup>7</sup>

### 2.3.3 Transformationen quasiprimärer Felder

Die Bezeichnungen *primäres*, *quasiprimäres* und *sekundäres* Feld beziehen sich auf ihre Eigenschaften unter konformen Transformationen. Ein primäres Feld (z.B. Koordinaten, Vektorpotential) erhält keinen zusätzlichen Faktor, d.h. die Skalendimension verschwindet:  $d(\cdot) = 0$ . Unter 'quasiprimär' faßt man die primären Felder und die, die mit einem zusätzlichen Faktor transformieren ( $d(\cdot) \neq 0$ , z.B. eine Lösung der Klein-Gordon-Gleichung), zusammen. Ein sekundäres Feld transformiert nicht mit einer reinen Skalierung, sondern es können weitere Terme auftreten, wie z.B. bei der Divergenz einer 1-Form nach Gleichung (2.72).

Das Transformationsverhalten einer 1-Form  $A_{(1)}$  wird so gewählt, daß eine Lösung der Bewegungsgleichung, z.B. der Maxwell-Gleichungen, wieder auf Lösungen abgebildet werden. Das Vektorpotential, genauer die Komponenten der 1-Form  $A_{(1)}$ , transformieren dabei wie ein primäres Feld, d.h. sie erfahren keine Änderung:

$$A_{(1)} = A_\mu dx^\mu \rightarrow \hat{A}_{(1)} = \hat{A}_\mu d\hat{x}^\mu \quad \text{mit} \quad \hat{A}_\mu = A_\mu \quad (2.63)$$

Es muß aber beachtet werden, daß die Länge  $|A|^2 = A^\mu A_\mu$  dabei nicht invariant bleibt. Dies ist generell die Eigenschaft der konformen Transformationen: sie sind nur winkelerhaltend.

Der von zwei Vektoren aufgespannte Winkel  $\phi$  mit

$$\cos \phi = \frac{(a, b)}{\sqrt{(a, a)(b, b)}} \quad \text{mit} \quad (a, b) = g_{\mu\nu} a^\mu b^\nu \quad (2.64)$$

---

<sup>7</sup>Siehe auch [25, §9] für die Auswirkungen dieser Transformationen auf die  $P$ -Funktion, die noch von Interesse sein wird.

bleibt invariant bei konformer Transformation.

Die homogenen Maxwellgleichungen transformieren dann unter endlichen konformen oder Weyl-Transformationen mit einer reinen Skalierung:

$$F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0 \rightarrow \hat{F}^{\mu\nu}{}_{;\nu} = \frac{1}{\sqrt{-\hat{g}}} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left( \sqrt{-\hat{g}} \hat{g}^{\mu k} \hat{g}^{\nu l} (\hat{A}_{k,l} - \hat{A}_{l,k}) \right) \quad (2.65)$$

$$= \frac{\lambda^{-4}}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left( \lambda^4 \sqrt{-g} \lambda^{-2} g^{\mu k} \lambda^{-2} g^{\nu l} (A_{k,l} - A_{l,k}) \right) = \lambda^{-4} F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0 \quad (2.66)$$

Dieses Verhalten der Maxwell-Theorie ist bereits 1910 durch Cunningham und Bateman ([6, 2]) dargelegt worden. Für das  $U(2)$ -Programm sollte deswegen noch einmal hervorgehoben werden, daß nicht nur die Killingfelder, sondern auch die konformen Generatoren Symmetrieoperatoren der betrachteten Lösungen sind.

Bei der Betrachtung der Klein-Gordon-Gleichung benötigt man das Transformationsverhalten einer 0-Form  $\Phi_{(0)}$ . Sie soll mit einem konformen Faktor skalieren:

$$\Phi_{(0)} \rightarrow \hat{\Phi}_{(0)} = \lambda^{-1} \Phi_{(0)} \quad (2.67)$$

Die Klein-Gordon-Gleichung transformiert dann wie:

$$\square \Phi_{(0)} \rightarrow \square \hat{\Phi}_{(0)} = \frac{1}{\sqrt{-\hat{g}}} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left( \sqrt{-\hat{g}} \hat{g}^{\mu\nu} \hat{\Phi}_{,\nu} \right) \quad (2.68)$$

$$= \frac{\lambda^{-4}}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left( \lambda^4 \sqrt{-g} \lambda^{-2} g^{\mu\nu} (\lambda^{-1} \Phi)_{,\nu} \right) = \lambda^{-3} \square \Phi_{(0)} - \lambda^{-4} \Phi_{(0)} \square \lambda \quad (2.69)$$

Da hier kein reines Skalenverhalten unter konformer Transformation vorliegt, wird eine Lösung der Klein-Gordon-Gleichung nicht zwingend auf eine Lösung abgebildet. Ergänzt man die Differentialgleichung um einen Term proportional zum Krümmungsskalar der Mannigfaltigkeit, dann wird der letzte Term aufgehoben:<sup>8</sup>

$$\square \Phi_{(0)} - \frac{R}{6} \Phi_{(0)} \rightarrow \square \hat{\Phi}_{(0)} - \frac{\hat{R}}{6} \hat{\Phi}_{(0)} = \lambda^{-3} \square \Phi_{(0)} - \lambda^{-3} \frac{R}{6} \Phi_{(0)} \quad (2.70)$$

Die analoge Betrachtung für die Divergenz des Vektorpotentials führt zu folgendem Ergebnis:

$$\operatorname{div} \hat{A} = \frac{1}{\sqrt{-\hat{g}}} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left( \sqrt{-\hat{g}} \hat{g}^{\mu\nu} \hat{A}_\nu \right) \quad (2.71)$$

---

<sup>8</sup>Es geht aber auch noch einfacher: Aus dem Lagrangean  $\mathcal{L} = g^{\mu\nu} (\partial_\mu + A_\mu) \Phi (\partial_\nu + A_\nu) \Phi$  mit einer Eichtransformation für  $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \ln \lambda$  ergibt sich eine konform invariante Bewegungsgleichung  $(\square + (\partial_\mu A^\mu) - A_\mu A^\mu) \Phi = 0$ .

$$= \frac{\lambda^{-4}}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left( \lambda^4 \sqrt{-g} \lambda^{-2} g^{\mu\nu} A_\nu \right) = \lambda^{-2} \operatorname{div} A + \lambda^{-4} \operatorname{grad}(\lambda^2) \cdot A \quad (2.72)$$

Die Divergenz eines Vektorpotentials ist bei der Betrachtung konformer Symmetrie demnach keine erhaltene Größe. Für Vektoren oder Ströme wie  $j^\mu$ , die wie die 1-Formen trivial transformieren, aber eine andere Indexstruktur tragen, ist die Divergenz jedoch erhalten.

Für die  $\rho$ -Transformationen ergibt sich eine Vereinfachung. Da der konforme Faktor  $\lambda^2$  nur von  $\cos^2 \vartheta$  abhängig ist, transformiert die Divergenz des Vektorpotentials genau dann mit einer reinen Skalierung, wenn die  $A_\vartheta$ -Komponente weggeëicht worden ist. Diese Eichung wird im folgenden *zweite Eichung* genannt.

$$\operatorname{div} \hat{A} = \lambda^{-2} \operatorname{div} A \quad \text{wegen} \quad (2.73)$$

$$\operatorname{grad} \left( \lambda^2(\vartheta) \right) \cdot A \sim \operatorname{grad} \left( \lambda^2(\vartheta) \right)_\vartheta \cdot A_\vartheta = 0 \quad (2.74)$$

## 2.4 Lie-Gruppen und Algebren

Die Elemente von  $U(2)$  in Matrixdarstellung bestehen aus allen unitären  $2 \times 2$ -Matrizen  $\hat{M}_{U(2)}$  mit  $\hat{M}^{-1} = \hat{M}^*$ . Sie können mit derselben Parametrisierung wie  $S^1 \times S^3$  dargestellt werden, wobei man jedoch nur einen halben  $\tau$ -Zyklus benötigt, da eine Verschiebung  $\tau \rightarrow \tau + \pi$  äquivalent zu  $\varphi_1 \rightarrow \varphi_1 + \pi$  und  $\varphi_2 \rightarrow \varphi_2 + \pi$  ist [18].<sup>9</sup>

$$\hat{M}_{U(2)} = e^{i\tau} \begin{pmatrix} \sin \vartheta e^{-i\varphi_2} & \cos \vartheta e^{i\varphi_1} \\ -\cos \vartheta e^{-i\varphi_1} & \sin \vartheta e^{i\varphi_2} \end{pmatrix} \quad (2.75)$$

Die Liealgebra  $u(2)$  ist über die *Exponentialabbildung* mit der Liegruppe  $U(2)$  verknüpft: Für alle  $\tilde{m} \in u(2)$  gilt  $e^{\tilde{m}} \in U(2)$ . Die  $u(2)$ -Elemente bestehen aus komplexen  $2 \times 2$ -Matrizen mit  $\hat{m}^* = -\hat{m}$ . [19]

---

<sup>9</sup>Im  $U(2)$ -Programm wird die  $\mathbb{Z}_2$ -Aufspaltung von  $U(2) \sim S^1 \times S^3 / \mathbb{Z}_2$  außer acht gelassen. Bei der Interpretation des Ansatzes spielt aber mehr die Topologie von  $S^1 \times S^3$  als die Eigenschaften von  $U(2)$  eine Rolle, so daß die Bezeichnung des Ansatzes als  $U(2)$ -Programm zwar zu Fehlinterpretationen führen kann, die anderen Aspekte des Programms aber unberührt bleiben.

Die Lie-Gruppe  $U(2, 2)$  besteht aus allen unitären  $4 \times 4$ -Matrizen  $\hat{M}_{U(2,2)}$ , die der Bedingung

$$\hat{M}_{U(2,2)}^* \cdot \eta_{2,2} \cdot \hat{M}_{U(2,2)} = \eta_{2,2} \quad (2.76)$$

$$\text{mit } \eta_{2,2} := \text{diag}(1, 1, -1, -1) \quad (2.77)$$

genügen. Die Elemente  $\hat{m}_{u(2,2)}$  der Algebra  $u(2, 2)$  sind ebenfalls komplexe  $4 \times 4$ -Matrizen, die aber die Bedingung

$$\hat{m}_{u(2,2)}^* \cdot \eta_{2,2} = -\eta_{2,2} \cdot \hat{m}_{u(2,2)} \quad (2.78)$$

erfüllen müssen. Eine Basis für diese Algebra stellen die vier  $\gamma$ -Matrizen und deren Produkte oder generell alle  $(4 \times 4)$ -Matrizen  $\hat{m}_{u(2,2)}$  der Form

$$\hat{m}_{u(2,2)} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ u_2^* & u_3 \end{pmatrix} \quad (2.79)$$

dar, wobei  $u_2$  eine beliebige komplexe  $2 \times 2$ -Matrix und  $u_1$  und  $u_3$  zwei antihermitesche Matrizen mit  $\text{Tr}(u_1) = -\text{Tr}(u_3)$  sind.

# Kapitel 3

## Differentialgleichungen

Die Klein–Gordon–Gleichung (3.2) und die Maxwell–Gleichungen (3.33) gehören zu den wichtigsten Differentialgleichungen bei der Beschreibung elementarer Teilchen, da sie die Bewegungsgleichungen freier Spin-0 und Spin-1 Teilchen repräsentieren. Um ihre Bedeutung im Rahmen des  $U(2)$ –Programms genauer studieren zu können, werden die Eigenlösungen der Gleichungen ermittelt.

Die Randbedingungen dieser Lösungen, die zur Eindeutigkeit und Stetigkeit auf der untersuchten Mannigfaltigkeit notwendig sind, werden bei der allgemeinen Lösung nicht berücksichtigt. Es werden alle Lösungen zugelassen, die auf dem offenen Intervall  $0 < \vartheta < \pi/2$   $C^\infty$ –Funktionen sind. Die Randpunkte  $\vartheta = 0$  und  $\vartheta = \pi/2$ , bzw. bei beliebigem Parameterbereich die singulären Stellen  $\vartheta = s_\vartheta$ , werden gesondert behandelt. Solange es nicht ausdrücklich angegeben wird, dürfen die Eigenwerte  $\omega, m_1$  und  $m_2$ , die aus den Operatoren der Cartan–Subalgebra gewonnen werden (mit  $A$  : Funktion, Vektorkomponente, Tensorkomponente etc.) ,

$$\partial_\tau A = i\omega A, \quad \partial_{\varphi_1} A = i m_1 A \quad \text{und} \quad \partial_{\varphi_2} A = i m_2 A, \quad (3.1)$$

beliebige (auch komplexe) Werte annehmen. Dies hat den Vorteil, bei geringfügigen Änderungen der Ausgangsgleichung (z.B. in Gleichung (3.11)) die Lösungen sofort ablesen zu können. Die eindeutigen, global definierten Funktionen müssen jedoch ganzzahlige Eigenwerte aufweisen.

### 3.1 Klein-Gordon-Feld

Die Klein–Gordon–Gleichung  $\square\Phi_{(0)} = 0$  beschreibt in der klassischen Theorie ein masseloses Spin-0-Teilchen. Im  $U(2)$ -Programm wird dieser Differentialgleichung und den zugehörigen Teilchen keine Bedeutung beigemessen.<sup>1</sup> Im Rahmen der Symmetrieuntersuchung läßt sich aber an dieser Gleichung und deren Eigenlösungen das Verhalten der  $K^{\alpha\pm}$ -Operatoren als Stufenoperatoren besonders gut deutlich machen. Des weiteren kommt den Lösungen bei der Eichung der Maxwell–Gleichung noch Bedeutung zu.

#### 3.1.1 Masselose Klein-Gordon-Gleichung

Die allgemeine Lösung  $\Phi_{(0)}$  der Klein–Gordon–Gleichung

$$0 = \square\Phi_{(0)} = \left( \frac{\partial^2}{\partial\tau^2} - \frac{1}{\cos^2\vartheta} \frac{\partial^2}{\partial\varphi_1^2} - \frac{1}{\sin^2\vartheta} \frac{\partial^2}{\partial\varphi_2^2} - \frac{1}{\sin\vartheta \cos\vartheta} \frac{\partial}{\partial\vartheta} \sin\vartheta \cos\vartheta \frac{\partial}{\partial\vartheta} \right) \Phi_{(0)} \quad (3.2)$$

läßt sich mit dem Separationsansatz

$$\Phi_{(0)} = e^{i(\omega\tau + m_1\varphi_1 + m_2\varphi_2)} \Phi(\vartheta) =: V \cdot \Phi(\vartheta) \quad (3.3)$$

einfach ermitteln. (Siehe z.B. [1, 24].) Der Vorfaktor  $V$  beinhaltet nur den Exponentialterm.

Es ergibt sich folgende Differentialgleichung für  $\Phi(z)$  mit  $z = \cos^2\vartheta$ :

$$0 = \frac{\partial^2}{\partial z^2} \Phi + \left[ \frac{1}{z} - \frac{1}{1-z} \right] \frac{\partial}{\partial z} \Phi + \left[ -\frac{m_1^2}{4z} - \frac{m_2^2}{4(1-z)} + \frac{\omega^2}{4} \right] \frac{\Phi}{z(1-z)}. \quad (3.4)$$

Dies ist eine verallgemeinerte hypergeometrische Differentialgleichung, deren allgemeine Lösung lautet ( $P$ : Riemannsche P-Funktion, siehe Anhang D):

$$\Phi(z) = P \left| \begin{array}{ccc|c} 0 & \infty & 1 & \\ -\frac{m_1}{2} & \frac{1+\sqrt{1+\omega^2}}{2} & -\frac{m_2}{2} & z \\ \frac{m_1}{2} & \frac{1-\sqrt{1+\omega^2}}{2} & \frac{m_2}{2} & \end{array} \right|. \quad (3.5)$$

Von den beiden Darstellungen der allgemeinen Lösung (3.5) als hypergeometrische Funktionen ( $F \equiv {}_2F_1$ ) ist nur eine Lösung an der Stelle  $z = 0$  (d.i.  $\vartheta = \pi/2$ ) beschränkt.

$$\Phi_{(0)} = V \cdot z^{\frac{|m_1|}{2}} (1-z)^{\frac{|m_2|}{2}} F\left(\frac{|m_1|+|m_2|+1}{2}, \frac{\sqrt{1+\omega^2}}{2}, \frac{|m_1|+|m_2|+1}{2} - \frac{\sqrt{1+\omega^2}}{2}; 1 + |m_1|; z\right) \quad (3.6)$$

---

<sup>1</sup>Siehe auch S.50.

(Die bei  $z = 1$  beschränkte Funktion ergibt sich durch Anwendung der  $\rho_0$ -Transformation.) Ohne die Beschränkung auf ganzzahlige Werte für  $m_1, m_2$  und  $\omega$  läßt sich immer eine Lösung durch die Nebenbedingung

$$\begin{aligned} \omega &= \pm \sqrt{(|m_1| + |m_2| + 2n + 2)(|m_1| + |m_2| + 2n)} \quad \text{mit} \quad n \in \mathbb{N}^0 \quad (3.7) \\ \longrightarrow -n &= \frac{|m_1| + |m_2| + 1}{2} - \frac{\sqrt{1 + \omega^2}}{2} \end{aligned}$$

finden, die im gesamten Definitionsgebiet beschränkt ist, da der zweite Parameter in der hypergeometrischen Funktion ganzzahlig und negativ ist.

$$\Phi_{(0)n} = e^{i(\omega(n)\tau + m_1\varphi_1 + m_2\varphi_2)} \cdot z^{\frac{|m_1|}{2}} (1-z)^{\frac{|m_2|}{2}} F(|m_1| + |m_2| + 1 + n, -n; 1 + |m_1|; z) \quad (3.8)$$

$$\sim e^{i(\omega(n)\tau + m_1\varphi_1 + m_2\varphi_2)} \cdot z^{\frac{m_1}{2}} (1-z)^{\frac{m_2}{2}} P_n^{(m_1, m_2)}(1-2z) \quad (3.9)$$

$$\sim e^{i(\omega(n)\tau + m_1\varphi_1 + m_2\varphi_2)} \cdot P_n^m(1-2z) \quad \text{für } |m_1| = |m_2| = |m| \quad (3.10)$$

Die Jacobi-Polynome  $P_n^{|m_1|, |m_2|}$  und die adjungierten Legendre-Funktionen  $P_n^m$  treten als äquivalente Darstellungen der angegebenen hypergeometrischen Funktion auf [20]. Ein von den Parametern abhängiger Vorfaktor wurde weggelassen. Gleichung (3.8) ist mit der bekannten Lösung (C.9) (aus [1]) mit  $n = (l - |m_2| - m_1)/2$  identisch.

Nur für  $m_1 = m_2 = n = \omega = 0$  läßt sich die Nebenbedingung (3.7) mit ganzen Zahlen erfüllen. Die einzige Lösung der masselosen Klein-Gordon-Gleichung, die im gesamten Definitionsgebiet beschränkt und eindeutig ist, ist daher die triviale  $\Phi = \text{const}$ .

Arbeitet man aber mit zusätzlichen Termen in der Bewegungsgleichung, dann entstehen andere Lösungen, die auch global definiert sein können.

### 3.1.2 Erweiterte Klein-Gordon-Gleichung

Die masselose Klein-Gordon-Gleichung ist nicht konform invariant. Sie kann aber durch einen zusätzlichen Term, der den Krümmungsskalar mit berücksichtigt, konform invariant gemacht werden, wie es in Gleichung (2.70) geschehen ist. Ein weiterer  $\Phi_{(0)}^4$  kann ebenso addiert werden, der aber hier vernachlässigt wird [4]. Ein Wechselwirkungspotential  $U$ , das ebenfalls herangezogen werden kann und in der Bewegungsgleichung als  $U \cdot \Phi_{(0)}$  erscheinen soll, muß die Skalendimension  $d(U) = 2$  besitzen.

$$\square \Phi_{(0)} = \frac{R}{6} \Phi_{(0)} - U \cdot \Phi_{(0)} =: -\epsilon \Phi_{(0)} \quad (3.11)$$



Der Wert des Krümmungsskalars  $R$  nimmt bei einem Radius von 1 den Wert  $-6$  (Gleichung (2.12)) an, d.h. bei  $U \equiv 0$  ist  $\epsilon = -1$ .

Ein interessanter Ansatz ist für  $U$  durch

$$U = \epsilon_0 + \frac{\epsilon_1}{\cos^2 \vartheta} + \frac{\epsilon_2}{\sin^2 \vartheta} \quad (3.12)$$

gegeben, der es ermöglicht,  $\omega$ ,  $m_1$  und  $m_2$  beliebig zu variieren. Dasselbe  $U$  läßt sich auch als Divergenz einer 1-Form  $A_{(1)}$  mit  $(A_\tau, A_{\varphi_1}, A_{\varphi_2}, A_\vartheta) = (\epsilon_0\tau, \epsilon_1\varphi_1, \epsilon_2\varphi_2, 0)$  darstellen. Für weitere Untersuchungen wird  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0$  angenommen. Das  $\epsilon_0$  wird mit  $-R/6$  zu  $\epsilon = \epsilon_0 - R/6$  zusammengefaßt (Gleichung (3.11)).

Für die Berechnung von globalen Lösungen erhält man folgende Zwangsbedingung an  $\epsilon$  bzw.  $\omega$ :

$$\omega = \pm \sqrt{(|m_1| + |m_2| + 2n + 1)^2 - 1 - \epsilon} \in \mathbb{Z} \quad \text{mit} \quad n \in \mathbb{N}^0 \quad (3.13)$$

Daraus folgt, daß für  $\epsilon = -1$  unendlich viele globale Lösungen  $\Phi_{(0)n}$  der konform invarianten Klein-Gordon-Gleichung (3.11) in der Form (3.8) mit  $\omega(n) = \pm(|m_1| + |m_2| + 2n + 1)$  existieren. Da der  $M^4$  dem betrachteten Raum konform äquivalent ist, entspricht dies der Tatsache, daß im flachen Minkowskiraum die Lösungen der Klein-Gordon-Gleichung in ebene Wellen entwickelt werden können. In Gegenwart von Massen ( $\epsilon_0$ ) existieren in  $M^4$  Lösungen für beliebiges  $\epsilon$ , während sich für  $S^1 \times S^3$  ein diskretes Spektrum ergibt:

Für jedes gerade  $\epsilon$  bzw. für jedes ungerade  $\epsilon$  mit  $\epsilon + 1 = 0(\text{Mod } 4)$  existiert mindestens eine und für jedes ungerade  $\epsilon$  mit  $\epsilon + 1 = 2(\text{Mod } 4)$  keine globale Lösung. Betrachtet man  $\epsilon_0$  als Massenterm, dann existiert für jedes  $\epsilon_0 = -1/0/1(\text{Mod } 4)$  jeweils mindestens eine Lösung und für  $\epsilon_0 = 2(\text{Mod } 4)$  keine Lösung.<sup>2</sup>

### 3.1.3 Konforme Generatoren als Stufenoperatoren

Die  $K^{\alpha\pm}$ -Felder (Tabelle 2.2) wirken auf die Eigenfunktionen wie Stufenoperatoren. Hierbei spielt es keine Rolle, welche Bewegungsgleichung man benutzt, da nur die Struktur der  $K^{\alpha\pm}$  und der Funktionen eingehen.

---

<sup>2</sup> Abweichend vom  $U(2)$ -Programm vermute ich hier die Grundlage der drei Generationen. Sollte bei der Betrachtung der Dirac-Gleichung ein ähnliches Ergebnis vorliegen, dann hätte man ein Indiz für die Existenz von genau drei Leptonengenerationen mit unterschiedlichen Massen.

Operator	$K^{a\pm}$	$K^{b\pm}$	$K^{c\pm}$	$K^{d\pm}$	$K^{e\pm}$	$K^{f\pm}$
verändert	$m_1 + m_2$	$m_2 - m_1$	$\omega + m_2$	$\omega - m_2$	$\omega + m_1$	$\omega - m_1$
um	$\pm 2$	$\pm 2$	$\pm 2$	$\pm 2$	$\pm 2$	$\pm 2$
und läßt	$m_1 - m_2$	$m_1 + m_2$	$\omega - m_2$	$\omega + m_2$	$\omega - m_1$	$\omega + m_1$
und invariant	$\omega$	$\omega$	$m_1$	$m_1$	$m_2$	$m_2$

Tabelle 3.1: Wirkung der  $K^{\alpha\pm}$ -Felder auf Eigenwerte  $\omega, m_1$  und  $m_2$  der Cartan-Subalgebra (Gleichung (3.1)) beliebiger Eigenfunktionen. Es gibt eine Kombination der drei Eigenwerte, die verändert wird, während zwei andere unverändert bleiben.

Die Wirkung der Operatoren auf die Eigenwerte  $\omega, m_1$  und  $m_2$  ist in Tabelle 3.1 zusammengefaßt. Für jeden Operator gibt es eine Kombination der drei Werte, die verändert wird, während zwei invariant bleiben. Dabei ist zu beachten, daß die Veränderung von  $\omega + m_2 + m_1$  immer geradzahlig ist. Die Größe  $n$  mit  $n = (\omega - m_1 - m_2 - 1)/2$  bleibt also stets halbzahlig oder stets ganzzahlig.

Die beiden kompakten Untergruppen der  $SU(2, 2)$ , die von  $K^{a,\pm}$  und  $K^{b,\pm}$  erzeugten  $SU(2)$ , besitzen im Funktionenraum eine endliche Basis der irreduziblen Darstellungen mit dem Gewicht  $j$ . Sie lassen sich bekanntlich mittels Kugelfunktionen  $Y_l^m$  darstellen [32]. Dies läßt sich auch leicht bestätigen, da  $Y_l^m \sim \exp(im\phi)P_l^m$  mit  $\phi = \varphi_1 \pm \varphi_2$  bereits in Gleichung (3.10) erscheint.

Mit den Gleichungen (B.6) und (B.7) wird die Bedingung

$$\hat{K}^2\Phi = j(j+1)\Phi, \quad (3.14)$$

die das Gewicht der Darstellung festlegt, mit der konform erweiterten Klein-Gordon-Gleichung verknüpft. Denn mit

$$\square\Phi = -\Phi \Rightarrow \Phi = e^{i(\omega\tau + m_1\varphi_1 + m_2\varphi_2)} P \begin{vmatrix} 0 & \infty & 1 \\ -\frac{m_1}{2} & \frac{1+\omega}{2} & -\frac{m_2}{2} \\ \frac{m_1}{2} & \frac{1-\omega}{2} & \frac{m_2}{2} \end{vmatrix} z \quad (3.15)$$

folgt

$$\hat{K}^2\Phi = -\frac{\Delta\Phi}{4} = \frac{\omega^2 - 1}{4}\Phi = j(j+1)\Phi \quad (3.16)$$

$$\rightarrow \frac{\omega^2}{4} = \left(j + \frac{1}{2}\right)^2 \rightarrow |\omega| = 2j + 1 \quad (3.17)$$

$$\Phi_j = e^{\pm i(2j+1)\tau} e^{i(m_1\varphi_1 + m_2\varphi_2)} P \begin{vmatrix} 0 & \infty & 1 \\ -\frac{m_1}{2} & -j & -\frac{m_2}{2} \\ \frac{m_1}{2} & 1+j & \frac{m_2}{2} \end{vmatrix} z. \quad (3.18)$$

Wegen (3.17) und  $|\omega| = |m_1| + |m_2| + 2n + 1$  folgt außerdem, daß  $n$  im Intervall  $0 \leq n \leq j$  liegen muß. Somit läuft  $n$  nur das halbe Gewichtsspektrum ab, die 'negative' Hälfte entsteht durch die Vorzeichenumkehr bei  $\omega$ .

Weiterhin erhält man die Eigenwerte der vertauschenden Operatoren  $K^a, K^b$  und  $\hat{K}^2$  (analog zu den Gleichungen (C.2)-(C.4) nach [24]):

$$K^a\Phi_j = i\frac{m_1 + m_2}{2}\Phi_j, \quad K^b\Phi_j = i\frac{m_1 - m_2}{2}\Phi_j, \quad (3.19)$$

$$\hat{K}^2\Phi_j = j(j+1)\Phi_j. \quad (3.20)$$

Fordert man die Abbruchbedingungen für die Zustände mit höchstem Gewicht,  $K_-\Phi_- = 0$  und  $K_+\Phi_+ = 0$ , sowie die Verbindungen  $(K_+)^{2j}\Phi_- = \Phi_+$  und  $(K_-)^{2j}\Phi_+ = \Phi_-$ , dann erhält man die Forderung

$$\Phi_{\pm} = e^{\pm i(m_1\varphi_1 + m_2\varphi_2)} z^{m_1/2} (1-z)^{m_2/2}. \quad (3.21)$$

(Dies sind speziell diejenigen Entwicklungen der  $P$ -Funktion, bei denen die beteiligte hypergeometrische Funktion trivial wird.)

In den folgenden Punkten wird zu jedem Gewicht  $j$  eine endliche Basis der irreduziblen Darstellungen im Funktionenraum gegeben. Weil die unterliegende Symmetrie die  $SU(2, 2)$ -Gruppe ist, treten auch die halbzahligen Darstellungen der  $SU(2)$ -Untergruppen in Erscheinung; man erhält  $D(j, j)$ -Darstellungen mit  $j = 0, 1/2, 1, \dots$ . Weiterhin lassen sich nach Gleichung (3.13) für jedes  $j$  die möglichen Werte für  $\epsilon_0$  durch die Bedingung

$$\omega' = \pm\sqrt{(2j+1+2n')^2 - \epsilon_0} \in \mathbb{Z} \quad \text{mit} \quad n' \in \mathbb{N}^0 \quad (3.22)$$

$$\leftrightarrow \epsilon_0 = (2j+1+2n')^2 - (\omega')^2 = (2j+1+2n'+\omega')(2j+1+2n'-\omega) \quad (3.23)$$

finden. Es sind genau die  $\epsilon_0$  erlaubt, die sich als Differenz zweier Quadratzahlen schreiben lassen, wobei die Größere entweder gerade (bei  $j$ : halbzahlig) oder ungerade (bei  $j$ :

ganzzahlig) ist.

- $\mathbf{j} = \mathbf{0}$  (mit  $n = 0$ ):  $\{0, 0\}$ : Es gibt nur die triviale konstante Lösung. Die globalen Lösungen können sowohl masselos ( $\epsilon_0 = 0$ ) als auch massiv ( $\epsilon_0 = 1(\text{Mod } 4)$  oder  $\epsilon_0 = 0(\text{Mod } 8)$ ) sein.
- $\mathbf{j} = \mathbf{1/2}$  (mit  $n = 0$ ):  $\{1, 0\} \leftrightarrow \{0, 1\}$ : Es gibt vier verschiedene Lösungen mit den Eigenschaften:

$$\left. \begin{array}{l}
 \boxed{
 \begin{array}{ccc}
 e^{i\varphi_1} \cos \vartheta & \xleftrightarrow{K^{b\pm}} & e^{i\varphi_2} \sin \vartheta \\
 K^{a\pm} \uparrow & & K^{a\pm} \downarrow \\
 e^{-i\varphi_2} \sin \vartheta & \xleftrightarrow{K^{b\pm}} & e^{-i\varphi_1} \cos \vartheta
 \end{array}
 } & \begin{array}{l}
 e^{i\varphi_1} \cos \vartheta = \Phi_+^{a,1} = \Phi_+^{b,1} \\
 e^{-i\varphi_1} \cos \vartheta = \Phi_-^{a,2} = \Phi_-^{b,2} \\
 e^{i\varphi_2} \sin \vartheta = \Phi_+^{a,2} = \Phi_-^{b,1} \\
 e^{-i\varphi_2} \sin \vartheta = \Phi_-^{a,1} = \Phi_+^{b,2}
 \end{array} \\
 \end{array} \right\} (3.24)$$

Die globalen Lösungen existieren für die  $\epsilon_0$  Werte  $\epsilon_0 = 3(\text{Mod } 4)$ ,  $\epsilon_0 = 4(\text{Mod } 8)$  oder  $\epsilon_0 = 0(\text{Mod } 16)$ .

- $\mathbf{j} = \mathbf{1}$  (mit  $n = 0/1$ ):  $\{2, 0\} \leftrightarrow \{1, 1\} \leftrightarrow \{0, 2\}$ : Es gibt acht Funktionen, die bezüglich einer  $SU(2)$ -Gruppe einen Zustand mit höchstem Gewicht darstellen:

$$\left. \begin{array}{l}
 e^{i2\varphi_1} \cos^2 \vartheta = \Phi_+^{a,1} = \Phi_+^{b,1} \\
 e^{-i2\varphi_1} \cos^2 \vartheta = \Phi_-^{a,2} = \Phi_-^{b,2} \\
 e^{i2\varphi_2} \sin^2 \vartheta = \Phi_+^{a,2} = \Phi_-^{b,1} \\
 e^{-i2\varphi_2} \sin^2 \vartheta = \Phi_-^{a,1} = \Phi_+^{b,2}
 \end{array} \right\} (3.25)$$

$$\left. \begin{aligned}
K^{a+} \Phi_-^{a,1} &= e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} \sin \vartheta \cos \vartheta = K^{a-} \Phi_+^{a,1} \\
K^{a+} \Phi_-^{a,2} &= e^{i(-\varphi_1 + \varphi_2)} \sin \vartheta \cos \vartheta = K^{a-} \Phi_+^{a,2} \\
K^{b+} \Phi_-^{b,1} &= e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} \sin \vartheta \cos \vartheta = K^{b-} \Phi_+^{b,1} \\
K^{b+} \Phi_-^{b,2} &= e^{i(-\varphi_1 - \varphi_2)} \sin \vartheta \cos \vartheta = K^{b-} \Phi_+^{b,2}
\end{aligned} \right\} \quad (3.26)$$

Wendet man die Stufenoperatoren der jeweils anderen Gruppe auf die rechts stehenden Funktionen an, wird zwar in einer Richtung die Abbruchbedingung erfüllt (Vertauschungsregeln von  $K^{a\pm}$  und  $K^{b\pm}$ ), in der anderen verläßt man aber den Zyklus.

$$\left. \begin{aligned}
K^{a+} K^{b+} \Phi_-^{b,1} &= K^{b+} K^{a+} \Phi_+^{a,2} = 0 \\
K^{a-} K^{b+} \Phi_-^{b,2} &= K^{b+} K^{a-} \Phi_-^{a,2} = 0 \\
K^{b+} K^{a+} \Phi_-^{a,1} &= K^{a+} K^{b+} \Phi_+^{b,2} = 0 \\
K^{b-} K^{a+} \Phi_-^{a,2} &= K^{a+} K^{b-} \Phi_-^{b,2} = 0
\end{aligned} \right\} \quad (3.27)$$

und

$$K^{a+} K^{b+} \Phi_-^{b,2} = K^{b-} K^{a+} \Phi_-^{a,1} = K^{a-} K^{b+} \Phi_-^{b,1} = K^{b+} K^{a+} \Phi_-^{a,2} = \sin^2 \vartheta - \cos^2 \vartheta \quad (3.28)$$

Die letzte Funktion besitzt **keine**  $\varphi_1$ - oder  $\varphi_2$ -Abhängigkeit und gehört zu dem Wert  $n = 1$ , während alle anderen den Wert  $n = 0$  besitzen. Die Gleichheit folgt aus den Vertauschungsregeln und der Identität der Abbruchfunktionen.

Die Funktionen der Gleichungen (3.26) und (3.28) bilden die  $j = 1$ -Darstellungen der beiden  $SU(2)$  Untergruppen  $K^{a\pm}$  und  $K^{b\pm}$ .

$e^{i2\varphi_1} \cos^2 \vartheta$	$\xleftrightarrow{K^{b\pm}}$	$e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} \sin \vartheta \cos \vartheta$	$\xleftrightarrow{K^{b\pm}}$	$e^{i2\varphi_2} \sin^2 \vartheta$
$K^{a\pm} \updownarrow$		$K^{a\pm} \updownarrow$		$K^{a\pm} \updownarrow$
$e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} \sin \vartheta \cos \vartheta$	$\xleftrightarrow{K^{b\pm}}$	$(\sin^2 \vartheta - \cos^2 \vartheta)$	$\xleftrightarrow{K^{b\pm}}$	$e^{i(-\varphi_1 + \varphi_2)} \sin \vartheta \cos \vartheta$
$K^{a\pm} \updownarrow$		$K^{a\pm} \updownarrow$		$K^{a\pm} \updownarrow$
$e^{-i2\varphi_2} \sin^2 \vartheta$	$\xleftrightarrow{K^{b\pm}}$	$e^{i(-\varphi_1 - \varphi_2)} \sin \vartheta \cos \vartheta$	$\xleftrightarrow{K^{b\pm}}$	$e^{-i2\varphi_1} \cos^2 \vartheta$

Betrachtet man wieder, für welche Werte von  $\epsilon_0$  sich global definierte Lösungen ergeben, dann ergibt sich dasselbe Spektrum wie bei  $j = 0$ ,  $\epsilon_0 = 1(\text{Mod } 4)$  oder  $\epsilon_0 = 0(\text{Mod } 8)$ , mit einer Ausnahme:  $\epsilon_0 = 1$  ist verboten! (Es gibt keine natürlichen Zahlen  $n'$  und  $\omega$ , die die Bedingung  $(3 + 2n')^2 - \omega^2 = 1$  erfüllen.)

- $\mathbf{j}:\{2j, 0\} \leftrightarrow \{2j - 1, 1\} \leftrightarrow \dots \leftrightarrow \{0, 2j\}$  Alle beschränkten Lösungen lassen sich in folgendes Diagramm einordnen:

$$\begin{array}{ccccc}
 e^{i2j\varphi_1} \cos^{2j} \vartheta & \xleftrightarrow{K^{b\pm}} & \dots & \xleftrightarrow{K^{b\pm}} & e^{i2j\varphi_2} \sin^{2j} \vartheta \\
 K^{a\pm} \downarrow & & \vdots & & K^{a\pm} \downarrow \\
 \vdots & & \dots & & \vdots \\
 K^{a\pm} \downarrow & & \vdots & & K^{a\pm} \downarrow \\
 e^{-i2j\varphi_2} \sin^{2j} \vartheta & \xleftrightarrow{K^{b\pm}} & \dots & \xleftrightarrow{K^{b\pm}} & e^{-i2j\varphi_1} \cos^{2j} \vartheta
 \end{array}$$

Generell gilt: Eine *Eckfunktion* ( $\sqrt{\Phi_+^{a,b}}$ , höchste Gewichtsfunktion) darf nicht gleichzeitig von  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  abhängig sein. Startet man von einer beliebigen Ecke, dann kann nur dann eine andere Ecke erreicht werden, wenn der Startparameter  $m_1$  oder  $m_2$  ganzzahlig ist.

Die Lösungen der Klein–Gordon–Gleichung oder ihrer konformen Erweiterung führen auf einfache Weise zu den Basiselementen der irreduziblen Darstellung der  $SU(2) \times SU(2)$  Untergruppe der  $SU(2, 2)$ . Die einfachste nichttriviale Darstellung,  $D(1/2, 1/2)$ , besitzt vier Elemente (Gleichung (3.24)), die als *Grundbausteine* in allen relevanten Funktionen auftreten:

$$r := \cos \vartheta e^{i\varphi_1}, \quad \bar{r} = \cos \vartheta e^{-i\varphi_1}, \quad s := \sin \vartheta e^{i\varphi_2}, \quad \bar{s} = \sin \vartheta e^{-i\varphi_2}. \quad (3.29)$$

Definiert man weiterhin

$$t := e^{i\tau} \quad \bar{t} = e^{-i\tau}, \quad (3.30)$$

dann läßt sich z.B. Gleichung (3.8) auch durch

$$\Phi_{(0)n} = t^\omega r^{m_1} s^{m_2} F(m_1 + m_2 + 1 + n, -n; 1 + m_1; r\bar{r}) \quad (3.31)$$

$$= t^\omega r^{m_1} s^{m_2} F(m_1 + m_2 + 1 + n, -n; 1 + m_2; s\bar{s}) \quad (3.32)$$

darstellen.<sup>3</sup>

## 3.2 Maxwell-Feld

Die Darstellung aller Vektorpotentiale  $A_{(1)}$ , die Lösung der quellenfreien Maxwell-Gleichungen

$$0 = F^{mn}{}_{;n} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \sqrt{-g} g^{mk} g^{nl} (A_{k,l} - A_{l,k}) \right) \quad (3.33)$$

und gleichzeitig Eigenlösungen bezüglich der Cartan-Subalgebra der Symmetriegruppe  $SU(2,2)$  sind, ist ein Hauptziel dieser Arbeit. Es wird wie gehabt mit der biharmonischen Parametrisierung des Raumes  $S^1 \times S^3$  gearbeitet, deren Metrik mit Gleichung (2.3) gegeben ist. Einzelne Eigenlösungen sind bereits bekannt, so z.B. in [9] die für das  $U(2)$ -Programm relevanten Lösungen oder in [34] Eigenlösungen in Form von selbstdualen Feldstärken. Der Zusammenhang letzterer mit den hier gefundenen Lösungen wird im Anhang, Abschnitt C.2.6, hergestellt.

### 3.2.1 Wahl der Eichung

Für die Darstellung der Lösungen sind zwei verschiedene Eichungen von Interesse. Die **erste Eichung** dient zur Ermittlung aller Lösungen. Sie wird charakterisiert durch die Bedingung  $A_{0;0} \equiv 0$ . Es kann weiterhin  $\operatorname{div} A = \delta A = A^\mu{}_{;\mu} = 0$  gefordert werden, wobei sich diese Eigenschaft entweder aus den Maxwell-Gleichungen ergeben kann (falls  $\frac{\partial}{\partial \tau} A_\mu = i\omega A_\mu \neq 0$  ist) oder als freie Wahl zur Verfügung steht (falls  $A_0 \neq 0$  und  $A_{0;0} = 0$  gelten). Mit dieser Eichung lassen sich die Maxwellgleichungen nach ein paar Umformungen entkoppeln. Man erhält vier hypergeometrische Differentialgleichungen, die durch die Riemannsche  $P$ -Funktion gelöst werden. Diese vier Funktionen müssen, zur Erfüllung einer notwendigen Nebenbedingung, linear abhängig sein, was auf Grund ihrer Verwandtschaft<sup>4</sup> auch stets möglich ist. Im Anhang, Abschnitt C.2, ist der komplette Lösungsweg aufgezeigt, die vollständige Lösung bezüglich der ersten Eichung wird im nächsten Abschnitt dargestellt.

---

<sup>3</sup>Siehe auch S.50.

<sup>4</sup>Bei verwandten  $P$ -Funktionen unterscheiden sich zwei der sechs Parameter um  $\pm 1$ . Drei verwandte  $P$ -Funktionen sind stets linear abhängig.[25]

Im Rahmen des  $U(2)$ -Programms ist jedoch eine andere Eichung von Bedeutung. Da die Tori der  $\tau, \varphi_1$  und  $\varphi_2$ -Richtungen die dominierenden topologischen Objekte des Programms sind, werden nur die 1-Formen  $A_{(1)}$  betrachtet, die tangential auf diesen Tori definiert sind. Dies bedeutet, daß deren  $A_\vartheta$ -Komponente verschwinden muß. Diese Bedingung der **zweiten Eichung** ist stets durch Umeichen der bekannten Lösungen zu erreichen. Dabei wird aber in der Regel die Eigenschaft  $\delta A = 0$  verlorengehen. Berücksichtigt man weiterhin die  $\rho$ -Transformationen, dann bleibt die Eichung, im Gegensatz zur ersten Eichung, erhalten. Die Divergenz des Vektorpotentials verhält sich unter den  $\rho$ -Transformationen nach der ersten Eichung wie ein sekundäres Feld, während sie nach der zweiten Eichung wie ein quasiprimäres Feld transformiert (siehe Gleichung (2.72)). Speziell bei den Lösungen der zweiten Eichung, die divergenzfrei sind ( $\delta A = 0$ ), hat man Invarianz unter den  $\rho$ -Transformationen, sowohl für  $A_\mu$  als auch für  $\delta A$ . Wegen  $\delta F = \delta dA = 0$  und  $\delta A = 0$  gilt auch  $(\delta d + d\delta)A = 0$ , womit diese Lösungen harmonische 1-Formen sind und bei  $\rho$ -Transformationen dies auch bleiben. Diesen Lösungen wird eine besondere Bedeutung zugemessen.

### 3.2.2 Komplexes Lösungssystem

Die Lösungen der Maxwellgleichungen mit der ersten Eichung  $A_{0,0} = 0$ , die außerdem Eigenlösungen bezüglich der Cartan-Subalgebra von  $SU(2, 2)$  sind, lassen sich mit dem Separationsansatz

$$A_i = e^{i(\omega\tau + m_1\varphi_1 + m_2\varphi_2)} A_i(\vartheta) \quad (3.34)$$

gewinnen. Für  $A_0 \equiv 0$  lassen sie sich darstellen als:

$$\begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = e^{i(\omega\tau + m_1\varphi_1 + m_2\varphi_2)} \begin{pmatrix} 0 \\ -c_{1A} \cdot P_{1A} + c_{1B} \cdot P_{1B} \\ c_{2A} \cdot P_{2A} - c_{2B} \cdot P_{2B} \\ i\hat{A}_3(z)/\sqrt{z(1-z)} \end{pmatrix} \quad (3.35)$$

mit den Konstanten  $c_{1A}, c_{1A}, c_{1A}$  und  $c_{1A}$ , die so zu wählen sind, daß die Nebenbedingung

$$\hat{A}_3(z) = c_{2A} \cdot P_{2A} + c_{2B} \cdot P_{2B} \stackrel{!}{=} c_{1A} \cdot P_{1A} + c_{1B} \cdot P_{1B} \quad (3.36)$$



erfüllt wird. Dabei stehen die Funktionen

$$P_{1A} = P \left| \begin{array}{ccc|c} 0 & \infty & 1 & \\ -\frac{m_1}{2} & -\frac{\varepsilon}{2} & -\frac{m_2}{2} & z \\ 1 + \frac{m_1}{2} & \frac{\varepsilon}{2} & \frac{m_2}{2} & \end{array} \right| \quad (3.37)$$

$$P_{2A} = P \left| \begin{array}{ccc|c} 0 & \infty & 1 & \\ -\frac{m_1}{2} & -\frac{\varepsilon}{2} & -\frac{m_2}{2} & z \\ \frac{m_1}{2} & \frac{\varepsilon}{2} & 1 + \frac{m_2}{2} & \end{array} \right| \quad (3.38)$$

$$P_{1B} = P \left| \begin{array}{ccc|c} 0 & \infty & 1 & \\ 1 - \frac{m_1}{2} & -\frac{\varepsilon}{2} & -\frac{m_2}{2} & z \\ \frac{m_1}{2} & \frac{\varepsilon}{2} & \frac{m_2}{2} & \end{array} \right| \quad (3.39)$$

$$P_{2B} = P \left| \begin{array}{ccc|c} 0 & \infty & 1 & \\ -\frac{m_1}{2} & -\frac{\varepsilon}{2} & 1 - \frac{m_2}{2} & z \\ \frac{m_1}{2} & \frac{\varepsilon}{2} & \frac{m_2}{2} & \end{array} \right| \quad (3.40)$$

für Riemannsche  $P$ -Funktionen. Da diese verwandte Funktionen sind, läßt sich die Nebenbedingung (3.36) stets erfüllen.

Bei  $A_0 \neq 0$  (aber  $A_{0,0} \equiv 0$  gilt) erhält man eine Sonderlösung, die in Gleichung (3.52) dargestellt ist.

### 3.2.3 Beispiele

Folgende Konstanten werden bei der Erfüllung der Nebenbedingung (3.36) benötigt:

$$\left. \begin{aligned} c_a &= \frac{\Gamma(1+k+m_2)\Gamma(1-k-m_1)}{\Gamma(1+m_2)\Gamma(1-m_1)} = \frac{(1+m_2)_k}{(1-k-m_1)_k} \\ c_b &= \frac{\Gamma(1+k+m_1)\Gamma(1-k-m_2)}{\Gamma(1+m_1)\Gamma(1-m_2)} = \frac{(1+m_1)_k}{(1-k-m_2)_k} \end{aligned} \right\} \quad (3.41)$$

Diese Konstanten gelten auch für nichtganze  $m_1$  und  $m_2$ , aber nicht für gebrochene oder nichtpositive  $k$ .

Betrachtet man die Lösungen mit  $m_1, m_2 > 0$  und  $k = \frac{\omega - m_1 - m_2}{2} \in \mathbb{N}^+$ , dann erhält man zwei linear unabhängige Lösungen, die global definiert sind (stetig und beschränkt).

Sie können dargestellt werden als

$$\begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = e^{i(\omega\tau + m_1\varphi_1 + m_2\varphi_2)} \cdot z^{m_1/2}(1-z)^{m_2/2} \begin{pmatrix} 0 \\ A_1(z) \\ A_2(z) \\ \frac{i}{\sqrt{z(1-z)}} \hat{A}_3(z) \end{pmatrix} \quad (3.42)$$

mit

- Erste Lösung ( $L_1$ )

$$A_1 = F(-k, \omega - k; 1 + m_2; 1 - z) \quad (3.43)$$

$$A_2 = c_{2a}(1-z)F(1-k, 1 + \omega - k; 1 + m_1; z) - c_{2b}F(-k, \omega - k; 1 + m_1; z) \quad (3.44)$$

$$\hat{A}_3 = F(-k, \omega - k; 1 + m_2; 1 - z) \quad (3.45)$$

$$c_{2a} = 1/c_a - c_b \quad , \quad c_{2b} = c_b \quad (3.46)$$

- Zweite Lösung ( $L_2$ )

$$A_1 = -c_{1a}z \cdot F(1-k, 1 + \omega - k; 1 + m_2; 1 - z) + c_{1b}F(-k, \omega - k; 1 + m_2; 1 - z) \quad (3.47)$$

$$A_2 = -F(-k, \omega - k; m_1 + 1; z) \quad (3.48)$$

$$\hat{A}_3 = F(-k, \omega - k; m_1 + 1; z) \quad (3.49)$$

$$c_{1a} = 1/c_b - c_a \quad , \quad c_{1b} = c_a \quad (3.50)$$

Mit den Konstanten  $c_a$  und  $c_b$  nach Gleichung (3.41). Andere Lösungen sind im Anhang, Abschnitt C.2.4, aufgeführt.

Unter Ausnutzung der  $\rho$ -Transformationen lassen sich einzelne Lösungen miteinander verbinden. Denn mit einer Lösung

$$A_\mu = \chi_\mu(\tau, \varphi_1, \varphi_2, \vartheta) \quad \text{mit } \mu = 0..4 \text{ folgen}$$

$$B_\mu = \chi_\mu(\tau, \varphi_2, \varphi_1, \rho_0(\vartheta)),$$

$$C_\mu = \chi_\mu(\varphi_2, \tau, \varphi_1, \rho_1(\vartheta)),$$

$$D_\mu = \chi_\mu(\varphi_1, \tau, \varphi_2, \rho_2(\vartheta)),$$

$$F_\mu = \chi_\mu(\varphi_2, \varphi_1, \tau, \rho_3(\vartheta)) \quad \text{und}$$

$$E_\mu = \chi_\mu(\varphi_1, \varphi_2, \tau, \rho_4(\vartheta))$$

mittels der  $\rho$ -Transformationen als weitere Lösungen. Diese Eigenschaft wird ausgenutzt, um die Lösungen in Abschnitt 3.3.2 zu klassifizieren.

### 3.2.4 Ausgezeichnete Lösungen

Wie bereits dargestellt, sind im Rahmen des  $U(2)$ -Programms diejenigen Lösungen von Interesse, deren  $A_\theta$ -Komponente weggeeicht worden ist, also die der zweiten Eichung genügen. Da wegen der Eichfreiheit alle Lösungen auf diese Form gebracht werden können, geben wir hier die speziellen Fälle an, bei denen die Lösungen zusätzlich divergenzfrei sind ( $\delta A = 0$ ). Dies sind alle Lösungen, deren Divergenzfreiheit auch nach den  $\rho$ -Transformationen erhalten bleibt.

Dies sind zuerst die Lösungen, die bereits mit der ersten Eichung keine  $A_\theta$ -Komponente besitzen (siehe Anhang, Abschnitt C.2.4).

#### 1. 'A<sub>0</sub>-Lösung'

$$\underline{A} = e^{i(m_1\varphi_1+m_2\varphi_2)}(A_0(z), 0, 0, 0) \quad (3.51)$$

$$A_0(z) = P \begin{vmatrix} 0 & \infty & 1 \\ -\frac{m_1}{2} & 0 & -\frac{m_2}{2} & z \\ \frac{m_1}{2} & 1 & \frac{m_2}{2} \end{vmatrix} \quad (3.52)$$

#### 2. 'A<sub>1</sub>-Lösung'

$$\underline{A} = e^{i(\omega\tau+m_2\varphi_2)}(0, A_1(z), 0, 0, 0) \quad (3.53)$$

$$A_1(z) = P \begin{vmatrix} 0 & \infty & 1 \\ 0 & -\frac{\omega}{2} & -\frac{m_2}{2} & z \\ 1 & \frac{\omega}{2} & \frac{m_2}{2} \end{vmatrix} \quad (3.54)$$

Die beschränkten Entwicklungen dieser Funktion sind bei den ad hoc Lösungen des  $U(2)$ -Programms mit enthalten.

#### 3. 'A<sub>2</sub>-Lösung'

$$\underline{A} = e^{i(\omega\tau+m_1\varphi_1)}(0, 0, A_2(z), 0) \quad (3.55)$$

$$A_2(z) = P \begin{vmatrix} 0 & \infty & 1 \\ -\frac{m_1}{2} & -\frac{\omega}{2} & 0 & z \\ \frac{m_1}{2} & \frac{\omega}{2} & 1 \end{vmatrix} \quad (3.56)$$

Die beschränkten Entwicklungen dieser Funktion sind bei den ad hoc Lösungen des  $U(2)$ -Programms mit enthalten.

4. 'Drittellösung': Neben den Lösungen der ersten Eichung, die gleichzeitig die zweite Eichung erfüllen, gibt es genau einen weiteren Satz von Lösungen, die divergenzfrei sind und die zweite Eichung erfüllen.

Man erhält mit  $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2 \in \{-1, 1\}$ :

$$\begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = c \frac{e^{i(\sigma_0\tau + \sigma_1\varphi_1 + \sigma_2\varphi_2)\frac{4}{3}}}{(\sin \vartheta \cos \vartheta)^{\frac{4}{3}}} \begin{pmatrix} \sigma_0 \\ \sigma_1(\cos \vartheta)^4 \\ \sigma_2(\sin \vartheta)^4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.57)$$

Unter Betrachtung aller Vorzeichenwechsel (d.h. die Wahl aller Kombinationen der  $\sigma_i$ ) erhält man so 8 verschiedene Einzellösungen.

Obwohl einzelne Komponenten divergieren, ist die  $\vartheta$ -Abhängigkeit

$$\int_0^{\pi/2} A_\mu^* A^\mu \sin \vartheta \cos \vartheta d\vartheta = 3 \int_0^{\pi/2} (\sin \vartheta \cos \vartheta)^{1/3} d\vartheta = \frac{3\Gamma(2/3)^2}{2\Gamma(4/3)} \approx 3.08009 \quad (3.58)$$

beschränkt (und unabhängig von den  $\sigma_i$ ).

### 3.2.5 Proca-Gleichung

Um die Untersuchung der Differentialgleichungen und ihrer Lösungen zu ergänzen, bietet sich die Proca-Gleichung (inhomogene Maxwellgleichung)

$$F^{mn}{}_{;n} = -\epsilon B^m \quad \text{mit} \quad F = dB \quad (3.59)$$

an.

Für die Lösungen, die der ersten Eichung genügen, ist die Angabe der Lösung einfach. Nur der  $\tau$ -abhängige Vorfaktor einer Lösung  $\underline{A} = e^{i\omega\tau} \underline{A}(\omega, \dots)$  der homogenen Maxwellgleichungen (3.33) mit  $A_0 = 0$  muß variiert werden. Bildet man den (ebenfalls divergenzfreien)

Vektor

$$\underline{B} = e^{i\tilde{\omega}\tau} \underline{A}(\omega, \dots) \quad \text{mit} \quad \tilde{\omega} = \sqrt{\omega^2 - \epsilon},$$

dann liegt eine Lösung der Proca-Gleichung (3.59) vor.

Die Drittellösung kann ebenfalls auf eine Lösung der Proca-Gleichung abgebildet werden, indem man ein  $\omega(\epsilon)$  einführt:

$$\begin{pmatrix} B_0 \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} = e^{i\omega\tau} \frac{e^{i(\sigma_1\varphi_1 + \sigma_2\varphi_2)^{\frac{4}{3}}}}{(\sin\vartheta \cos\vartheta)^{\frac{4}{3}}} \begin{pmatrix} 4/3 \\ \omega\sigma_1(\cos\vartheta)^4 \\ \omega\sigma_2(\sin\vartheta)^4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad (3.60)$$

$$\omega = \pm \sqrt{\frac{16}{9} - \epsilon} \quad (3.61)$$

Interessanterweise ergibt sich für

$$\epsilon = 7/9 \quad \iff \quad \omega = \pm 1$$

der einzige Wert für ein positives  $\epsilon$ , der ein nichtverschwindendes, ganzzahliges  $\omega$  erlaubt.

### 3.3 Klassifizierung und Vergleich

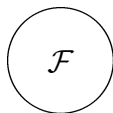
Es wird nach einer Möglichkeit gesucht, die Lösungen der Maxwell-Gleichungen so zu klassifizieren, daß die besondere Stellung, die einzelne Lösungen im  $U(2)$ -Programm einnehmen, erkennbar wird. Ein solches Schema wird jedoch nicht gefunden. Die Auszeichnung der (für das Programm) relevanten Lösungen kann zur Zeit nur auf die Eigenschaft zurückgeführt werden, daß durch die Eichbedingung  $A_\vartheta \equiv 0$  die Felder nur Komponenten entlang der Heegaard-Tori (und der  $\tau - S^1$ ) besitzen und daß ihre Auszeichnung in der Divergenzfreiheit besteht.

Die beiden folgenden Einteilungen wurden gewählt, um die ausgezeichneten Lösungen (nach Abschnitt 3.2.4) näher charakterisieren zu können.

### 3.3.1 Nach der ersten Eichung

Nachdem alle Lösungen bekannt sind, können sie nach bestimmten Eigenschaften unterteilt werden. Die folgenden Bezeichnungen werden in diesem Abschnitt benutzt:

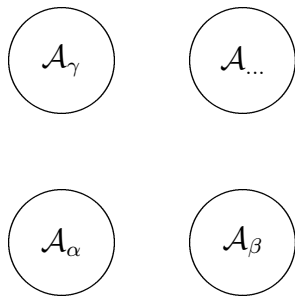
$\mathcal{F}$	$:= \{F \mid dF = \delta F = 0\}$	Feldstärken $F$
$\mathcal{A}$	$:= \{A \mid F = dA \wedge F \in \mathcal{F}\}$	Vektorpotentiale $A$
$\mathcal{C}$	$:= \{A \mid A \in \mathcal{A} \wedge \delta A = 0\}$	Divergenzfreie Vektorpotentiale
$\mathcal{A}_\mu$	$:= \{A \mid A \in \mathcal{A} + \text{Eichung}\}$	Potentiale in bestimmter Eichung / Darstellung
	$\mathcal{A}_\alpha$	erste Eichung
	$\mathcal{A}_\beta$	zweite Eichung
$\mathcal{B}$	$:= \{A \mid  A  < \infty\}$	beschränkte Potentiale
$\mathcal{N}$	$:= \{A \mid m_1, m_2, \omega \in \mathbb{Z}\}$	ganzzahlige Quantenzahlen
$\mathcal{G}$	$:= \{A \mid A \in \mathcal{A}_\alpha \cap \mathcal{A}_\beta\}$	einkomponentige Potentiale
$\mathcal{G}_3$	:	Drittellösung



Alle Feldstärketensoren ( $F_{mn}$ ), die die Maxwellgleichungen erfüllen und deren Komponenten nach der gewählten Basis in variablenseparierter Darstellung schreibbar sind (genauer gesagt, die auf ein solches Potential zurückführbar sind), seien in der Menge  $\mathcal{F}$  zusammengefaßt.

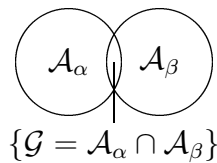
Die Lösungen lassen sich durch die Quantenzahlen  $m_1, m_2$  und  $\omega$  unterscheiden. Zu jedem Satz von Quantenzahlen gehören jedoch mehrere Lösungen. Aus der  $\varphi_1, \varphi_2$  und  $\tau$ -Abhängigkeit folgen drei freie Phasen und aus der  $\vartheta$ -Abhängigkeit noch maximal vier freie Parameter (durch 2  $P$ -Funktionen à zwei Entwicklungen).

Für die homogenen Maxwellgleichungen ist der duale Feldtensor ebenfalls eine Lösung. (Dies wird in Schrödingers Arbeit [34] ausgenutzt.) Es lassen sich immer selbstduale und antiselbstduale Felder erzeugen.

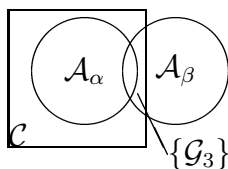


- Die Menge  $\mathcal{F}$  kann auch durch eine äquivalente Menge  $\mathcal{A}$  von Vektorpotentialen dargestellt werden. Die Darstellung ist aber nicht eindeutig, weil die Potentiale  $A$  umgeichtet werden können, ohne daß die Felder  $F$  verändert werden:  $F = dA_\alpha = dA_\beta$  mit  $A_\alpha = A_\beta + d\Phi$ .

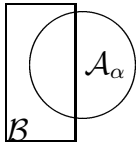
Jeder Kreis steht für die vollständige Lösungsmenge (bezüglich  $\mathcal{F}$ ), wobei sich die Kreise untereinander durch die jeweilige Eichung unterscheiden. Die Mengen  $\mathcal{A}_\alpha, \mathcal{A}_\beta$  usw. können durchaus gemeinsame Untermengen, d.h. identische Darstellungen einzelner Lösungen, besitzen. Im folgenden seien  $\mathcal{A}_\alpha$  alle Lösungen mit der ersten Eichung und  $\mathcal{A}_\beta$  alle Lösungen mit der zweiten Eichung.



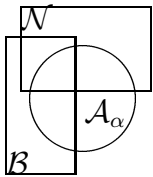
- Die drei Klassen von einkomponentigen Lösungen besitzen in beiden Eichungen dieselbe Darstellung. Sie spannen die Schnittmenge  $\mathcal{G} = \mathcal{A}_\alpha \cap \mathcal{A}_\beta$  auf. Die Menge  $\mathcal{G}$  besteht aus den  $A_0, A_1$  und  $A_2$ -Lösungen sowie den dazugehörigen unbeschränkten Lösungen (siehe Abschnitt 3.2.4).



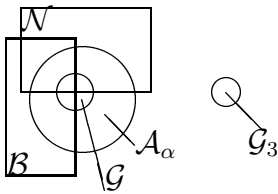
- Die Menge  $\mathcal{C}$  aller divergenzfreien (harmonischen) Lösungen  $A$  besitzt  $\mathcal{A}_\alpha$  vollständig als Untermenge. Zusätzlich beinhaltet sie noch alle Darstellungen, die durch Umeichung mit einer harmonischen Eichfunktion  $\Phi$  (mit  $\square\Phi = 0$ ) aus der Menge  $\mathcal{A}_\alpha$  entstehen. Die Schnittmenge  $\mathcal{C} \cap \mathcal{A}_\beta$  beinhaltet außer der Menge  $\mathcal{G}$  noch die Menge  $\mathcal{G}_3$ , die nur aus der Drittellösung besteht.



- Die Menge  $\mathcal{B}$  besteht aus allen Vektorpotentialen  $A$  mit beschränkten Komponenten. Dies sind alle Lösungen, deren  $\vartheta$ -Abhängigkeit keine Polstellen aufweisen. Die Schnittmenge  $\mathcal{B} \cap \mathcal{A}_\alpha$  wird in Abschnitt C.2.4 angegeben. Es ergeben sich bestimmte Einschränkungen auf den Wertebereich von  $k$ .  $m_1, m_2$  und  $\omega$  sind noch beliebig (reellwertig). Es besteht die Möglichkeit, daß bei einer anderen Eichung noch weitere beschränkte Lösungen existieren.

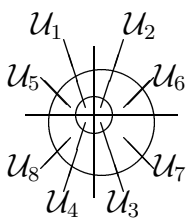


- Die Menge  $\mathcal{N}$  besteht aus allen Vektorpotentialen  $A$  mit ganzen Quantenzahlen  $m_1, m_2$  und  $\omega$ . Zu den unbeschränkten Lösungen in  $\mathcal{N} \cap \mathcal{A}_\alpha$  gehören z.B. fast alle negativen oder halbzahligen  $k$ -Werte oder die divergenten Zweige der P-Funktionen.



- Die Lösungsmengen  $\mathcal{G}$  und  $\mathcal{G}_3$  repräsentieren die wichtigen Lösungen und können auch in diesem Bild dargestellt werden.

Ausgehend vom vorhergehenden Diagramm werden die Lösungen in  $\mathcal{A}_\alpha$  in 8 Untermengen unterteilt. Die Menge  $\overline{\mathcal{B}}$  usw. ist dabei das Komplement der Menge  $\mathcal{B}$ , d.h.  $\overline{\mathcal{B}} = \{A \mid A \notin \mathcal{B}\}$ . Zur Abkürzung werden die folgenden Bezeichnungen eingeführt:



- $\mathcal{U}_1 := \mathcal{A}_\alpha \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{N} \cap \mathcal{G}$
- $\mathcal{U}_2 := \mathcal{A}_\alpha \cap \overline{\mathcal{B}} \cap \mathcal{N} \cap \mathcal{G}$
- $\mathcal{U}_3 := \mathcal{A}_\alpha \cap \overline{\mathcal{B}} \cap \overline{\mathcal{N}} \cap \mathcal{G}$
- $\mathcal{U}_4 := \mathcal{A}_\alpha \cap \mathcal{B} \cap \overline{\mathcal{N}} \cap \mathcal{G}$
- $\mathcal{U}_5 := \mathcal{A}_\alpha \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{N} \cap \overline{\mathcal{G}}$
- $\mathcal{U}_6 := \mathcal{A}_\alpha \cap \overline{\mathcal{B}} \cap \mathcal{N} \cap \overline{\mathcal{G}}$
- $\mathcal{U}_7 := \mathcal{A}_\alpha \cap \overline{\mathcal{B}} \cap \overline{\mathcal{N}} \cap \overline{\mathcal{G}}$
- $\mathcal{U}_8 := \mathcal{A}_\alpha \cap \mathcal{B} \cap \overline{\mathcal{N}} \cap \overline{\mathcal{G}}$

Die folgende Unterteilung weist die speziellen Lösungen den Mengen zu. Die Angabe  $(X^*)$  in Klammern gibt die Entartung / Vielfachheit der reellen Lösungen bezüglich fest gewählter,



nichtnegativer Quantenzahlen an. (So liefert z.B. die Vertauschung  $\sin \omega \tau \leftrightarrow \cos \omega \tau$  den Faktor  $(2^*)$ , da beide Versionen zulässig sind.)

### 1. Einkomponentige Lösungen

(a) **beschränkte und eindeutige Lösungen:** Menge  $\mathcal{U}_1$ . Die Quantenzahlen  $\omega, k, m_1$  und  $m_2$  sind ganzzahlig.

i.  $A_0$ -Lösung:  $\omega = 0$  ( $4^*$ )

ii.  $A_1$ -Lösung:  $m_1 = 0$  ( $4^*$ ) Interpretation im  $U(2)$ -Programm:

A.  $m_2 = 0$  und  $k = 1, 2, 3$ : Neutrinos

B.  $m_2 = 1$  und  $k = 1, 2, 3$ : Elektron, Myon, Tau

C.  $m_2 = 1$  und  $k = 0$ : Baryonenladung

iii.  $A_2$ -Lösung:  $m_2 = 0$  ( $4^*$ ) Interpretation im  $U(2)$ -Programm: zugehörige Antiteilchen

(b) **nicht beschränkte, aber eindeutige Lösungen:** Menge  $\mathcal{U}_2$ . Die Quantenzahlen  $\omega, m_1$  und  $m_2$  sind ganzzahlig,  $k$  ist halbzahlig oder negativ.

i. Lösung:  $\omega = 0$  ( $4^* / 8^*$ )

ii. Lösung:  $m_1 = 0$  ( $4^* / 8^*$ )

iii. Lösung:  $m_2 = 0$  ( $4^* / 8^*$ )

(c) **nichtganze Quantenzahlen, beschränkt:** Menge  $\mathcal{U}_4$ . Hier gibt es für die Quantenzahlen  $m_1, m_2$  und  $k$  bestimmte Intervalle.

(d) **nichtganze Quantenzahlen, unbeschränkt:** Menge  $\mathcal{U}_3$ .

2. **Zweikomponentige Lösungen:** Dies sind die dualen Felder zu den einkomponentigen Lösungen. Man erhält eine ähnliche Struktur, die Lösungen besitzen aber keine Relevanz im  $U(2)$ -Programm.

(a) **beschränkte und eindeutige Lösungen:**  $\subset \mathcal{U}_5$ . (Ein Teil dieser Lösungen sind in Kombination mit einem Teil der Lösungen aus  $\mathcal{U}_1$  in Schrödingers Lösungen mit enthalten.)

- (b) **nicht beschränkte, aber eindeutige Lösungen:**  $\subset \mathcal{U}_6$ .
- (c) **nichtganze Quantenzahlen, beschränkt:**  $\subset \mathcal{U}_8$ .
- (d) **nichtganze Quantenzahlen, unbeschränkt:**  $\subset \mathcal{U}_7$ .

### 3. Dreikomponentige Lösungen

- (a) **beschränkte und eindeutige Lösungen:**  $\subset \mathcal{U}_5$  (Hier sind die Lösungen Schrödingers mit enthalten).
- (b) **nicht beschränkte, aber eindeutige Lösungen:**  $\subset \mathcal{U}_6$ .
- (c) **nichtganze Quantenzahlen, beschränkt:**  $\subset \mathcal{U}_8$ .
- (d) **nichtganze Quantenzahlen, unbeschränkt:**  $\subset \mathcal{U}_7$ .

- i. umgeeichte Drittellösung (8\*) (Dargestellt in der zweiten Eichung bildet sie die Menge  $\mathcal{G}_3$ .)

#### 3.3.2 Nach der zweiten Eichung

Die Klassifizierung der Lösungen, die der zweiten Eichung genügen ( $A_\vartheta \equiv 0$ ), erfolgt nach ihrem Transformationsverhalten unter der Dihedralen Gruppe  $D_3$ , die durch die  $\rho$ -Transformationen erzeugt wird. Hierbei genügt es, das Transformationsverhalten für  $\rho_0$  und  $\rho_3$  zu kennen, da die anderen Transformationen aus ihnen gebildet werden können. Die einfachsten Darstellungen setzen sich aus Singulett (1), Dubletts (2), Triplett (3) und Sextupeln (6) zusammen. Die Singulett-Lösungen sind unter allen  $\rho$ -Transformationen invariant, die Dublett-Lösungen transformieren unter einem  $\hat{\rho}$  mit  $\mathbb{Z}_2$ -Struktur u.s.f. Wie diese Darstellungen aussehen können, zeigen die folgenden Beispiele für die in Abschnitt 3.2.4 ausgezeichneten Lösungen.

1. Die Drittellösung besteht aus 8 Einzellösungen, die sich durch die Vorzeichen im Phasenfaktor  $V$  und der Komponenten unterscheiden. Unter den  $\rho$ -Transformationen zerfallen diese in vier Darstellungen:  $1, \bar{1}, 3, \bar{3}$ .

(a) 1

$$\begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \frac{e^{i(\tau+\varphi_1+\varphi_2)\frac{4}{3}}}{(\sin \vartheta \cos \vartheta)^{\frac{4}{3}}} \begin{pmatrix} 1 \\ \cos^4 \vartheta \\ \sin^4 \vartheta \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.62)$$

(b)  $\bar{1}$ 

$$\begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \frac{e^{-i(\tau+\varphi_1+\varphi_2)\frac{4}{3}}}{(\sin \vartheta \cos \vartheta)^{\frac{4}{3}}} \begin{pmatrix} 1 \\ \cos^4 \vartheta \\ \sin^4 \vartheta \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.63)$$

(c) 3

$$\begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} \in \left\{ \frac{e^{i(-\tau+\varphi_1+\varphi_2)\frac{4}{3}}}{(\sin \vartheta \cos \vartheta)^{\frac{4}{3}}} \begin{pmatrix} -1 \\ \cos^4 \vartheta \\ \sin^4 \vartheta \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{e^{i(\tau-\varphi_1+\varphi_2)\frac{4}{3}}}{(\sin \vartheta \cos \vartheta)^{\frac{4}{3}}} \begin{pmatrix} 1 \\ -\cos^4 \vartheta \\ \sin^4 \vartheta \\ 0 \end{pmatrix}, \right. \\ \left. \frac{e^{i(\tau+\varphi_1-\varphi_2)\frac{4}{3}}}{(\sin \vartheta \cos \vartheta)^{\frac{4}{3}}} \begin{pmatrix} 1 \\ \cos^4 \vartheta \\ -\sin^4 \vartheta \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad (3.64)$$

(d)  $\bar{3}$ 

$$\begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} \in \left\{ \frac{e^{-i(-\tau+\varphi_1+\varphi_2)\frac{4}{3}}}{(\sin \vartheta \cos \vartheta)^{\frac{4}{3}}} \begin{pmatrix} -1 \\ \cos^4 \vartheta \\ \sin^4 \vartheta \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{e^{-i(\tau-\varphi_1+\varphi_2)\frac{4}{3}}}{(\sin \vartheta \cos \vartheta)^{\frac{4}{3}}} \begin{pmatrix} 1 \\ -\cos^4 \vartheta \\ \sin^4 \vartheta \\ 0 \end{pmatrix}, \right. \\ \left. \frac{e^{-i(\tau+\varphi_1-\varphi_2)\frac{4}{3}}}{(\sin \vartheta \cos \vartheta)^{\frac{4}{3}}} \begin{pmatrix} 1 \\ \cos^4 \vartheta \\ -\sin^4 \vartheta \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad (3.65)$$

Die Invarianz unter  $\hat{\rho}_0$  ist offensichtlich:

$$\hat{\rho}_0 : \varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2 \quad A_1 \leftrightarrow A_2 \quad \cos \vartheta \leftrightarrow \sin \vartheta$$

Mit der  $\hat{\rho}_3$  Transformation

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_3 : \tau \leftrightarrow \varphi_2 \quad A_0 \leftrightarrow A_2 \quad \sin \vartheta \rightarrow 1/\sin \vartheta \quad \cos \vartheta \rightarrow -i \cos \vartheta / \sin \vartheta \\ (\sin \vartheta \cos \vartheta)^{-4/3} \rightarrow \sin^4 \vartheta (\sin \vartheta \cos \vartheta)^{-4/3} \end{aligned}$$

erhält man die Invarianzeigenschaft. (Beachte  $(-i)^{-4/3} = e^{\frac{3\pi}{2}i \frac{-4}{3}} = e^{-2\pi i} = 1$ )

2. Drei einkomponentige Lösung mit  $m_1 = m_2 = \omega = 1$ : Durch Kombination der Einzellösungen

$$\begin{aligned} A_0 &= e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} \left( c_1 \frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta} + c_2 \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} \right) \sim e^{i(\varphi_1 + \varphi_2) \pm t_l} \\ A_1 &= e^{i(\tau + \varphi_2)} \left( c_3 \sin \vartheta + c_4 \frac{1}{\sin \vartheta} \right) \sim e^{i(\tau + \varphi_2) \pm s_l} \\ A_2 &= e^{i(\tau + \varphi_1)} \left( c_5 \cos \vartheta + c_6 \frac{1}{\cos \vartheta} \right) \sim e^{i(\tau + \varphi_1) \pm c_l} \\ &\text{mit } t_l := \ln \tan \vartheta, \quad s_l := \ln \sin \vartheta, \quad c_l := \ln \cos \vartheta \end{aligned} \quad (3.66)$$

läßt sich keine kleinere Untergruppe erzeugen. Für eine geschlossene Darstellung der Lösungen unter den  $\rho$ -Transformationen benötigt man den kompletten Satz (6-Darstellung).

3. Drei einkomponentige Lösung mit  $m_1 = m_2 = \omega = 4n$ : Die sechs unabhängigen Einzellösungen lassen sich in zwei Untergruppen der Dimension  $3 + 3$  aufteilen, wobei jede Dreiergruppe eine weitere eindimensionale Untergruppe enthält.

(a)  $3_S$  mit Untergruppe  $1_S$

$$\begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} \in c \left\{ \begin{pmatrix} -e^{i4n(\varphi_1 + \varphi_2)} \cosh(4n t_l) \\ e^{i4n(\tau + \varphi_2)} \cosh(4n s_l) \\ e^{i4n(\tau + \varphi_1)} \cosh(4n c_l) \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{i4n(\varphi_1 + \varphi_2)} \cosh(4n t_l) \\ -e^{i4n(\tau + \varphi_2)} \cosh(4n s_l) \\ e^{i4n(\tau + \varphi_1)} \cosh(4n c_l) \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\left( \begin{array}{c} e^{i4n(\varphi_1+\varphi_2)} \cosh(4n t_l) \\ e^{i4n(\tau+\varphi_2)} \cosh(4n s_l) \\ -e^{i4n(\tau+\varphi_1)} \cosh(4n c_l) \\ 0 \end{array} \right) \quad (3.67)$$

(b)  $1_S$  Symmetrische Lösung, konstruierbar aus  $3_S$

$$\left( \begin{array}{c} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} e^{i4n(\varphi_1+\varphi_2)} \cosh(4n t_l) \\ e^{i4n(\tau+\varphi_2)} \cosh(4n s_l) \\ e^{i4n(\tau+\varphi_1)} \cosh(4n c_l) \\ 0 \end{array} \right) \quad (3.68)$$

Diese Lösung bleibt unter allen erweiterten  $\rho$ -Transformationen ohne Phasenveränderung erhalten.

(c)  $3_A$  mit Untergruppe  $1_A$

$$\left( \begin{array}{c} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} \right) \in \left\{ \left( \begin{array}{c} e^{i4n(\varphi_1+\varphi_2)} \sinh(4n t_l) \\ e^{i4n(\tau+\varphi_2)} \sinh(4n s_l) \\ e^{i4n(\tau+\varphi_1)} \sinh(4n c_l) \\ 0 \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} -e^{i4n(\varphi_1+\varphi_2)} \sinh(4n t_l) \\ e^{i4n(\tau+\varphi_2)} \sinh(4n s_l) \\ e^{i4n(\tau+\varphi_1)} \sinh(4n c_l) \\ 0 \end{array} \right), \right. \\ \left. \left( \begin{array}{c} e^{i4n(\varphi_1+\varphi_2)} \sinh(4n t_l) \\ e^{i4n(\tau+\varphi_2)} \sinh(4n s_l) \\ -e^{i4n(\tau+\varphi_1)} \sinh(4n c_l) \\ 0 \end{array} \right) \right\} \quad (3.69)$$

(d)  $1_A$  Antisymmetrische Lösung, konstruierbar aus  $3_A$

$$\left( \begin{array}{c} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} e^{i4n(\varphi_1+\varphi_2)} \sinh(4n t_l) \\ -e^{i4n(\tau+\varphi_2)} \sinh(4n s_l) \\ e^{i4n(\tau+\varphi_1)} \sinh(4n c_l) \\ 0 \end{array} \right) \quad (3.70)$$

Diese Lösung erhält mit jeder  $\rho$ -Transformation einen Phasenfaktor  $(-1)$ .

4. Drei einkomponentige Lösung mit  $m_1 = m_2 = \omega = 4n + 2$ : Die Lösungen verteilen sich wie im vorhergehenden Fall auf zwei Dreiergruppen. Der Unterschied besteht einzig

in einem anderen Vorzeichen der  $A_0$ -Komponente. So lautet z.B. die symmetrische Lösung  $1_S$  (die ebenfalls aus einem  $3_S$  konstruierbar ist):

$$\begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{i(4n+2)(\varphi_1+\varphi_2)} \cosh((4n+2)t_l) \\ e^{i(4n+2)(\tau+\varphi_2)} \cosh((4n+2)s_l) \\ e^{i(4n+2)(\tau+\varphi_1)} \cosh((4n+2)c_l) \end{pmatrix} \quad (3.71)$$

5. Unter Berücksichtigung aller (64) Vorzeichenkombinationen im Vorfaktor  $V$  ergeben sich aus jeder der vorhergehenden 1-Darstellungen folgende Untermengen:  $1 + \bar{1} + 2 + 3 \cdot (3 + \bar{3}) + 2 \cdot (6 + \bar{6}) + 3 \cdot (6)$ . Mengen, die ohne ihr komplex Konjugiertes auftreten, zerfallen beim Übergang in reelle Funktionen in symmetrische und antisymmetrische Teile:  $2 = 1_S + 1_A$ .

# Kapitel 4

## Diskussion

### 4.1 Relevanz für das $U(2)$ -Programm

#### 4.1.1 Symmetrie

• Die Eigenschaft, daß die Maxwell-Gleichungen konform invariant sind, spielte im  $U(2)$ -Programm bisher eine untergeordnete Rolle. Man benötigte sie nur für die Unabhängigkeit von der Ausdehnung (Radius) der Mannigfaltigkeit. Durch die Darstellung der vollständigen  $SU(2, 2)$ -Symmetrie (mit den Operatoren nach Tabelle 2.2) ist es nun möglich, auf alle Symmetriepoperatoren zurückzugreifen. Dabei muß die Interpretation der Differentialoperatoren im  $U(2)$ -Programm eventuell neu formuliert werden, um den acht zusätzlichen Operatoren eine Bedeutung zuzuordnen. Hier scheint eine Bezugnahme auf die acht (im  $U(2)$ -Programm fehlenden) Gluonen vielversprechend zu sein. Ich vermute allerdings, daß es Mischungen zwischen den acht 'neuen' und den 'alten', der elektroschwachen Wechselwirkung zugeordneten Operatoren geben wird.

• Zu den nullstellenfreien Vektorfeldern von  $S^1 \times S^3$  (Abschnitt 2.1) gehören genau drei einfache Basisfelder: Neben dem trivialen Zeitvektor  $\underline{e}_t$  sind es die raumartigen Kombinationen  $(\underline{e}_{\varphi_1} + \underline{e}_{\varphi_2})$  und  $(\underline{e}_{\varphi_1} - \underline{e}_{\varphi_2})$ . Letztere sind der Richtung von  $S^1$  äquivalent, die bei der Hopfababbildung  $S^3 \rightarrow S^2$  als typische Faser entsteht. Die Hopfababbildung wird im  $U(2)$ -Programm zur Darstellung von magnetischen und elektrischen Radialfeldern im  $M^4$

herangezogen.<sup>1</sup> Es ist jedoch zu beachten, daß die Quantenzahlen, die mit den Heegaard–Tori verknüpft werden (welche auch zur Teilchencharakterisierung im  $U(2)$ –Programm benutzt werden:  $m_1$  und  $m_2$ ) und die charakteristischen Zahlen aus der Hopfababbildung ( $n_+ = m_1 + m_2$  und  $n_- = m_1 - m_2$ ) nicht identisch sind.

- Durch Vertauschung der  $S^1$ –Richtungen untereinander erhält man sechs verschiedene Kopien von  $S^1 \times S^3$ , die sich durch einen konformen Faktor unterscheiden, aber nicht durch infinitesimale Verschiebungen ineinander überführbar sind (Tabelle 2.3). Dies war bei der Entwicklung des  $U(2)$ –Programms nicht bekannt und spielt deswegen dort (noch) keine Rolle. In meinen Augen liegt hier jedoch ein Hinweis auf Teilchen – Antiteilchen – Dualität (mit der Parität  $\rho_0$  als Vermittler, die ohne konformen Faktor wirkt) und auf die Existenz von genau drei Generationen (mit der konformen Transformation  $\rho_1$ , die eine  $\mathbb{Z}_3$ –Struktur besitzt) vor. Der erste Punkt stellt nur eine kleine Änderung gegenüber dem  $U(2)$ –Programm dar (siehe Fußnote 5 auf Seite 19), der keine Auswirkungen auf andere Aussagen des  $U(2)$ –Programms hat. Der zweite Punkt steht jedoch im Widerspruch zu den Annahmen, die im  $U(2)$ –Programm bezüglich der Anzahl von Generationen getroffen wurden.

### 4.1.2 Differentialgleichungen

- Im  $U(2)$ –Programm hat das Klein–Gordon–Feld bisher keine Relevanz gehabt. Mit den Ergebnissen dieser Arbeit läßt sich dies zum Teil verstehen: Zum einen gibt es keine global definierte Lösung der freien Klein–Gordon–Gleichung (außer der trivialen), und die Differentialgleichung ist nicht konform invariant, d.h. die  $\rho$ –Transformationen wären nicht zulässig, und der Radius  $R$  der Mannigfaltigkeit wäre nicht frei wählbar, was im Widerspruch zum Punkt **U2** steht. Zum anderen würde die Einführung einer konform erweiterten Klein–Gordon–Gleichung über den Krümmungsskalar eine lokal meßbare Skala in das Programm einbringen, die zwar frei wählbar ist, die aber bei jeder Wahl direkt in das Feldverhalten einwirkt. Weiterhin transformiert die Lösung der Klein–Gordon–Gleichung nicht wie ein primäres Feld, was als Indiz dafür gesehen werden kann, daß kein elementares Teilchen vorliegt.

- Im  $U(2)$ –Programm erscheinen die Vakuumelemente  $z = \cos^2 \vartheta$  als quantenartige

---

<sup>1</sup>Siehe [9] und ergänzend [33].



Objekte. Es erscheint mir jedoch sinnvoller, wenn man stattdessen auf die  $D(1/2, 1/2)$ -Funktionen nach Gleichung (3.29) zurückgreifen würde, die ja über  $z = r\bar{r}$  mit den Vakuum-elementen verknüpft sind. Dies hat aber weitreichende Konsequenzen für die statistischen Aspekte der Theorie. So stellt z.B. das Polynom  $(r - \bar{r} + s + \bar{s})^\omega$  mit den Variablen  $r, \bar{r}, s, \bar{s}$  nach Gleichung (3.29), ein Erzeugendenpolynom für bestimmte hypergeometrische Funktionen, sogar für spezielle Eigenlösungen dar. Man erhält

$$(r - \bar{r} + s + \bar{s})^\omega = \sum_a \sum_b \sum_c \binom{\omega}{a, b, c, \omega - a - b - c} r^a (-\bar{r})^b s^c \bar{s}^{\omega - a - b - c} \quad (4.1)$$

$$= \sum_{m_1} \sum_{m_2} r^{m_1} s^{m_2} \sum_{\kappa} \binom{\omega}{\kappa + m_1, \kappa, \frac{\omega - m_1 + m_2}{2} - \kappa, \frac{\omega - m_1 - m_2}{2} - \kappa} (-r\bar{r})^\kappa (s\bar{s})^{\frac{\omega - m_1 - m_2}{2} - \kappa}, \quad (4.2)$$

wobei  $m_1$  die Differenz zwischen  $r$  und  $\bar{r}$  Potenzen und  $m_2$  die Differenz zwischen  $s$  und  $\bar{s}$  Potenzen zählt. Weil die Potenzsumme von  $r, \bar{r}, s$  und  $\bar{s}$   $\omega$  ergeben muß, ist die Zahl  $k := (\omega - m_1 - m_2)/2$  ganzzahlig und beschreibt die Summe der Potenzen von  $\bar{r}$  und  $\bar{s}$ .

$$\Rightarrow (r - \bar{r} + s + \bar{s})^\omega = \sum_{m_1} \sum_{m_2} r^{m_1} s^{m_2} \binom{\omega}{k} \sum_{\kappa} \binom{k}{\kappa} \binom{k + m_1 + m_2}{\kappa + m_1} (-r\bar{r})^\kappa (s\bar{s})^{k - \kappa} \quad (4.3)$$

Für  $m_2 = -1$  stimmt der letzte Teil der Gleichung exakt mit den  $y_{mk}$  Lösungen nach [14], Gleichung (25c), überein.

Viele Aspekte des  $U(2)$ -Programms, so z.B. die Berechnung der Feinstrukturkonstante  $\alpha$ , beruhen jedoch auf einer anderen Entwicklung der hypergeometrischen Funktion, die zu Produkten von Binomialkoeffizienten führt, welche der Fermi-Dirac- und der Bose-Einstein-Statistik zugeordnet werden können (Gleichung (D.8)). Ob mit der  $D(1/2, 1/2)$ -Darstellung äquivalente Beziehungen aufgestellt werden können, müssen weitergehende Rechnungen zeigen.

- Die Auswahl der ausgezeichneten Lösungen der Maxwell-Gleichungen war im  $U(2)$ -Programm ad hoc erfolgt und bedurfte einer genaueren Darstellung. Durch die Wahl der zweiten Eichung  $A_\vartheta \equiv 0$  werden alle Lösungen nur entlang der Tori  $(\tau, \varphi_1, \varphi_2)$  existieren, die eine fundamentale Rolle im  $U(2)$ -Programm spielen. Durch die Beschränkung auf die harmonischen 1-Formen werden genau vier Klassen von Lösungen ausgezeichnet. Dies sind die  $A_1$ - und  $A_2$ -Felder des Programms, die ad hoc eingeführt worden waren, des weiteren ein ähnlich aufgebautes  $A_0$ -Feld und die seltsam erscheinende Drittelösung. Letztere scheint die

Ergänzung des  $U(2)$ -Programms in Hinblick auf Farbladungen und drittelzahlige elektrische Ladungen von Quarks zu sein.

- Durch eine Klassifizierung der Lösungen konnten keine weiteren Erkenntnisse für das  $U(2)$ -Programm gewonnen werden, eventuell müssen hier noch andere Ansätze probiert werden. Die angegebenen Beispiele (Abschnitt 3.3) von Einteilungen der Lösungen in Klassen dienen nur dem weiteren Verständnis von Zusammenhängen. Falls den  $\rho$ -Transformationen konkrete Interpretationen zugeordnet werden, kann sich die Klassifizierung nach der zweiten Eichung als hilfreich erweisen.

## 4.2 Verbindung zu anderen Theorien

Im Verlaufe der Beschäftigung mit dem  $U(2)$ -Programm kommt man automatisch zu der Frage, auf welche Weise dieser Ansatz mit den bekannten Theorien oder mit dem Standardmodell der Elementarteilchen in Verbindung gebracht werden kann. Da aber das  $U(2)$ -Programm auf einen Lagrangean verzichtet, ist ein Vergleich in dieser Richtung nicht möglich. Andererseits spielen die Symmetrien beim  $U(2)$ -Programm eine so große Rolle, daß über sie eventuell ein Zugang zu anderen Modellen erreicht werden kann. Da nun die dargestellte konforme Gruppe sowohl im  $U(2)$ -Programm als auch bei konformen Feldtheorien im Minkowskiraum die Basis für die Raum-Zeit-Symmetrien ist, scheint hier eine vielversprechende Querverbindung vorzuliegen. Die konforme Gruppe steht seit dem 1909 erschienenen Artikel von Cunningham [6] als kovariante Gruppe der relativistischen Elektrodynamik im Blickpunkt vieler Untersuchungen. Dabei sind neben der geometrischen Bedeutung auch die zugehörigen Darstellungen zunehmend relevant geworden (siehe z.B. [2, 7, 1, 31]).

### 4.2.1 Motivation

Zu den Vorzügen, die eine konforme Feldtheorie im Minkowskiraum bietet, zählen z.B. die folgenden Punkte (siehe auch [18, §9.III;Tab. 9.5]):

1. höhere Symmetrie und einheitliche Darstellung von der Poincaré-Gruppe durch die Lie-Algebra von  $SO(4, 2) \sim su(2, 2)$ ,

2. man arbeitet mit der Symmetriegruppe der Maxwellgleichungen,
3. die Symmetrie der Streuung an einem  $1/r$ -Potential, z.B. das Kepler–Problem (siehe [1, ch. 12 §1 Ex. 4]) und das Wasserstoffatom (siehe [23, Abschn. 7.2]), ist eine höhere Symmetrie, als durch die Poincaré–Gruppe beschrieben wird, sie wird aber von der konformen Gruppe mit erfaßt und
4. es gibt sehr viele Untersuchungen aus den sechziger und siebziger Jahren über diese Thematik.

Der Nachteil einer konformen Feldtheorie liegt darin begründet, daß man aus der Invarianz unter Dilatation auf ein skaleninvariantes Verhalten schließt, welches aber in der Natur, allein schon wegen des Auftretens vieler verschiedener Massen, nicht vorhanden ist. — Dieser Schluß ist für einen Dirac–Spinor nur dann richtig, wenn dieser nur mit einem konformen Faktor transformiert. Nimmt man aber einen  $SU(2,2)$ -Spinor, genauer gesagt ein vierelementiges Objekt, das in der Spinordarstellung von  $SO(4,2)$  oder in der fundamentalen Darstellung der  $SU(2,2)$  liegt, dann koppelt die Dilatation mit  $\gamma^5$  an den Spinor an; dadurch werden wieder Massenterme möglich (s.u.).—

Aus dem Bereich der Kosmologie gibt es ebenfalls viele Ansätze, die auf eine konform invariante Theorie zurückgehen. In dem Buch *Mathematical Cosmology and Extragalactic Astronomy* von I. E. Segal [35] werden einige Aspekte, so zum Beispiel die Kausalität, sehr ausführlich behandelt. Im Hinblick auf Elementarteilchen beschränkt sich Segal jedoch nur auf den Ansatz: „. . . *but a corresponding treatment of very small distances (i.e., elementary particles) will require much further exploration.*“ [35, S. viii]

Segal geht von fünf Annahmen (*assumptions 1-5*) aus, die er ausführlich kommentiert. Sie lauten (sinngemäß)

**Annahme 1** : Die Raum-Zeit ist eine vier-dimensionale Mannigfaltigkeit.

**Annahme 2** : Die Raum-Zeit besitzt eine kausale Struktur.

**Annahme 3** : Die Raum-Zeit ermöglicht stationäre Zustände.

**Annahme 4** : Der Raum ist homogen und isotrop.

**Annahme 5** : Die Raum-Zeit kann lokal immer als direktes Produkt von Raum und Zeit dargestellt werden.

Nach einer Arbeit von Tits [37] existieren nun genau drei 4-dimensionale pseudoriemannsche Mannigfaltigkeiten mit der Signatur  $(1, 3)$ , die diesen Annahmen genügen. Es sind der Minkowski-Raum  $M^4$ , eine offene Untermannigfaltigkeit der doppelten Überlagerung von  $M^4 : S^1 \times S^3$  sowie die unendlichfache Überlagerung  $R^1 \times S^3$ .

Der von Segal eingeschlagene Weg führt zu einer konform-invarianten Theorie. Während bei der Betrachtung von kosmologischen Objekten, wie z.B. *schwarzen Löchern*, in vielen Theorien die konforme Invarianz eine Rolle spielt, erwartet man in bezug auf die Elementarteilchen, daß diese Symmetrie nicht auftritt. Im folgenden soll kurz dargelegt werden, womit diese Auffassung begründet wird und weshalb sie für die weiteren Abschnitte dieses Kapitels nicht zutreffend ist. Hierbei wird auf den flachen Minkowskiraum Bezug genommen, damit die Begriffe wie 'Impuls' oder 'spezielle konforme Transformationen' eindeutig sind.

#### 4.2.2 Klassisch: konforme = Skalen-Invarianz

Betrachten wir zuerst den Lagrangean eines massiven Dirac-Teilchens:

$$\mathcal{L} = \Psi^\dagger(\gamma^\mu \partial_\mu + m)\Psi. \quad (4.4)$$

Da unter einer Streckung (Dilatation) des Raumes der metrische Faktor  $\sqrt{-g}$  mit einem Faktor  $\lambda^4$  gestreckt wird, muß der Lagrangean dies mit einem  $\lambda^{-4}$ -Faktor wieder ausgleichen. Die Gammamatrix liefert über die Vierbein-Konstruktion einen Faktor  $\lambda^{-1}$ , daher muß der Spinor  $\Psi$  und sein adjungiertes zu dem fehlenden  $\lambda^{-3}$ -Faktor beitragen. Nun erwartet man, daß sich der Spinor unter Dilatationen wie ein quasiprimäres Teilchen verhält. Das heißt, das Transformationsverhalten bei einer Streckung entspricht der Multiplikation mit  $\lambda^{-d(\Psi)}$ , wobei  $d(\Psi)$  die Skalendimension des Spinors ist. Für einen Dirac-Spinor ergibt sich also eine Skalendimension von  $d(\Psi) = 3/2$  aus dem kinetischen Term. Daraus folgt aber, daß der Massenterm nur dann konform invariant ist, wenn auch die Masse  $m$  transformiert. Dann würde aber die Masse selbst keine invariante Größe mehr sein, was der Erfahrung widerspricht. Die Massen der an den Wechselwirkungen beteiligten Teilchen bestimmen die Skala bzw. die Reichweite der Wechselwirkung.

### 4.2.3 $SU(2, 2)$ : konforme $\neq$ Skalen-Invarianz

Betrachten wir wieder den Lagrangean eines massiven Dirac-Teilchens:

$$\mathcal{L} = \Psi^\dagger(\gamma^\mu \partial_\mu + m)\Psi \quad (\text{vorläufig}). \quad (4.5)$$

Nun soll der Spinor  $\Psi$  aber in der fundamentalen Darstellung der  $SU(2, 2)$  liegen, der Liegruppe der konformen Transformationen. Damit folgt der Faktor  $\gamma^0$  des adjungierten Spinors  $\Psi^\dagger = \Psi_a^* = \eta_{ab}\Psi^{b*} = \gamma^0\Psi^{b*}$  einfach aus der Lie-Gruppe. Weiterhin transformiert  $\Psi$  unter Dilatationen als Spinor mit  $\exp(-\epsilon/2\gamma^5) = \cosh(-\epsilon/2) + \sinh(-\epsilon/2)\gamma^5$ .

Unter allen  $SU(2, 2)$ -Transformationen bleibt  $\Psi^\dagger m\Psi$  invariant, wenn  $\Psi$  die konforme Skalendimension  $d(\Psi) = 2$  besitzt.

Eine Gamma-Matrix soll entsprechend ihrer Indexstruktur transformieren:

$$(\gamma^\mu)_a^b \rightarrow (\hat{\gamma}^\nu)_c^d = S_b^d(\gamma^\mu)_a^b(S^{-1})_c^a\Lambda_\mu^\nu \quad (4.6)$$

Dann erfüllen die transformierten Matrizen wieder die Relation

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}_a^b = g^{\mu\nu}\delta_a^b \rightarrow \{\hat{\gamma}^\mu, \hat{\gamma}^\nu\}_a^b = \hat{g}^{\mu\nu}\delta_a^b = g^{\rho\sigma}\Lambda_\rho^\mu\Lambda_\sigma^\nu \quad (4.7)$$

Betrachtet man wieder nur die Dilatationen, dann erhält man bereits mit dem vorläufigen Lagrangean erlaubte Massenterme:

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' = \Psi'^\dagger(\gamma'^\mu \partial_\mu + m)\Psi' \quad (4.8)$$

$$= \Psi'^\dagger \left( \cosh(\epsilon/2) - \sinh(\epsilon/2)\gamma^5 \right) (e^{-\epsilon}\gamma^\mu \partial_\mu + m) \left( \cosh(\epsilon/2) + \sinh(\epsilon/2)\gamma^5 \right) \Psi' \quad (4.9)$$

$$= \Psi'^\dagger m\Psi' + \Psi'^\dagger \gamma^\mu \partial_\mu \frac{1 - \gamma^5}{2} \Psi' + e^{2\epsilon} \Psi'^\dagger \gamma^\mu \partial_\mu \frac{1 + \gamma^5}{2} \Psi'. \quad (4.10)$$

Da die partielle Ableitung  $\partial_\mu$  wie die Komponenten  $k_\mu$  einer 1-Form ( $k_\mu dx^\mu$ ) transformiert und nicht wie die Komponenten  $p^\mu$  eines Vektors ( $p^\mu \underline{e}_\mu$ ), hat man das Problem, daß die Ersetzung des Impulsoperators  $P^\mu \rightarrow \partial_\mu$  nicht mehr gerechtfertigt ist. Man muß die Indexstruktur genauer berücksichtigen. Die bekannte Gleichung  $P^\mu P_\mu = P^2 = m^2$  ist in dieser Form nicht konform invariant, sie muß durch  $P^\mu k_\mu = m^2$  ersetzt werden, wobei der Impulsvektor  $P^\mu \underline{e}_\mu$  und der 'Wellenvektor'  $k_\mu dx^\mu$  invariante Größen sind.

Ein Lagrangean, der unter Dilatationen invariant bleibt, läßt sich mit obigen Ergebnissen nun formulieren. Mit einem invarianten Skalar  $m$ , einem invarianten Wellenvektor  $k_\mu$  (z.B.

$\partial_\mu$ ) und einem invarianten Vektor  $p^\mu$  (der auch eine Ableitung durch  $l^{\mu\nu}\partial_\nu$  enthalten kann, wenn  $l^{\mu\nu}$  invariant ist) erhält man:

$$\mathcal{L}_k = \Psi^\dagger \left( m + \gamma^\mu k_\mu \frac{1 - \gamma^5}{2} + \gamma_\mu p^\mu \frac{1 + \gamma^5}{2} \right) \Psi. \quad (4.11)$$

Da der Spinor das konforme Gewicht  $d(\Psi) = 2$  besitzt, erhält er bei den speziellen konformen Transformationen einen ortsabhängigen Vorfaktor. Nur bei dieser Transformation tritt als störender Term der Gradient des Vorfaktors auf, der durch ein Eichfeld aufgefangen werden kann. Die zugehörige Symmetrietransformation  $K_\mu$  koppelt, wie aus Gleichung (B.46) zu entnehmen ist, nur an die linkshändigen Teile des Spinors. Der Ansatz eines  $SU(2, 2)$ -Spinors führt demnach automatisch zu einer Chiralität; mehr noch, eine spezielle konforme Transformation im  $M^4$  wirkt genau wie die schwache Wechselwirkung nur auf linkshändige Spinoranteile. Hier scheint eine Möglichkeit zur Erklärung der chiralen Symmetriebrechung durch die schwache Wechselwirkung gegeben zu sein.

Führt man die biharmonischen Koordinaten im  $M^4$  ein (Abschnitt B.2), die ja durch die Cartan-Subalgebra der  $SU(2, 2)$ -Symmetrie ausgezeichnet sind, können alle konform invarianten Größen des  $U(2)$  direkt übernommen werden, die keinen Spinorindex tragen: insbesondere die Lösungen der konform erweiterten Klein-Gordon-Gleichung und die Lösungen der Maxwell-Gleichungen. Da zwischen  $S^1 \times S^3$  und  $M^4$  durch eine Weyl-Transformation vermittelt wird, benötigt man für Spinoren erst das korrekte Transformationsgesetz.<sup>2</sup>

Weiterhin sind die Vertauschungen durch die  $\rho$ -Transformationen genauso relevant, da sie direkt die Eigenzustände der Cartan-Subalgebra vertauschen. Dadurch erhält man genauso eine  $\mathbb{Z}_2$ -Struktur der Raumparität und eine  $\mathbb{Z}_3$ -Struktur durch  $\rho_1$ . Diese Struktur hängt eventuell sowohl mit den Generationen als auch mit der Farbladung zusammen. Hier können auch die zulässigen, diskreten 'Massen'  $\epsilon_0$  eine Rolle spielen, wie sie auf Seite 27 ermittelt wurden.

Interessanterweise wird die Raum-Zeit-Parität durch die doppelte Überlagerung von  $M^4$  durch  $S^1 \times S^3$  abgedeckt. Dies ist ein Effekt der Betragsstriche in den Gleichungen (B.47)-(B.50). Ohne diese Betragsstriche wäre die Abbildung nicht mehr stetig.

Die Lösungen der Maxwellgleichung werden als primäre Felder (ohne Vorfaktor) auf den

---

<sup>2</sup>Siehe auch S.13.

$M^4$  abgebildet. Dabei werden aus den Wellen in  $S^1 \times S^3$  Wellenpakete in  $M^4$ , die lokalisiert sind [34, 36].

Erweitert man die  $SU(2, 2)$  zur  $U(2, 2)$ , was ja ohne Probleme möglich ist, dann hat man eine überzählige  $U(1)$ -Symmetrie, die bei lokaler Formulierung der  $U(1)$  der elektroschwachen Theorie entspricht.

### 4.3 Zusammenfassung

In dieser Arbeit werden die Lösungen der quellenfreien Maxwellgleichungen in dem kompakten Raum  $S^1 \times S^3$  mit pseudoriemannscher Signatur ermittelt. Durch die Wahl biharmonischer Koordinaten werden durch einen Separationsansatz und Fourierentwicklung genau die Lösungen der Maxwellgleichung (und der ebenfalls untersuchten Klein-Gordon-Gleichung) gefunden, die zu den Erzeugenden der Cartan-Unteralgebra von  $SU(2, 2)$  Eigenlösungen sind. Dabei entspricht die Cartan-Unteralgebra topologisch einem (maximalen) Torus, der durch die  $S^1$ -Richtung und die zwei Heegaard-Tori der  $S^3$  aufgespannt wird.

Bei den Lösungen der quellenfreien Maxwell-Gleichungen existieren für jeden Satz von Eigenwerten  $\omega, m_1$  und  $m_2$  aus  $\mathbb{Z}$ , die die Quantenzahlen bezüglich der Cartan-Unteralgebra beschreiben, bis zu vier linear unabhängige Lösungen, von denen maximal zwei beschränkt sind. Die Komponenten der Lösungen lassen sich mit verwandten Riemannschen  $P$ -Funktionen darstellen. Die Lösung der Proca-Gleichungen wird durch die Kenntnis der allgemeinen Lösung der Maxwellgleichungen erhalten.

Durch die (zweite) Eichung werden die Lösungen der Maxwellgleichungen an die drei ausgezeichneten Tori gebunden, so daß keine normalen, d.h. senkrecht auf dem maximalen Torus stehenden Richtungen in den Vektorpotentialen (genauer: 1-Formen) vorhanden sind. Unter diesen Lösungen gibt es genau vier Klassen, die auf  $S^1 \times S^3$  harmonisch sind. Während drei von ihnen unendlich viele Lösungen enthalten, besitzt die vierte genau acht Lösungen.

Die Lösungen der Klein-Gordon-Gleichung sind für diese Parametrisierung bekannt. Sie können als Darstellung der räumlichen Symmetriegruppe  $SU(2) \times SU(2)$  herangezogen werden. In dieser Arbeit wird die Beschränktheit der Lösungen in Anwesenheit von Massen näher untersucht. Es ergibt sich ein diskretes Massenspektrum, daß auch von den jeweiligen

Gewichten, die durch den Laplace-Operator von  $S^3$  festgelegt werden, beeinflußt wird. Unter Berücksichtigung eines Krümmungsterms sind nur die ganzzahligen Werte erlaubt, die sich als Differenz zweier Quadratzahlen darstellen lassen; d.h. alle Werte  $\epsilon_0$  mit  $\epsilon_0 = 2 \pmod{4}$  sind verboten.

Es lassen sich metrisch-konforme Transformationen erzeugen, die die drei  $S^1$ -Tori des maximalen Torus gegeneinander vertauschen. Wegen der konformen Invarianz der Maxwellgleichungen stellen diese Transformationen, zusammen mit der Paritätsoperation, eine invariante Operation für die Lösungsmenge dar. Diese Transformationen bilden eine diskrete  $D_3$ -Gruppe (Dihedrale Gruppe), mit der sich die Lösungen als Darstellungen klassifizieren lassen.

Die Symmetrie des Raumes ermöglicht sieben Killingfelder, die zu einer fünfzehnelementigen konformen Symmetriegruppe  $SU(2, 2)$  erweitert werden können. Diese Arbeit führt mit der konformen Gruppe  $SU(2, 2)$  und ihrer  $D(1/2, 1/2)$ -Darstellung Ansatzpunkte ein, die interessante Erweiterungen des Programms ermöglichen können.

Durch die Ausnutzung der Symmetriegruppe  $SU(2, 2)$  läßt sich ferner ein Bezug zu konformen Feldtheorien herstellen, die auch Massenterme beinhalten dürfen, deren ursprüngliches Manko einer Skaleninvarianz also beseitigt ist.



# Anhang A

## Das $U(2)$ –Programm

Der Status des  $U(2)$ –Programms, wie er sich vor vier Jahren zu Beginn meiner Beschäftigung mit dem Ansatz vorlag, läßt sich anhand von acht Punkten darstellen (Zitat aus: [8, Stand des  $U(2)$ –Programms 1994]).

„**U1** Die Elektrodynamik beruht auf zwei Feststellungen: Es gibt Ladungen und es gibt Wellen. Eine Vereinfachung wird darin gesucht: Es gibt Wellen auf einem kompakten Raum; die Kompaktheit steht für die Ladungen.

**U2** Wellengleichungen induzieren eine Ausbreitungsgeschwindigkeit. Um die instantane spukhafte Fernwirkung des quantenmechanischen Experimentes zu modellieren, muß der kompakte Raum  $\infty$  groß sein.

**U3** Die neben der Gravitation einzig sicher bekannte weitreichende Wechselwirkung ist die elektromagnetische. Die zu dieser am besten passende kompakte Mannigfaltigkeit ist  $U(2) = S^3 \times S^1$  (4 Dimensionen als einfachste Realisierungsbasis transversaler Wellen, Möglichkeit einer zweiparametrischen Metrik mit Signatur (3+1), Möglichkeit singularitätsfreie Vektorfelder als Gruppenraum, globale Existenz von 1-Form-Potentialen wegen Trivialität der zweiten Cohomologiegruppe).

**U4** Der auch passende Gruppenraum  $S^1 \times S^1 \times S^1 \times S^1$  wird ausgeschlossen, um die Ladung mit einer nichttrivialen Topologie zu verbinden: den beiden sich durchdringenden

Heegaard Tori vom Geschlecht 1 auf  $S^3$ . Die biharmonischen Koordinaten auf  $S^3$  repräsentieren diese Tori explizit.

**U5** Einer Idee Schrödingers folgend werden die Teilchen mit den Eigenlösungen der elektromagnetischen Felder auf  $U(2)$  in biharmonischen Koordinaten verbunden. Die verschiedenartigen Ladungen sind Eigenwerte bezüglich der Toruskoordinaten auf  $U(2)$ .

**U6** Die Erzeugung punktförmiger Teilchen und der Parameter des Standardmodells wird dem quantenmechanischen Experiment (Meßprozeß) zugeschrieben. Vakuumlösungen mit sehr großen Eigenwerten seien instabil gegen eine große Zahl von „Vakuumelementen“. Diese erzeugen wegen der Kompaktheit einen selbstähnlichen Häufungspunkt, der mit den Teilchen identifiziert wird.

**U7** Die Teilchen realisieren sich zunächst in einem Minkowski-Raum  $M^4$ , der bilinear aus lokalen Tangentialelementen des  $U(2)$  über eine Äquivalenzklassenkonstruktion (den van der Waerden Spinoren) erzeugt wird. Die quantenmechanische Bewegung (Feynman Integrale) wird als Weyl-Verpflanzung der nunmehr „verborgenen“  $U(2)$  Tori aufgefaßt.

**U8** Die Möglichkeit einer solchen  $U(2) \rightarrow M^4$  Abbildung gestattet unmittelbar die Konstruktion des elektroschwachen Lagrangeans in  $M^4$  aus den Killingvektoren in  $U(2)$  mit dem verborgenen Massenoperator  $\frac{\partial}{\partial \vartheta}$ , wobei  $\vartheta$  die Polarkoordinate zwischen den Heegaard Tori ist. Es wird vermutet, daß die starke Wechselwirkung aus einer Äquivalenz der drei  $U(2)$  Tori  $(\tau, \varphi_1, \varphi_2)$  resultiert, die Gravitation aus einer Äquivalenz von vier  $\vartheta$  Quadranten zu einem vollen  $\vartheta$  Torus.

**Bemerkung** : Das  $U(2)$ -Programm ist der Versuch eines globalen Zugangs, der sowohl a priori als auch a posteriori Argumente verwendet. Als Ausgangspunkt wird nicht die Wirkung gesehen, repräsentiert durch die Plancksche Konstante  $\hbar$ , sondern die Ladung, repräsentiert durch die Elementarladung  $e$ .

# Anhang B

## Allgemeine Raum- und Symmetrieeigenschaften

### B.1 Generatoren der Lie-Algebra

#### B.1.1 Biharmonische Koordinaten

(Bereits in Tabelle 2.2 im Haupttext aufgeführt.) Die folgenden Operatoren bilden eine Basis für eine  $su(2,2)$ -Algebra. Sie bestehen aus zwei  $su(2)$  ( $K^a$  und  $K^b$ ) und vier  $su(1,1)$  ( $K^c$  bis  $K^f$ ) Unteralgebren. Von diesen insgesamt achtzehn Differentialoperatoren sind aber nur fünfzehn linear unabhängig: zwölf  $K^{\alpha\pm}$  und drei der  $K^\alpha$ . Letztere bilden die Cartan-Subalgebra der  $su(2,2)$ , die isomorph zur Liealgebra  $A_3$  ist und demnach drei *simple roots*,  $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} \sim \{\tau, \varphi_1, \varphi_2\}$  besitzt.

$$\begin{aligned}K^{a+} &= e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} \frac{1}{2} \left( \frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi_1} - \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi_2} + i \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) \\K^{a-} &= e^{-i(\varphi_1+\varphi_2)} \frac{1}{2} \left( \frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi_1} - \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi_2} - i \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) \\K^a &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial \varphi_1} + \frac{\partial}{\partial \varphi_2} \right) \\K^{b+} &= e^{i(\varphi_1-\varphi_2)} \frac{1}{2} \left( \frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi_1} + \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi_2} + i \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K^{b-} &= e^{-i(\varphi_1 - \varphi_2)} \frac{1}{2} \left( \frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi_1} + \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi_2} - i \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) \\
K^b &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial \varphi_2} - \frac{\partial}{\partial \varphi_1} \right) \\
K^{c+} &= e^{i(\tau + \varphi_2)} \frac{1}{2} \left( \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi_2} - i \cos \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) \\
K^{c-} &= e^{-i(\tau + \varphi_2)} \frac{1}{2} \left( \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi_2} + i \cos \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) \\
K^c &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \varphi_2} \right) \\
K^{d+} &= e^{i(\tau - \varphi_2)} \frac{1}{2} \left( \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi_2} - i \cos \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) \\
K^{d-} &= e^{-i(\tau - \varphi_2)} \frac{1}{2} \left( \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi_2} + i \cos \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) \\
K^d &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial \varphi_2} \right) \\
K^{e+} &= e^{i(\tau + \varphi_1)} \frac{1}{2} \left( \cos \vartheta \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{1}{\cos \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi_1} + i \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) \\
K^{e-} &= e^{-i(\tau + \varphi_1)} \frac{1}{2} \left( \cos \vartheta \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{1}{\cos \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi_1} - i \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) \\
K^e &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \varphi_1} \right) \\
K^{f+} &= e^{i(\tau - \varphi_1)} \frac{1}{2} \left( \cos \vartheta \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{1}{\cos \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi_1} + i \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) \\
K^{f-} &= e^{-i(\tau - \varphi_1)} \frac{1}{2} \left( \cos \vartheta \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{1}{\cos \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi_1} - i \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) \\
K^f &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial \varphi_1} \right)
\end{aligned}$$

Die Vertauschungsrelationen für gleichen Index  $\alpha$  sind:

$$(K^{\alpha-}) = (K^{\alpha+})^* \quad \text{und} \quad (K^\alpha) = (K^\alpha)^* \quad (\text{B.1})$$

$$[K^{\alpha+}, K^{\alpha-}] = 2iK^\alpha \quad \text{für} \quad \alpha \in \{a, b\} \quad (\text{B.2})$$

$$[K^{\alpha+}, K^{\alpha-}] = -2iK^\alpha \quad \text{für} \quad \alpha \in \{c, d, e, f\} \quad (\text{B.3})$$

$$[K^\alpha, K^{\alpha\pm}] = \pm iK^{\alpha\pm} \quad \text{für} \quad \alpha \in \{a, b, c, d, e, f\} \quad (\text{B.4})$$

Die allgemeinen Vertauschungsrelationen können am einfachsten durch die folgende Matrix  $K_m^n$  (bereits in Gleichung (2.49) angeführt) ausgedrückt werden:

$$K_m^n := i \begin{pmatrix} \partial_\Sigma - \frac{\partial}{\partial\varphi_2} & K^{b+} & iK^{d+} & iK^{e+} \\ K^{b-} & \partial_\Sigma - \frac{\partial}{\partial\varphi_1} & iK^{f+} & iK^{c+} \\ iK^{d-} & iK^{f-} & \partial_\Sigma - \frac{\partial}{\partial\tau} & K^{a+} \\ iK^{e-} & iK^{c-} & K^{a-} & -\partial_\Sigma \end{pmatrix}$$

mit  $\partial_\Sigma := \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial\varphi_1} + \frac{\partial}{\partial\varphi_2} + \frac{\partial}{\partial\tau} \right)$

$$[K_m^n, K_r^s] = i \cdot (\delta_r^n K_m^s - \delta_m^s K_r^n)$$

Die Anordnung innerhalb der Matrix wurde außerdem so gewählt, daß eine Identifizierung mit der Pauli-Dirac-Darstellung möglich sein wird. **Anti-Vertauschungsrelationen**

$$\{K^{a+}, K^{a-}\} := (K^{a+}K^{a-} + K^{a-}K^{a+}) \quad (\text{B.5})$$

$$\frac{1}{2} \{K^{a+}, K^{a-}\} + K^a K^a = -\Delta/4 = \frac{-1}{4} \square + \frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial\tau^2} \quad (\text{B.6})$$

$$= \frac{1}{2} \{K^{b+}, K^{b-}\} + K^b K^b \quad (\text{B.7})$$

$$-\frac{1}{2} \{K^{c+}, K^{c-}\} + K^c K^c = \frac{\cos^2 \vartheta}{4} \square + \frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial\varphi_1^2} + \frac{1}{2} \sin \vartheta \cos \vartheta \frac{\partial}{\partial\vartheta} \quad (\text{B.8})$$

$$= -\frac{1}{2} \{K^{d+}, K^{d-}\} + K^d K^d \quad (\text{B.9})$$

$$-\frac{1}{2} \{K^{e+}, K^{e-}\} + K^e K^e = \frac{\sin^2 \vartheta}{4} \square + \frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial\varphi_2^2} - \frac{1}{2} \sin \vartheta \cos \vartheta \frac{\partial}{\partial\vartheta} \quad (\text{B.10})$$

$$= -\frac{1}{2} \{K^{f+}, K^{f-}\} + K^f K^f \quad (\text{B.11})$$

$$\{K^{a+}, K^{a-}\} + \{K^{b+}, K^{b-}\} = -\square + \frac{\partial^2}{\partial\tau^2} - \frac{\partial^2}{\partial\varphi_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial\varphi_2^2} \quad (\text{B.12})$$

$$-\{K^{c+}, K^{c-}\} - \{K^{d+}, K^{d-}\} = \cos^2 \vartheta \square + \frac{\partial^2}{\partial\varphi_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial\varphi_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial\tau^2} + 2 \sin \vartheta \cos \vartheta \frac{\partial}{\partial\vartheta} \quad (\text{B.13})$$

$$-\{K^{e+}, K^{e-}\} - \{K^{f+}, K^{f-}\} = \sin^2 \vartheta \square + \frac{\partial^2}{\partial\varphi_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial\varphi_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial\tau^2} - 2 \sin \vartheta \cos \vartheta \frac{\partial}{\partial\vartheta} \quad (\text{B.14})$$

$$\{K_m^n, K_n^m\} = 0 \quad (\text{B.15})$$

Eine reelle Darstellung der Algebra führt zu den Erzeugenden von  $so(4, 2)$ . Sie sind

äquivalent der Aufspaltung der komplexen Erzeugenden in Imaginär- und Realteil.

$$\begin{aligned}
X^1 &= \frac{\partial}{\partial \tau} \quad , \quad X^2 = \frac{\partial}{\partial \varphi_1} \quad , \quad X^3 = \frac{\partial}{\partial \varphi_2} \\
X^4 &= \frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta} \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \frac{\partial}{\partial \varphi_1} - \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \frac{\partial}{\partial \varphi_2} + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \frac{\partial}{\partial \vartheta} \\
X^5 &= \frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta} \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \frac{\partial}{\partial \varphi_1} + \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \frac{\partial}{\partial \varphi_2} + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \frac{\partial}{\partial \vartheta} \\
X^6 &= -\frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta} \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \frac{\partial}{\partial \varphi_1} - \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \frac{\partial}{\partial \varphi_2} + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \frac{\partial}{\partial \vartheta} \\
X^7 &= -\frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta} \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \frac{\partial}{\partial \varphi_1} + \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \frac{\partial}{\partial \varphi_2} + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \frac{\partial}{\partial \vartheta} \\
X^8 &= \frac{1}{\cos \vartheta} \cos \varphi_1 \sin \tau \frac{\partial}{\partial \varphi_1} + \cos \vartheta \sin \varphi_1 \cos \tau \frac{\partial}{\partial \tau} - \sin \vartheta \sin \varphi_1 \sin \tau \frac{\partial}{\partial \vartheta} \\
X^9 &= \frac{-1}{\cos \vartheta} \sin \varphi_1 \sin \tau \frac{\partial}{\partial \varphi_1} + \cos \vartheta \cos \varphi_1 \cos \tau \frac{\partial}{\partial \tau} - \sin \vartheta \cos \varphi_1 \sin \tau \frac{\partial}{\partial \vartheta} \\
X^{10} &= \frac{1}{\cos \vartheta} \sin \varphi_1 \cos \tau \frac{\partial}{\partial \varphi_1} + \cos \vartheta \cos \varphi_1 \sin \tau \frac{\partial}{\partial \tau} + \sin \vartheta \cos \varphi_1 \cos \tau \frac{\partial}{\partial \vartheta} \\
X^{11} &= \frac{-1}{\cos \vartheta} \cos \varphi_1 \cos \tau \frac{\partial}{\partial \varphi_1} + \cos \vartheta \sin \varphi_1 \sin \tau \frac{\partial}{\partial \tau} + \sin \vartheta \sin \varphi_1 \cos \tau \frac{\partial}{\partial \vartheta} \\
X^{12} &= \frac{1}{\sin \vartheta} \cos \varphi_2 \sin \tau \frac{\partial}{\partial \varphi_2} + \sin \vartheta \sin \varphi_2 \cos \tau \frac{\partial}{\partial \tau} + \cos \vartheta \sin \varphi_2 \sin \tau \frac{\partial}{\partial \vartheta} \\
X^{13} &= \frac{-1}{\sin \vartheta} \sin \varphi_2 \sin \tau \frac{\partial}{\partial \varphi_2} + \sin \vartheta \cos \varphi_2 \cos \tau \frac{\partial}{\partial \tau} + \cos \vartheta \cos \varphi_2 \sin \tau \frac{\partial}{\partial \vartheta} \\
X^{14} &= \frac{1}{\sin \vartheta} \sin \varphi_2 \cos \tau \frac{\partial}{\partial \varphi_2} + \sin \vartheta \cos \varphi_2 \sin \tau \frac{\partial}{\partial \tau} - \cos \vartheta \cos \varphi_2 \cos \tau \frac{\partial}{\partial \vartheta} \\
X^{15} &= \frac{-1}{\sin \vartheta} \cos \varphi_2 \cos \tau \frac{\partial}{\partial \varphi_2} + \sin \vartheta \sin \varphi_2 \sin \tau \frac{\partial}{\partial \tau} - \cos \vartheta \sin \varphi_2 \cos \tau \frac{\partial}{\partial \vartheta}
\end{aligned} \tag{B.16}$$

Die ersten sieben bilden die Killingfelder von  $S^1 \times S^3$ . Ihre Vertauschungsrelationen lauten:

$$\begin{aligned}
[X^2, X^3] &= 0 \quad , \quad [X^2, X^4] = -X^6, \quad [X^2, X^5] = -X^7, \quad [X^2, X^6] = X^4, \\
[X^2, X^6] &= X^5, \quad [X^3, X^4] = -X^5, \quad [X^3, X^5] = X^4 \quad , \quad [X^3, X^6] = -X^7, \\
[X^3, X^7] &= X^6, \quad [X^4, X^5] = -X^3, \quad [X^4, X^6] = -X^2, \quad [X^4, X^7] = 0, \\
[X^5, X^6] &= 0 \quad , \quad [X^5, X^7] = -X^2, \quad [X^6, X^7] = -X^3,
\end{aligned} \tag{B.17}$$

Im  $U(2)$ -Programm wird mit  $L$ - und  $R$ -Feldern gearbeitet. Sie lassen sich aus den  $X$ -Feldern durch die Kombinationen

$$\begin{aligned}
L_1 &= X^5 + X^6 \quad , \quad L_2 = X^4 - X^7 \quad , \quad L_3 = -X^2 - X^3 \quad , \quad L_4 = X^1 \\
R_1 &= X^5 - X^6 \quad , \quad R_2 = X^4 + X^7 \quad , \quad R_3 = X^2 - X^3 \quad , \quad R_4 = X^1
\end{aligned} \tag{B.18}$$

gewinnen. Sie lauten im Einzelnen

$$\phi := \varphi_1 + \varphi_2 \quad , \quad \psi := \varphi_1 - \varphi_2 \tag{B.19}$$

$$L_1 = -\frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta} \cos \phi \frac{\partial}{\partial \varphi_1} + \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} \cos \phi \frac{\partial}{\partial \varphi_2} + \sin \phi \frac{\partial}{\partial \vartheta} \quad (\text{B.20})$$

$$L_2 = \frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta} \sin \phi \frac{\partial}{\partial \varphi_1} - \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} \sin \phi \frac{\partial}{\partial \varphi_2} + \cos \phi \frac{\partial}{\partial \vartheta} \quad (\text{B.21})$$

$$L_3 = -\frac{\partial}{\partial \varphi_1} - \frac{\partial}{\partial \varphi_2} \quad (\text{B.22})$$

$$R_1 = \frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta} \cos \psi \frac{\partial}{\partial \varphi_1} + \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} \cos \psi \frac{\partial}{\partial \varphi_2} - \sin \psi \frac{\partial}{\partial \vartheta} \quad (\text{B.23})$$

$$R_2 = \frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta} \sin \psi \frac{\partial}{\partial \varphi_1} + \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} \sin \psi \frac{\partial}{\partial \varphi_2} + \cos \psi \frac{\partial}{\partial \vartheta} \quad (\text{B.24})$$

$$R_3 = \frac{\partial}{\partial \varphi_1} - \frac{\partial}{\partial \varphi_2} \quad (\text{B.25})$$

### Vertauschungen

$$[L_i, L_j] = -2\epsilon^{ijk} L_k, \quad [L_i, R_j] = 0, \quad [R_i, R_j] = -2\epsilon^{ijk} R_k \quad \text{mit} \quad \epsilon^{123} = 1 \quad (\text{B.26})$$

### Verknüpfungen

$$L_1^2 + L_2^2 = \frac{\sin^2 \vartheta}{\cos^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi_1^2} + \frac{\cos^2 \vartheta}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi_2^2} + \frac{1}{\sin \vartheta \cos \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \cos \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} - 2 \frac{\partial}{\partial \varphi_1} \frac{\partial}{\partial \varphi_2} \quad (\text{B.27})$$

$$L_3^2 = \frac{\partial^2}{\partial \varphi_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi_2^2} + 2 \frac{\partial}{\partial \varphi_1} \frac{\partial}{\partial \varphi_2} \quad (\text{B.28})$$

$$\hat{L}^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 = \frac{1}{\cos^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi_1^2} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi_2^2} + \frac{1}{\sin \vartheta \cos \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \cos \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} = \Delta \quad (\text{B.29})$$

$$R_1^2 + R_2^2 = \frac{\sin^2 \vartheta}{\cos^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi_1^2} + \frac{\cos^2 \vartheta}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi_2^2} + \frac{1}{\sin \vartheta \cos \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \cos \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} + 2 \frac{\partial}{\partial \varphi_1} \frac{\partial}{\partial \varphi_2} \quad (\text{B.30})$$

$$R_3^2 = \frac{\partial^2}{\partial \varphi_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi_2^2} - 2 \frac{\partial}{\partial \varphi_1} \frac{\partial}{\partial \varphi_2} \quad (\text{B.31})$$

$$\hat{R}^2 = R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 = \frac{1}{\cos^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi_1^2} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi_2^2} + \frac{1}{\sin \vartheta \cos \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \cos \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} = \Delta \quad (\text{B.32})$$

## B.1.2 Reelle Erzeugende für $so(4, 2)$ im Minkowskiraum

Die konforme Gruppe wird im Minkowskiraum von den Translationen  $P_\mu$ , den Lorentztransformationen  $M_{\mu\nu}$ , der Dilatation  $D$  und den speziellen konformen Transformationen  $K_\mu$  erzeugt. Sie lassen sich als Differentialoperatoren formulieren:

$$\tilde{P}_\mu = \partial_\mu \quad (\text{B.33})$$

$$\tilde{M}_{\mu\nu} = x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu \quad (\text{B.34})$$

$$\tilde{D} = x^\mu \partial_\mu \quad (\text{B.35})$$

$$\tilde{K}_\mu = 2x_\mu x^\nu \partial_\nu - x^2 \partial_\mu. \quad (\text{B.36})$$

Ihre Vertauschungsrelationen sind:

$$[P_\mu, P_\nu] = 0 \quad (\text{B.37})$$

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = -(g_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} + g_{\nu\sigma}M_{\mu\rho} - g_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} - g_{\mu\sigma}M_{\nu\rho}) \quad (\text{B.38})$$

$$[M_{\mu\nu}, P_\sigma] = g_{\nu\sigma}P_\mu - g_{\mu\sigma}P_\nu \quad (\text{B.39})$$

$$[P_\mu, D] = P_\mu \quad (\text{B.40})$$

$$[M_{\mu\nu}, D] = 0 \quad (\text{B.41})$$

$$[P_\mu, K_\nu] = 2(g_{\mu\nu}D - M_{\mu\nu}) \quad (\text{B.42})$$

$$[M_{\mu\nu}, K_\sigma] = g_{\nu\sigma}K_\mu - g_{\mu\sigma}K_\nu \quad (\text{B.43})$$

$$[K_\mu, D] = -K_\mu \quad (\text{B.44})$$

$$[K_\mu, K_\nu] = 0 \quad (\text{B.45})$$

Die Generatoren lassen sich auch als  $4 \times 4$ -Matrizen als Erzeugende der  $su(2, 2)$ -Algebra schreiben. Dabei kann man auf die Gamma-Matrizen  $\gamma^\mu$  zurückgreifen ([1]).

$$\left. \begin{aligned} \tilde{P}_\mu &= -\frac{1}{2}\gamma_\mu(1 - \gamma_5) \\ \tilde{M}_{\mu\nu} &= \frac{1}{4}[\gamma_\mu, \gamma_\nu] \\ \tilde{D} &= -\frac{1}{2}\gamma_5 \\ \tilde{K}_\mu &= \frac{1}{2}\gamma_\mu(1 + \gamma_5) \end{aligned} \right\} \quad (\text{B.46})$$

## B.2 Vollständige Transformation

Mit einer Koordinatentransformation im Minkowskiraum

$$x = \frac{\cos \vartheta \cos \varphi_1}{|\cos \tau + \sin \vartheta \sin \varphi_2|}, \quad (\text{B.47})$$

$$y = \frac{\cos \vartheta \sin \varphi_1}{|\cos \tau + \sin \vartheta \sin \varphi_2|}, \quad (\text{B.48})$$

$$z = \frac{\sin \vartheta \cos \varphi_2}{|\cos \tau + \sin \vartheta \sin \varphi_2|}, \quad (\text{B.49})$$

$$t = \frac{\sin \tau}{|\cos \tau + \sin \vartheta \sin \varphi_2|}, \quad (\text{B.50})$$

$$ds^2 = \frac{1}{(\cos \tau + \sin \vartheta \sin \varphi_2)^2} (d\tau^2 - \cos^2 \vartheta d\varphi_1^2 - \sin^2 \vartheta d\varphi_2^2 - d\vartheta^2), \quad (\text{B.51})$$



die im folgenden 'vollständige Transformation' genannt wird, nimmt die Metrik des flachen  $M^4$  eine zu der Metrik von  $S^1 \times S^3$  konform äquivalente Gestalt an. **Dieser Transformation bzw. der hier dargestellten Abbildung auf  $M^4$  wird im  $U(2)$ -Programm keine physikalische Bedeutung beigemessen.** Man kann sie aber heranziehen, um bekannte Ergebnisse des  $M^4$  auf den Raum  $S^1 \times S^3$  zu übertragen. Mit ihr lassen sich z.B. die konformen Generatoren des Minkowskiraumes  $(P_\mu, M_{\mu\nu}, D, K_\mu)$  auch durch die  $X$ -Felder (Gleichung B.16) darstellen. Weiterhin spielt sie bei der Betrachtung konformer Theorien in Abschnitt 4.2 eine wichtige Rolle.

$$\left. \begin{aligned}
 M_{yx} &:= y\partial_x - x\partial_y = X^2 & M_{tx} &:= t\partial_x - x\partial_t = X^9 \\
 M_{zy} &:= z\partial_y - y\partial_z = X^6 & M_{ty} &:= t\partial_y - y\partial_t = X^8 \\
 M_{xz} &:= x\partial_z - z\partial_x = -X^4 & M_{tz} &:= t\partial_z - z\partial_t = X^{13} \\
 P_x &:= \partial_x = X^5 + X^{10} & K_x &= 2x D - r^2 P_x = -X^5 + X^{10}, \\
 P_y &:= \partial_y = X^7 + X^{11} & K_y &= 2y D - r^2 P_y = -X^7 + X^{11} \\
 P_z &:= \partial_z = X^3 + X^{14} & K_z &= 2z D - r^2 P_z = -X^3 + X^{14} \\
 P_t &:= \partial_t = X^1 + X^{12} & K_t &= 2t D - r^2 P_t = X^1 - X^{12} \\
 D &= x^\mu \partial_\mu = X^{15}
 \end{aligned} \right\} \text{(B.52)}$$

Unter Benutzung der Paulischen  $\sigma$ -Matrizen und den  $\gamma$ -Matrizen in Pauli-Dirac-Darstellung (mit  $m = 1, 2, 3$ )

$$\sigma_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{1} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(B.53)}$$

$$\gamma^0 := i \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}, \quad \gamma^m := i \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_m \\ \sigma_m & 0 \end{pmatrix} \quad \text{(B.54)}$$

$$S^{\mu\nu} := \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu], \quad \gamma^5 := i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3, \quad \text{(B.55)}$$

sowie den Generatoren der konformen Gruppe für  $su(2, 2)$ -Vektoren nach Gleichung B.46 läßt sich die Matrix (2.49) rekonstruieren. Eine Transformation  $X$  mit z.B.  $X = \alpha^{31} M_{31}$  läßt sich umformen in  $X = \alpha^{31} M_{31} = \alpha^{31} X^4 = \alpha^{31} \frac{-i}{2} (K^{a+} - K^{a-} + K^{b+} - K^{b-})$ . Setzt

man nun die Vorfaktoren vor den  $K^{i\pm}$  in der Matrix (2.49) an den zugehörigen Stellen ein, dann liegt die entsprechende Matrix  $\frac{\alpha}{2}S_{31}$  vor.

Den Generatoren können infinitesimale

$$\left. \begin{aligned} a^\mu P_\mu & : x^\mu \rightarrow x^\mu + a^\mu \\ a^{\mu\nu} M_{\mu\nu} & : x^\mu \rightarrow x^\mu + a^{\mu\nu} x_\nu \\ a^\mu K_\mu & : x^\mu \rightarrow x^\mu + 2x^\mu a^\nu x_\nu - a^\mu x^\nu x_\nu \\ a D & : x^\mu \rightarrow x^\mu + a x^\mu \end{aligned} \right\} \quad (\text{B.56})$$

und global definierte Transformationen zugeordnet werden:

$$\left. \begin{aligned} a^\mu P_\mu & : x^\mu \rightarrow x^\mu + a^\mu \\ a^{\mu\nu} M_{\mu\nu} & : x^\mu \rightarrow \cos_h(a^{\mu\nu})x^\mu + \sin_h(a^{\mu\nu})x^\nu \\ a^\mu K_\mu & : x^\mu \rightarrow \frac{x^\mu - a^\mu x^\nu x_\nu}{1 - 2a^\nu x_\nu + a^\nu a_\nu x^\rho x_\rho} \\ a D & : x^\mu \rightarrow e^a x^\mu \end{aligned} \right\} \quad (\text{B.57})$$

Beachte:  $\cos_h \equiv \cos$  für rein räumliche und  $\cos_h \equiv \cosh$  für Raum-Zeit-Drehungen.

Die globalen Versionen lassen sich (im Minkowskiraum leicht) aus der Beziehung

$$x^\mu \rightarrow \exp(\alpha X^\alpha) x^\mu \quad (\text{B.58})$$

$$\text{z.B. } x^\mu \rightarrow \exp(\alpha^\sigma \partial_\sigma) x^\mu = (1 + \alpha^\sigma \partial_\sigma + \alpha^\sigma \partial_\sigma \alpha^\sigma \partial_\sigma / 2 + \dots) x^\mu = x^\mu + \alpha^\mu \quad (\text{B.59})$$

ableiten.

Die Umkehrtransformationen lautet:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 & = \arctan \frac{y}{x} \\ \varphi_2 & = \arctan \frac{1 - r^2 + t^2}{2z} \\ \vartheta & = \arccos \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{1 + 2(r^2 + t^2) + (r^2 - t^2)^2}} \\ \tau & = \arctan \frac{2t}{1 + r^2 - t^2} \end{aligned} \right\} \quad (\text{B.60})$$

Zwischen den Koordinatendifferentialen besteht die Verbindung:

$$\begin{aligned}
 dx &= \frac{-\cos \vartheta \sin \varphi_1}{\cos \tau + \sin \vartheta \sin \varphi_2} d\varphi_1 - \frac{\sin \vartheta \cos \vartheta \cos \varphi_1 \cos \varphi_2}{(\cos \tau + \sin \vartheta \sin \varphi_2)^2} d\varphi_2 \\
 &\quad - \frac{\cos \varphi_1 (\sin \vartheta \cos \tau + \sin \varphi_2)}{(\cos \tau + \sin \vartheta \sin \varphi_2)^2} d\vartheta + \frac{\cos \vartheta \cos \varphi_1 \sin \tau}{(\cos \tau + \sin \vartheta \sin \varphi_2)^2} d\tau \\
 dy &= \frac{\cos \vartheta \cos \varphi_1}{\cos \tau + \sin \vartheta \sin \varphi_2} d\varphi_1 - \frac{\sin \vartheta \cos \vartheta \sin \varphi_1 \cos \varphi_2}{(\cos \tau + \sin \vartheta \sin \varphi_2)^2} d\varphi_2 \\
 &\quad - \frac{\sin \varphi_1 (\sin \vartheta \cos \tau + \sin \varphi_2)}{(\cos \tau + \sin \vartheta \sin \varphi_2)^2} d\vartheta + \frac{\cos \vartheta \sin \varphi_1 \sin \tau}{(\cos \tau + \sin \vartheta \sin \varphi_2)^2} d\tau \\
 dz &= \frac{-\sin \vartheta (\sin \vartheta + \sin \varphi_2 \cos \tau)}{(\cos \tau + \sin \vartheta \sin \varphi_2)^2} d\varphi_2 + \frac{\cos \vartheta \cos \varphi_2 \cos \tau}{(\cos \tau + \sin \vartheta \sin \varphi_2)^2} d\vartheta \\
 &\quad + \frac{\sin \vartheta \cos \varphi_2 \sin \tau}{(\cos \tau + \sin \vartheta \sin \varphi_2)^2} d\tau \\
 dt &= \frac{-\sin \vartheta \cos \varphi_2 \sin \tau}{(\cos \tau + \sin \vartheta \sin \varphi_2)^2} d\varphi_2 + \frac{-\cos \vartheta \sin \varphi_2 \sin \tau}{(\cos \tau + \sin \vartheta \sin \varphi_2)^2} d\vartheta \\
 &\quad + \frac{1 + \sin \vartheta \sin \varphi_2 \cos \tau}{(\cos \tau + \sin \vartheta \sin \varphi_2)^2} d\tau.
 \end{aligned} \tag{B.61}$$

Für die vollständige Transformation gelten die Beziehungen:

$$4/(\cos \tau + \sin \vartheta \sin \varphi_2)^2 = 1 + 2(r^2 + t^2) + (r^2 - t^2)^2 \tag{B.62}$$

$$= (1 + (r + t)^2)(1 + (r - t)^2) =: r_t^4 \tag{B.63}$$

$$\cos \vartheta = \frac{2\sqrt{x^2 + y^2}}{r_t^2} \tag{B.64}$$

$$\frac{\cos \tau + \sin \vartheta \sin \varphi_2}{\cos \tau} = \frac{2}{1 + r^2 - t^2} \quad \text{mit} \tag{B.65}$$

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2. \tag{B.66}$$

Die Basisvektoren von  $S^1 \times S^3$  lassen sich im  $M^4$  (mit der Basis  $(t, x, y, z)$ ) folgendermaßen darstellen:

$$A_0 \underline{e}^\tau = A_0 \begin{pmatrix} 1 + \sin \vartheta \sin \varphi_2 \cos \tau \\ \cos \vartheta \cos \varphi_1 \sin \tau \\ \cos \vartheta \sin \varphi_1 \sin \tau \\ \sin \vartheta \cos \varphi_2 \sin \tau \end{pmatrix} \tag{B.67}$$

$$= A_0 \frac{(\cos \tau + \sin \vartheta \sin \varphi_2)^2}{2} \begin{pmatrix} 1 + t^2 + r^2 \\ 2 x \cdot t \\ 2 y \cdot t \\ 2 z \cdot t \end{pmatrix} = A_0 \frac{2}{r_t^4} \begin{pmatrix} 1 + t^2 + r^2 \\ 2 x \cdot t \\ 2 y \cdot t \\ 2 z \cdot t \end{pmatrix} \quad (\text{B.68})$$

$$A_1 \underline{e}^{\varphi_1} = \frac{A_1}{\cos \vartheta / (\cos \tau + \sin \vartheta \sin \varphi_2)} \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin \varphi_1 \\ \cos \varphi_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.69})$$

$$= \frac{A_1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} 0 \\ -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{A_1}{\cos^2 \vartheta} \frac{4}{r_t^4} \begin{pmatrix} 0 \\ -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.70})$$

$$A_2 \underline{e}^{\varphi_2} = \frac{A_2}{\sin \vartheta} \begin{pmatrix} \cos \varphi_2 \sin \tau \\ \cos \vartheta \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \\ \cos \vartheta \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \\ \sin \vartheta + \sin \varphi_2 \cos \tau \end{pmatrix} \quad (\text{B.71})$$

$$= \frac{A_2}{\sin^2 \vartheta} \frac{(\cos \tau + \sin \vartheta \sin \varphi_2)^2}{2} \begin{pmatrix} 2 t \cdot z \\ 2 x \cdot z \\ 2 y \cdot z \\ 2 z^2 + 1 - r^2 + t^2 \end{pmatrix} \quad (\text{B.72})$$

$$= \frac{A_2}{\sin^2 \vartheta} \frac{2}{r_t^4} \begin{pmatrix} 2 t \cdot z \\ 2 x \cdot z \\ 2 y \cdot z \\ 2 z^2 + 1 - r^2 + t^2 \end{pmatrix} \quad (\text{B.73})$$

$$A_3 \underline{e}^{\vartheta} = A_3 \begin{pmatrix} \cos \vartheta \sin \varphi_2 \sin \tau \\ \cos \varphi_1 (\sin \vartheta \cos \tau + \sin \varphi_2) \\ \sin \varphi_1 (\sin \vartheta \cos \tau + \sin \varphi_2) \\ \cos \vartheta \cos \varphi_2 \cos \tau \end{pmatrix} \quad (\text{B.74})$$

$$= \frac{A_3}{\sin \vartheta \cos \vartheta} \frac{(\cos \tau + \sin \vartheta \sin \varphi_2)^5}{4} \begin{pmatrix} t(x^2 + y^2)(1 + t^2 - r^2) \\ x(r_t^2 - 2(x^2 + y^2)(1 + r^2 - t^2)) \\ y(r_t^2 - 2(x^2 + y^2)(1 + r^2 - t^2)) \\ z(x^2 + y^2)(1 + r^2 - t^2) \end{pmatrix} \quad (\text{B.75})$$

$$= \frac{A_3}{\sin \vartheta} \frac{2}{r_t^4} \begin{pmatrix} t \cos \vartheta (1 + t^2 - r^2) \\ x/\sqrt{x^2 + y^2} - 2x \cos \vartheta (1 - t^2 + r^2) \\ y/\sqrt{x^2 + y^2} - 2y \cos \vartheta (1 - t^2 + r^2) \\ z \cos \vartheta (1 - t^2 + r^2) \end{pmatrix} \quad (\text{B.76})$$

Bei der vollständigen Transformation überlagert  $S^1 \times S^3$  den  $M^4$  **doppelt**. Die Punkte  $(\tau, \varphi_1, \varphi_2, \vartheta)$  und  $(\tau + \pi, \varphi_1 + \pi, \varphi_2 + \pi, \vartheta)$  werden auf denselben Punkt  $(t, x, y, z)$  abgebildet.

Die  $z$ -Achse ( $x = y = 0$ ) liegt immer bei  $(\vartheta = \pi/2)$ .

Für  $\tau = 0$  liegt der Ursprung bei  $(\varphi_2 = \pi/2)$  und der  $\infty$ -Punkt bei  $(\varphi_2 = 3\pi/2)$ . (Und  $t = 0$  gilt überall.)

Für  $\tau = \pi$  liegt der Ursprung bei  $(\varphi_2 = 3\pi/2)$  und der  $\infty$ -Punkt bei  $(\varphi_2 = \pi/2)$ . (Und  $t = 0$  gilt überall.)

Für alle sonstigen Fälle ( $\tau \neq 0$  und  $\tau \neq \pi$ ) werden jedem Raumpunkt ( $R^3$ ) bei der Abbildung zwei  $t$ -Punkte zugeordnet: Der Ursprung liegt bei  $(\varphi_2 = \pi/2)$  mit  $(t = \sin(\tau)/(\cos(\tau) + 1))$  und bei  $(\varphi_2 = 3\pi/2)$  mit  $(t = \sin(\tau)/(\cos(\tau) - 1))$ . Der  $\infty$ -Punkt der  $z$ -Ebene liegt bei  $(\varphi_2 = \tau - \pi/2)$  und bei  $(\varphi_2 = 3\pi/2 - \tau)$ .

Wenn  $A_\mu$  in  $S^1 \times S^3$  eine Lösung mit dem Betrag  $A_\mu A^\mu$  bildet, ist eine Lösung in  $M^4$  durch die vollständige Transformation gegeben:  $B_\mu = A_\mu$  und  $B_\mu B^\mu = \lambda^{-2} A_\mu A^\mu$  da  $g_B^{\mu\nu} = \lambda^{-2} g_A^{\mu\nu}$  gilt.

Transf.	$(x^0)$	$(x^1)$	$(x^2)$	$(x^3)$	$x^\mu x_\mu$
Id.	$t$	$x$	$y$	$z$	$t^2 - r^2$
$\hat{\rho}_0$	$\frac{2t}{1+r^2-t^2+2x}$	$\frac{1+t^2-r^2}{1+r^2-t^2+2x}$	$\frac{2z}{1+r^2-t^2+2x}$	$\frac{2y}{1+r^2-t^2+2x}$	$\frac{1+r^2-t^2-2x}{1+r^2-t^2+2x}$
$\hat{\rho}_1$	$\frac{x}{t+y}$	$\frac{i}{2} \frac{1+t^2-r^2}{t+y}$	$i \frac{z}{t+y}$	$\frac{1}{2} \frac{1-t^2+r^2}{t+y}$	$\frac{t-y}{t+y}$
$\hat{\rho}_2$	$\frac{-2ix}{1-r^2+t^2-2iy}$	$\frac{-2it}{1-r^2+t^2-2iy}$	$-i \frac{1+r^2-t^2}{1-r^2+t^2-2iy}$	$\frac{2iz}{1-r^2+t^2-2iy}$	$\frac{1-r^2+t^2+2iy}{1-r^2+t^2-2iy}$
$\hat{\rho}_3$	$z$	$ix$	$iy$	$t$	$r^2 - t^2$
$\hat{\rho}_4$	$\frac{i}{2} \frac{1+t^2-r^2}{x+iz}$	$i \frac{t}{x+iz}$	$\frac{i}{2} \frac{1-t^2+r^2}{x+iz}$	$\frac{y}{x+iz}$	$\frac{x-iz}{x+iz}$

Tabelle B.1:  $\rho$ -Transformationen und  $M^4$  Koordinaten

Die durch biharmonische Koordinaten (mittels vollständiger Transformation) dargestellten Koordinaten  $x^\mu$  des flachen  $M^4$  werden durch die  $\rho$ -Transformationen komplex und konform transformiert.

### B.2.1 $\rho$ -Transformationen und vollständige Transformation

Die Wirkung von  $\hat{\rho}_3$  (siehe Abschnitt 2.3.2:  $\vartheta \rightarrow \rho_3 = \frac{\pi}{2} + i \ln \tan \frac{\vartheta}{2}$ ,  $\varphi_2 \rightarrow \tilde{\tau} = \varphi_2$  und  $\tau \rightarrow \tilde{\varphi}_2 = \tau$ ) auf die vollständige Transformation wirkt sich wie folgt aus:

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{\cos \vartheta \sin \varphi_1}{\cos \tau + \sin \vartheta \sin \varphi_2} \xrightarrow{\rho_3} \frac{i \cos \rho_3 \sin \varphi_1}{\cos \tilde{\tau} + \sin \rho_3 \sin \tilde{\varphi}_2} = ix \\
 y &= \frac{\cos \vartheta \cos \varphi_1}{\cos \tau + \sin \vartheta \sin \varphi_2} \xrightarrow{\rho_3} \frac{i \cos \rho_3 \cos \varphi_1}{\cos \tilde{\tau} + \sin \rho_3 \sin \tilde{\varphi}_2} = iy \\
 z &= \frac{\sin \vartheta \cos \varphi_2}{\cos \tau + \sin \vartheta \sin \varphi_2} \xrightarrow{\rho_3} \frac{\sin \tilde{\tau}}{\cos \tilde{\tau} + \sin \rho_3 \sin \tilde{\varphi}_2} = t \\
 t &= \frac{\sin \tau}{\cos \tau + \sin \vartheta \sin \varphi_2} \xrightarrow{\rho_3} \frac{\sin \rho_3 \sin \tilde{\varphi}_2}{\cos \tilde{\tau} + \sin \rho_3 \sin \tilde{\varphi}_2} = z
 \end{aligned} \tag{B.77}$$

Die Wirkung aller  $\rho$ -Transformationen auf die Koordinaten  $x^\mu$ , die durch die vollständige Transformation mit den biharmonischen Koordinaten verknüpft sind, ist in Tabelle B.1 aufgeführt.

# Anhang C

## Differentialgleichungen

### C.1 Klein–Gordon–Gleichung

Die Klein–Gordon–Gleichung wird in Abschnitt 3.1.1 eingeführt. Die Differentialgleichung  $\square\Phi = 0$  erscheint in Gleichung (3.2).

#### C.1.1 Verweis auf andere Literatur

Vergleich mit den Lösungen nach Barut [1] und Kalnins [24].

Nach [24] wird die Lösung der inhomogenen Klein-Gordon-Gleichung bezüglich der räumlichen Koordinaten dargestellt durch:

$$\mathcal{F}_{pq}^F = \sqrt{\frac{2F+1}{2\pi^2}} (-1)^{p+F} e^{-i p\Phi} d_{pq}^F (\cos 2\vartheta) e^{-i p\Psi} \quad (\text{C.1})$$

mit  $p := \frac{m_1+m_2}{2}$ ,  $q := \frac{m_1-m_2}{2}$  und dem Matrixelement der ( $SO(3)$ ) Drehgruppe  $d_{pq}^F$  sowie den Eigenwertgleichungen

$$C \mathcal{F}_{pq}^F = 4F(F+1) \quad (\text{C.2})$$

$$i L_3 \mathcal{F}_{pq}^F = p \mathcal{F}_{pq}^F \quad (\text{C.3})$$

$$i R_3 \mathcal{F}_{pq}^F = q \mathcal{F}_{pq}^F \quad (\text{C.4})$$

$$X \mathcal{F}_{pq}^F = -(p+q)^2 \mathcal{F}_{pq}^F \quad (\text{C.5})$$

$$Y \mathcal{F}_{pq}^F = -pq \mathcal{F}_{pq}^F \quad (\text{C.6})$$

Der Casimiroperator  $C$  ist der Laplacian auf  $S_3$  und somit ein Differentialoperatoren zweiter Ordnung. Es existieren zwei weitere kommutierende Differentialoperatoren zweiter Ordnung  $(X, Y)$  in der einhüllenden Algebra von  $o(4)$ :

$$X = \frac{\partial}{\partial \varphi_1} \frac{\partial}{\partial \varphi_1} \quad \text{und} \quad Y = \frac{\partial}{\partial \varphi_1} \frac{\partial}{\partial \varphi_1} - \frac{\partial}{\partial \varphi_2} \frac{\partial}{\partial \varphi_2} \quad (\text{C.7})$$

$$C = \Delta \quad (\text{C.8})$$

Nach [1][ch. 5§8.1.1, S. 158] ergibt sich eine harmonische Funktion in biharmonischen Koordinaten mit dem Eigenwert  $\lambda = -l(l+2)$  (für die 3-Sphäre) als

$$Y_{m_1, m_2}^l = N \cdot e^{i(m_1 \varphi_1 + m_2 \varphi_2)} \tan^{|m_2|} \vartheta \cos^l {}_2F_1 \left( \frac{|m_2| + m_1 - l}{2}, \frac{|m_2| - m_1 - l}{2}, m_2 + 1, -\tan^2 \vartheta \right) \quad (\text{C.9})$$

$$= N \cdot e^{i(m_1 \varphi_1 + m_2 \varphi_2)} \sin^{|m_2|} \vartheta \cos^{m_1} \times \\ \times {}_2F_1 \left( \frac{|m_2| + m_1 - l}{2}, \frac{m_2 + m_1 + l + 2}{2} + \frac{m_2 - |m_2|}{2}, m_2 + 1, \sin^2 \vartheta \right) \quad (\text{C.10})$$

Sowohl die Eigenwertgleichungen als auch die expliziten Lösungen wurden in dieser Arbeit in gleicher Form gefunden.

### C.1.2 Anforderungen an die Lösungen

Eine 0-Form  $\Phi_{(0)}$  wird dann als Lösung akzeptiert, wenn neben der Klein-Gordon-Gleichung folgende Bedingungen erfüllt werden:

- lokale Lösung (wenige Einschränkungen):
  1. hinreichende Differenzierbarkeit (in der Regel  $C^\infty$ -Funktionen)
  2. vollständig separierte Koordinatenfunktionen mit dem Ansatz 3.3
- globale Lösung (starke Einschränkungen):
  1. Ganzzahlige Werte für  $m_1, m_2$  und  $\omega$ . Dies bedeutet Geschlossenheit auf dem Rand, da nun  $\Phi_{(0)}(\tau + 2\pi, \dots) = \Phi_{(0)}(\tau, \dots)$  usw. gilt.
  2. Beschränktheit der Lösungen an den singulären Punkten  $s_\vartheta$ , damit die Lösung auf dem gesamten Raum definiert ist.
  3. Eindeutigkeit erfordert  $\partial_{\varphi_1} \Phi_{(0)} \Big|_{\vartheta=\pi/2} = 0$  und  $\partial_{\varphi_2} \Phi_{(0)} \Big|_{\vartheta=0} = 0$ .

Die globalen Lösungen müssen die Nebenbedingung (3.7) oder (3.13) für die erweiterte Klein-Gordon-Gleichung erfüllen.



## C.2 Maxwellgleichung

### C.2.1 Aufstellung der Maxwellgleichung

Der Ansatz des Vektorpotentials  $\underline{A} = (A_0, A_1, A_2, A_3)$  führt zu dem Feldstärketensor  $F_{\mu\nu} = A_{\mu;\nu} - A_{\nu;\mu}$ . Die quellenfreien Maxwellgleichungen  $0 = F^{\mu\nu}{}_{;\nu}$  lassen sich somit explizit darstellen als:

$$0 = F^{mn}{}_{;n} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \sqrt{-g} g^{mk} g^{nl} (A_{k,l} - A_{l,k}) \right) \quad (\text{C.11})$$

$$0 = -\frac{1}{\cos^2 \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi_1} \left( \frac{\partial}{\partial \varphi_1} A_0 - \frac{\partial}{\partial \tau} A_1 \right) - \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi_2} \left( \frac{\partial}{\partial \varphi_2} A_0 - \frac{\partial}{\partial \tau} A_2 \right) - \frac{1}{\sin \vartheta \cos \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \cos \vartheta \left( \frac{\partial}{\partial \vartheta} A_0 - \frac{\partial}{\partial \tau} A_3 \right) \right) \quad (\text{C.12})$$

$$0 = -\frac{1}{\cos^2 \vartheta} \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\partial}{\partial \varphi_1} A_0 - \frac{\partial}{\partial \tau} A_1 \right) + \frac{1}{\cos^2 \vartheta} \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi_2} \left( \frac{\partial}{\partial \varphi_1} A_2 - \frac{\partial}{\partial \varphi_2} A_1 \right) + \frac{1}{\sin \vartheta \cos \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta} \left( \frac{\partial}{\partial \varphi_1} A_3 - \frac{\partial}{\partial \vartheta} A_1 \right) \right) \quad (\text{C.13})$$

$$0 = -\frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\partial}{\partial \varphi_2} A_0 - \frac{\partial}{\partial \tau} A_2 \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{1}{\cos^2 \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi_1} \left( \frac{\partial}{\partial \varphi_2} A_1 - \frac{\partial}{\partial \varphi_1} A_2 \right) + \frac{1}{\sin \vartheta \cos \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} \left( \frac{\partial}{\partial \varphi_2} A_3 - \frac{\partial}{\partial \vartheta} A_2 \right) \right) \quad (\text{C.14})$$

$$0 = -\frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\partial}{\partial \vartheta} A_0 - \frac{\partial}{\partial \tau} A_3 \right) + \frac{1}{\cos^2 \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi_1} \left( \frac{\partial}{\partial \vartheta} A_1 - \frac{\partial}{\partial \varphi_1} A_3 \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi_2} \left( \frac{\partial}{\partial \vartheta} A_2 - \frac{\partial}{\partial \varphi_2} A_3 \right) \quad (\text{C.15})$$

### C.2.2 Eichansatz

Da die Maxwellgleichungen  $0 = F^{mn}{}_{;n}$  durch eine Umeichung des Feldes

$$A_m \rightarrow \tilde{A}_m = A_m + \Phi_{,m} \quad (\text{C.16})$$

nicht verändert wird (siehe z.B. [19], S.272f)

$$\begin{aligned} \tilde{F}^{mn}{}_{;n} &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x_n} \left( \sqrt{-g} g^{mk} g^{nl} (\tilde{A}_{k,l} - \tilde{A}_{l,k}) \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x_n} \left( \sqrt{-g} g^{mk} g^{nl} (A_{k,l} - A_{l,k} + \Phi_{,k,l} - \Phi_{,l,k}) \right) = F^{mn}{}_{;n} \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

steht die Wahl eines skalaren Eichfeldes  $\Phi$  vollkommen frei. Dabei sollte  $\Phi$  derart gewählt werden, daß die Gleichungen leichter lösbar werden. Die allgemeine Lösung der Maxwellgleichung besteht dann aus den ermittelten Lösungen mit spezieller Eichung und einem Gradientenfeld:

$$A_{m,Allg.} = A_{m,mitEichung} + \Phi_{,m} \quad (C.18)$$

Zu einer gefundenen Lösung  $A_{m,mitEichung}$  kann z.B. durch Addition von  $\Phi_{,m}$  mit  $\Phi = -\int A_3 d\vartheta$  die 3. Komponente *weggeeicht* werden, wobei allerdings die vorherige Eichung im allgemeinen verlorengeht.

Die wichtigsten Eichungen im Minkowskiraum sind:

1. Lorentz-Eichung:  $\partial_\mu A^\mu = 0$
2. Coulomb-Eichung:  $\nabla \vec{A} = 0$
3. temporale Eichung:  $A_0 = 0$
4. axiale Eichung:  $A_3 = 0$

In dieser Arbeit werden zwei spezielle Eichansätze untersucht:

**erste Eichung** Die erste Eichung beruht auf dem Ansatz  $A_{0;0} \equiv 0$ . Hieraus ergeben sich - wenn  $\tau$ -Abhängigkeit und die geforderte Separierbarkeit vorliegt - automatisch die Coulomb und die Lorentz-Eichung (siehe Gleichung C.19). Ist die Lösung von  $\tau$  unabhängig, so wird statt  $A_0 = 0$  die Coulomb bzw. die Lorentz-Eichung gewählt, die auch hier gleichzeitig erfüllt werden.

**zweite Eichung** In unserem Fall wird die axiale Eichung durch eine *normale* Eichung ersetzt. Da den Raumflächen mit  $\vartheta = const.$  eine besondere Bedeutung zugemessen wird, wird die Eichung untersucht, in der die Komponente in Normalenrichtung  $A_\vartheta$  verschwindet.

Die zweite Eichung entspricht also der Forderung  $A_3 \equiv 0$ .

Diese Eichung bleibt, im Gegensatz zur ersten Eichung, bei den  $\rho$ -Transformationen (Abschnitt 2.3.2) erhalten.

Unter Verwendung der ersten Eichung ( $A_0 = 0$ ), die bis auf weiteres benutzt wird, folgt bei hinreichender Zeitabhängigkeit (nichtstationär, Fourierentwicklung möglich) aus Gleichung (C.12) die Divergenzfreiheit des Feldes  $\underline{A} = (0, A_1, A_2, A_3)$ .

$$\begin{aligned} 0 &= (C.13) + (\text{Eichung } A_0 = 0) \\ &= \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{1}{\cos^2 \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi_1} A_1 + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi_2} A_2 + \frac{1}{\sin \vartheta \cos \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \cos \vartheta A_3 \right) \end{aligned} \quad (C.19)$$

$$\Rightarrow \operatorname{div} \underline{A} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \frac{\sqrt{-g}}{g_{ii}} A_i \right) \quad (C.20)$$

$$= -\frac{1}{\cos^2 \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi_1} A_1 - \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi_2} A_2 - \frac{1}{\sin \vartheta \cos \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \cos \vartheta A_3 = 0 \quad (C.21)$$

So lassen sich die Gleichungen C.13 bis C.21 auch darstellen als:

$$\begin{aligned} 0 &= \cos^2 \vartheta (C.13) + \frac{\partial}{\partial \varphi_1} (C.21) \\ &= \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} A_1 - \frac{1}{\cos^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi_1^2} A_1 - \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi_2^2} A_1 - \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} A_1 + 2 \frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi_1} A_3 \\ &= \square A_1 + 2 \frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta} \left( \frac{\partial}{\partial \varphi_1} A_3 - \frac{\partial}{\partial \vartheta} A_1 \right) \end{aligned} \quad (C.22)$$

$$\begin{aligned} 0 &= \sin^2 \vartheta (C.14) + \frac{\partial}{\partial \varphi_2} (C.21) \\ &= \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} A_2 - \frac{1}{\cos^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi_1^2} A_2 - \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi_2^2} A_2 - \frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} A_2 - 2 \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi_2} A_3 \\ &= \square A_2 - 2 \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} \left( \frac{\partial}{\partial \varphi_2} A_3 - \frac{\partial}{\partial \vartheta} A_2 \right) \end{aligned} \quad (C.23)$$

$$\begin{aligned} 0 &= (C.15) + \sin^{-2} \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \sin^2 \vartheta (C.21) \\ &= \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} A_3 - \frac{1}{\cos^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi_1^2} A_3 - \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi_2^2} A_3 - \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \cos \vartheta A_3 \\ &\quad - 2 \frac{1}{\sin \vartheta \cos^3 \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi_1} A_1 \\ &= \frac{1}{\sin \vartheta \cos \vartheta} \left( \square (\sin \vartheta \cos \vartheta A_3) - 2 \frac{1}{\cos^2 \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi_1} A_1 - 2 \frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \cos \vartheta A_3 \right) \end{aligned} \quad (C.24)$$

$$\begin{aligned} 0 &= (C.15) + \cos^{-2} \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \cos^2 \vartheta (C.21) \\ &= \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} A_3 - \frac{1}{\cos^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi_1^2} A_3 - \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi_2^2} A_3 - \frac{1}{\cos^2 \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \cos \vartheta A_3 \\ &\quad + 2 \frac{1}{\sin^3 \vartheta \cos \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi_2} A_2 \\ &= \frac{1}{\sin \vartheta \cos \vartheta} \left( \square (\sin \vartheta \cos \vartheta A_3) + 2 \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi_2} A_2 + 2 \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \cos \vartheta A_3 \right) \end{aligned} \quad (C.25)$$

Der d'Alembert-Operator ( $\square$ ) nach Gleichung 3.2 wurde hier als Abkürzung verwendet.

Werden diese vier Gleichungssysteme erfüllt, ist auch die Divergenzfreiheit bestätigt, da die Differenz der beiden letzten mit Gleichung (C.21) identisch ist.

Mit den Substitutionen

$$z = \cos^2 \vartheta \quad \text{und} \quad \hat{A}_3(z) = \sin \vartheta \cos \vartheta A_3(\vartheta) \quad (\text{C.26})$$

lassen sich die Gleichungen weiter umformen.

$$0 = (\square + 4(1-z)\frac{\partial}{\partial z})A_1 + \frac{2}{z}\frac{\partial}{\partial \varphi_1}\hat{A}_3 \quad (\text{C.27})$$

$$0 = (\square - 4z\frac{\partial}{\partial z})A_2 - \frac{2}{1-z}\frac{\partial}{\partial \varphi_2}\hat{A}_3 \quad (\text{C.28})$$

$$0 = (\square + 4(1-z)\frac{\partial}{\partial z})\hat{A}_3 - \frac{2}{z}\frac{\partial}{\partial \varphi_1}A_1 \quad (\text{C.29})$$

$$0 = (\square - 4z\frac{\partial}{\partial z})\hat{A}_3 + \frac{2}{1-z}\frac{\partial}{\partial \varphi_2}A_2 \quad (\text{C.30})$$

Durch Kombination der letzten Gleichungen und der Definition

$$S_1 = \hat{A}_3 + iA_1 \quad D_1 = \hat{A}_3 - iA_1 \quad (\text{C.31})$$

$$S_2 = \hat{A}_3 + iA_2 \quad D_2 = \hat{A}_3 - iA_2$$

lassen sich die Differentialgleichungen entkoppeln.

$$0 = (\square - 4z\frac{\partial}{\partial z})S_2 - \frac{2i}{1-z}\frac{\partial}{\partial \varphi_2}S_2 \quad (\text{C.32})$$

$$0 = (\square - 4z\frac{\partial}{\partial z})D_2 + \frac{2i}{1-z}\frac{\partial}{\partial \varphi_2}D_2 \quad (\text{C.33})$$

$$0 = (\square + 4(1-z)\frac{\partial}{\partial z})S_1 + \frac{2i}{z}\frac{\partial}{\partial \varphi_1}S_1 \quad (\text{C.34})$$

$$0 = (\square + 4(1-z)\frac{\partial}{\partial z})D_1 - \frac{2i}{z}\frac{\partial}{\partial \varphi_1}D_1 \quad (\text{C.35})$$

Dabei ist aber noch zu beachten, daß die Funktionen eine Nebenbedingung erfüllen müssen. Diese kann jedoch leicht nach der Lösung der Differentialgleichungen überprüft werden.

$$S_1 + D_1 = 2\hat{A}_3 = S_2 + D_2 \quad (\text{C.36})$$

Die Symmetrie der Gleichungen erleichtert das Bestimmen der Lösungen. Die Lösungen  $S_1$  und  $D_1$  sowie  $S_2$  und  $D_2$  sind jeweils einander komplex konjugiert, und eine Substitution von einer Lösung  $S_2 = \chi(\tau, \varphi_1, \varphi_2, z)$  der Gleichung (C.32) in  $D_1 = \chi(\tau, \varphi_2, \varphi_1, 1 - z)$  liefert eine die Lösung der Gleichung (C.35).

Werden die  $A$ -Felder als reelle Funktionen gesucht, dann lassen sich die Feldkomponenten berechnen aus

$$A_1 = -\text{Im}(D_1), \quad A_2 = \text{Im}(S_2), \quad \hat{A}_3 = \text{Re}(S_2) \stackrel{!}{=} \text{Re}(D_1) \quad (\text{C.37})$$

Sollen die einzelnen Komponenten denselben komplexen Vorfaktor  $V$  aufweisen, dann muß Gleichung C.48 herangezogen werden.

### C.2.3 Lösungen

Über den Separationsansatz

$$S_2 = V \cdot S(z) \quad \text{mit } V \text{ nach E.21} \quad (\text{C.38})$$

läßt sich Gleichung (C.32) auf eine verallgemeinerte hypergeometrische Differentialgleichung (Gleichung C.39) reduzieren.

$$0 = \frac{\partial^2}{\partial z^2} S + \frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial z} S - \left( \frac{(m_1/2)^2}{z} + \frac{(m_2/2)(1 + m_2/2)}{1 - z} - (\omega/2)^2 \right) \frac{S}{z(1 - z)} \quad (\text{C.39})$$

Mit den Zuordnungen für Gleichung (D.1)

$$\begin{aligned} \alpha &= -(m_1/2) & \beta &= -(\omega/2) & \gamma &= -(m_2/2) \\ \alpha' &= (m_1/2) & \beta' &= (\omega/2) & \gamma' &= 1 + (m_2/2) \end{aligned} \quad (\text{C.40})$$

lassen sich die Lösungen als Riemannsche  $P$ -Funktionen darstellen:

$$S_2 = V \cdot P \left| \begin{array}{ccc|c} 0 & \infty & 1 & \\ -\frac{m_1}{2} & -\frac{\omega}{2} & -\frac{m_2}{2} & z \\ \frac{m_1}{2} & \frac{\omega}{2} & 1 + \frac{m_2}{2} & \end{array} \right| =: V \cdot P_{2A} \quad (\text{C.41})$$

$$D_1 = V \cdot P \begin{vmatrix} 0 & \infty & 1 \\ -\frac{m_2}{2} & -\frac{\varepsilon}{2} & -\frac{m_1}{2} \\ \frac{m_2}{2} & \frac{\varepsilon}{2} & 1 + \frac{m_1}{2} \end{vmatrix} 1 - z \quad (C.42)$$

$$= V \cdot P \begin{vmatrix} 0 & \infty & 1 \\ -\frac{m_1}{2} & -\frac{\varepsilon}{2} & -\frac{m_2}{2} \\ 1 + \frac{m_1}{2} & \frac{\varepsilon}{2} & \frac{m_2}{2} \end{vmatrix} z =: V \cdot P_{1A} \quad (C.43)$$

$$S_1 = D_1^* \quad , \quad D_2 = S_2^* \quad (C.44)$$

Für die Betrachtung der Nebenbedingung (C.36) ist zuerst der exponentielle Vorfaktor ( $V$ ) von Interesse. Sowohl  $V = e^{i(\omega\tau + m_1\varphi_1 + m_2\varphi_2)}$  als auch  $V^* = e^{i(-\omega\tau - m_1\varphi_1 - m_2\varphi_2)}$  liefern denselben Vorfaktor  $\cos(\omega\tau + m_1\varphi_1 + m_2\varphi_2)$  für  $\hat{A}_3$ . Setzt man  $\omega \geq 0$  (ohne Beschränkung der Allgemeinheit), erhält man so einen zweiten Satz von Lösungen:

$$S_{2B} = V^* \cdot P \begin{vmatrix} 0 & \infty & 1 \\ -\frac{m_1}{2} & -\frac{\varepsilon}{2} & 1 - \frac{m_2}{2} \\ \frac{m_1}{2} & \frac{\varepsilon}{2} & \frac{m_2}{2} \end{vmatrix} z =: V^* \cdot P_{2B} \quad (C.45)$$

$$D_{1B} = V^* \cdot P \begin{vmatrix} 0 & \infty & 1 \\ 1 - \frac{m_1}{2} & -\frac{\varepsilon}{2} & -\frac{m_2}{2} \\ \frac{m_1}{2} & \frac{\varepsilon}{2} & \frac{m_2}{2} \end{vmatrix} z =: V^* \cdot P_{1B} \quad (C.46)$$

$$S_{1B} = D_{1B}^* \quad , \quad D_{2B} = S_{2B}^* \quad (C.47)$$

Die Feldkomponenten lassen sich also darstellen als:

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= -V (c_{1A} \cdot P_{1A} - c_{1B} \cdot P_{1B}) \\ A_2 &= V (c_{2A} \cdot P_{2A} - c_{2B} \cdot P_{2B}) \\ \hat{A}_3 &= iV (c_{2A} \cdot P_{2A} + c_{2B} \cdot P_{2B}) \\ &\stackrel{!}{=} iV (c_{1A} \cdot P_{1A} + c_{1B} \cdot P_{1B}) \end{aligned} \right\} (C.48)$$

Hierbei müssen nun  $c_{1A}$ ,  $c_{1B}$ ,  $c_{2A}$  und  $c_{2B}$  derart bestimmt werden, daß die Gleichungen (C.48) erfüllt werden. Da  $P_{1A}$ ,  $P_{1B}$ ,  $P_{2A}$  und  $P_{2B}$  verwandte  $P$ -Funktionen sind, sind sie auch linear abhängig, und es lassen sich immer zwei verschiedene Parametersätze ( $\{c_{1A}, c_{1B}, c_{2A}, c_{2B}\}$ ) finden.

Die Lösung der Maxwellgleichungen (3.33) mit der ersten Eichung und dem Separationsansatz (3.34) läßt sich darstellen als:

$$\begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ \hat{A}_3/\sqrt{z(1-z)} \end{pmatrix} = V \begin{pmatrix} 0 \\ -c_{1A} \cdot P_{1A} + c_{1B} \cdot P_{1B} \\ c_{2A} \cdot P_{2A} - c_{2B} \cdot P_{2B} \\ i\hat{A}_3(z)/\sqrt{z(1-z)} \end{pmatrix} \quad (\text{C.49})$$

mit:

$$\hat{A}_3(z) = c_{2A} \cdot P_{2A} + c_{2B} \cdot P_{2B} \stackrel{!}{=} c_{1A} \cdot P_{1A} + c_{1B} \cdot P_{1B} \quad (\text{C.50})$$

**Sonderfall:**  $\omega = 0$

Falls keine  $\tau$ -Abhängigkeit ( $\omega = 0$ ) vorlag, wurde in der ersten Eichung **nicht** die Bedingung  $A_0 = 0$  sondern die Bedingung  $\text{div} A = 0$  gefordert. Dies hatte den Vorteil, eine gemeinsame Bearbeitung zu ermöglichen. Da für  $\omega = 0$  die  $A_0$ -Komponente aus den Gleichungen abkoppelt, kann sie - wie in den vorherigen Abschnitten geschehen - zu Null gesetzt werden. Es gibt aber auch eine nicht verschwindende Lösung für  $A_0$ , die man folgendermaßen erhält:

Da  $\underline{A}$  von  $\tau$  unabhängig ist, verschwinden die entsprechenden Ableitungen und man erhält aus Gleichung C.12 die Gleichung:

$$-\frac{1}{\cos^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi_1^2} A_0 - \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi_2^2} A_0 - \frac{1}{\sin \vartheta \cos \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \cos \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} A_0 = \square A_0 = 0. \quad (\text{C.51})$$

Dies ist ein Spezialfall der Klein-Gordon-Gleichung (Abschnitt 3.1.1, Gleichung 3.5). Mit den dortigen Ergebnissen läßt sich die allgemeine Lösung angeben:

$$A_0(z) = P \begin{vmatrix} 0 & \infty & 1 \\ -\frac{m_1}{2} & 0 & -\frac{m_2}{2} & z \\ \frac{m_1}{2} & 1 & \frac{m_2}{2} \end{vmatrix}. \quad \text{bzw} \quad (\text{C.52})$$

$$A_0(z) = (1-z)^{m_2/2} z^{m_1/2} {}_2F_1\left(\frac{m_1+m_2}{2}, 1 + \frac{m_1+m_2}{2}; 1+m_1; z\right) \quad (\text{C.53})$$

$$\underline{A} = e^{i(m_1\varphi_1+m_2\varphi_2)}(A_0, 0, 0, 0) \quad (\text{C.54})$$

Da die Funktionen  $A_0$  auch Lösungen der Klein-Gordon-Gleichung sind, sind sie auch Eigenlösungen der  $K$ -Operatoren aus Abschnitt B.1.

Beispiele für  $A_0(\vartheta)$  bei speziellen Werten von  $m_1$  und  $m_2$ .

$$A_0(\vartheta) = \begin{cases} \cot^m \vartheta & : \text{für } m_1 = m_2 = m \\ \tan^m \vartheta & : \text{für } m_1 = m_2 = m \\ \cot^m \vartheta / \cos^2 \vartheta & : \text{für } m_1 - 2 = m_2 = m \\ \tan^m \vartheta / \sin^2 \vartheta & : \text{für } m_1 = m_2 - 2 = m \end{cases} \quad (\text{C.55})$$

### Randbedingungen für globale Lösungen

Für alle auftretenden Funktionen müssen folgende Randbedingung erfüllt sein, damit sie als eigenständige (globale) Lösung akzeptiert werden:

$$\left. \begin{aligned} \text{Stetigkeit} & : \Psi(\tau, \varphi_1 = 0, \varphi_2, \vartheta) = \Psi(\tau, \varphi_1 = 2\pi, \varphi_2, \vartheta) \quad , \\ & \Psi(\tau, \varphi_1, \varphi_2 = 0, \vartheta) = \Psi(\tau, \varphi_1, \varphi_2 = 2\pi, \vartheta) \quad \text{und} \\ & \Psi(\tau = 0, \varphi_1, \varphi_2, \vartheta) = \Psi(\tau = 2\pi, \varphi_1, \varphi_2, \vartheta). \\ \text{Beschränktheit} & : \|\Psi\| \text{ beschränkt im abgeschlossenen Definitionsgebiet.} \end{aligned} \right\} (\text{C.56})$$

Die Stetigkeitsbedingungen sorgen dafür, daß die Lösungen auf den Kreisen der periodischen Koordinaten  $\tau, \varphi_1$  und  $\varphi_2$  keine Unstetigkeiten aufweisen.

Es bleibt jedoch noch zu klären, welche Norm ( $\|\cdot\|$ ) auf die Funktionen anzuwenden ist. Es werden hier drei Normen vorgestellt, die jede für sich eine andere physikalische Interpretation zulassen.

- Die erste Norm  ${}_1\|\cdot\|$  sei das klassische Vektorprodukt  ${}_1\|\underline{A}\| = A_i A^i = g_{ij} A^i A^j = g^{ij} A_i A_j$ . Diese Norm ist angebracht, wenn sowohl der Vektor, die Form (der Kovektor) als auch die Länge der Vektoren von Interesse ist. Sie ist bei konformen Transformationen jedoch nicht invariant.
- Die zweite Norm  ${}_2\|\cdot\|$  wirkt nur auf die einzelnen Komponenten der Vektoren, indem deren Beträge addiert werden:  ${}_2\|\underline{A}_{\{\mu\}}\| = \sum |A_\mu|$ . Diese Art der Norm unterscheidet zwischen ko- und kontravarianten Vektoren. Sie ist dann angebracht, wenn einzig die betrachteten Vektoren relevant sind und nicht deren (klassische) Länge oder der andere, zugehörige (Ko-)Vektor. Dies trifft z.B. bei konformen Transformationen zu.



- Die dritte Norm  ${}_3\|\cdot\|$  ist eine Integralnorm, die auf skalare Größen (Skalare, Vektorkomponenten usw.) wirken soll. Bei Anwendung auf einen Vektor ist sie nur als Ergänzung zu einer der ersten beiden Normen zu verstehen.  ${}_3\|\Psi\| = \int \Psi f(\vartheta) d\vartheta$

Die Eindeutigkeit eines Vektorfeldes auf  $S^3 \times R^1$  erfordert die nachfolgenden Randbedingungen.

$$\text{Breitenkreis am Pol, Wirbel : } A_1|_{\vartheta=\pi/2} = 0 \quad , \quad A_2|_{\vartheta=0} = 0 \quad (\text{C.57})$$

$$\text{Längenkreis am Pol, Quelle : } A_3|_{\vartheta=0} = 0 \quad , \quad A_3|_{\vartheta=\pi/2} = 0 \quad (\text{C.58})$$

$$\begin{aligned} \text{Achsen am Pol : } \left( \frac{\partial}{\partial \varphi_2} A_1 \right) \Big|_{\vartheta=0} = 0 \quad , \quad \left( \frac{\partial}{\partial \varphi_2} A_0 \right) \Big|_{\vartheta=0} = 0 \\ \left( \frac{\partial}{\partial \varphi_1} A_2 \right) \Big|_{\vartheta=\pi/2} = 0 \quad , \quad \left( \frac{\partial}{\partial \varphi_1} A_0 \right) \Big|_{\vartheta=\pi/2} = 0 \end{aligned} \quad (\text{C.59})$$

*Längenkreis am Pol:* Damit ein Vektor, der auf der Polkappe sitzt und in Richtung der Längenkreise zeigt, am Pol eindeutig definiert ist, muß er dort die Länge Null haben. Einer *Quelle* von Feldlinien läßt sich an ihrem Ursprung kein eindeutiger Vektor zuordnen, da keine Richtung ausgezeichnet ist.

*Achsen am Pol:* Ein Vektor, der auf einer Polkappe sitzt und in Richtung der Achse zeigt, darf sich mit einer Drehung um die eigene Achse nicht verändern. Wenn die Kugel von  $\vartheta$  und  $\varphi_1$  aufgespannt wird, liegt der dargestellte Pol bei  $\vartheta = \pi/2$ . In Achsenrichtung zeigen dann die  $\varphi_2$  und die  $\tau$ -Komponente. Die Drehung um die Achse kann durch die Ableitung nach  $\varphi_1$  ausgedrückt werden. D.h.  $\frac{\partial}{\partial \varphi_1} A_2 \Big|_{\vartheta=\pi/2} = 0$  und  $\frac{\partial}{\partial \varphi_1} A_0 \Big|_{\vartheta=\pi/2} = 0$  müssen erfüllt werden.

### C.2.4 Globale und andere ausgewählte Lösungen

Die Geschlossenheit der Lösungen (stetiger Übergang  $2\pi \leftrightarrow 0$  in den periodischen Koordinaten) auf allen Perioden von  $S^1 \times S^3$  nach Gleichung (C.56) führt zu folgenden Einschränkungen der Lösungsvielfalt:

- Für ganzzahlige Werte von  $m_1, m_2$  und  $\omega$  sind die Lösungen (nach Gleichung 3.35) (und ihre Ableitungen) in  $\varphi_1, \varphi_2$  und  $\tau$  geschlossen.
- Für gebrochene Werte von  $m_1, m_2$  oder  $\omega$  stellt Gleichung (3.35) keine geschlossene Lösung dar, kann aber als mehrfache Überdeckung des Raumes interpretiert werden.

Für die Überprüfung der Randbedingungen (C.56)-(C.59) ist es notwendig, konkrete Darstellungen der  $P$ -Funktion, wie in den Gleichungen D.3 (bzw. D.7), zu wählen. Da die Parameter  $\alpha, \alpha', \gamma$  und  $\gamma'$  der  $P$ -Funktion (D.2) die Polstärken (d.h. die niedrigsten, auch negativen Exponenten einer Potenzreihenentwicklung (Laurententwicklung)) an den zugehörigen Stellen beschreiben, dürfen wegen der Beschränktheit (nach der zweiten Norm) nur die Entwicklungen der  $P$ -Funktion mit nichtnegativen Polstärken genommen werden. Die Bedingungen (C.57) und (C.58) erlauben vereinzelt sogar nur positive Polstärken. Die eindeutigen Lösungen ergeben sich als Untermenge der beschränkten Lösungen.

### Ausgewählte Lösungen

Eine Auswahl von Lösungen der Maxwell-Gleichungen für bestimmte Werte von  $m_1$  und  $m_2$ . Die Entwicklungen der  $P$ -Funktion ergeben sich als hypergeometrische Funktionen  $F \equiv {}_2F_1$ .

$m_1 = m_2 = 0$  Durch eine geeignete Wahl der Phasenfaktoren in Gleichung (3.35) lassen sich einkomponentige Lösungen in  $A_1, A_2$  und  $A_3$  erzeugen. Bei den zugehörigen  $P$ -Funktionen existiert für jede immer eine logarithmisch divergente Entwicklung und eine, die im gesamten  $z$ -Intervall beschränkt ist. Letztere haben die Form

$$P_{2A}^\alpha = P_{2B}^\alpha = F(-k, k; 1; z) \quad (\text{C.60})$$

$$P_{1A}^\gamma = P_{1B}^\gamma = F(-k, k; 1; 1-z) \quad (\text{C.61})$$

und sie werden nur für  $k = 0$  linear abhängig, wo sie konstant sind. Man erhält demnach für  $\omega = m_1 = m_2 = 0$  alle trivialen konstanten Vektoren

$$(A_1, A_2, \hat{A}_3) = (c_1, c_2, c_3) \quad (\text{C.62})$$

und für  $\omega \in \mathbb{R}^+, m_1 = m_2 = 0$  die Lösungen

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \hat{A}_3 \end{pmatrix} = \sin(\omega\tau) \begin{pmatrix} c_1 F(-\omega/2, \omega/2; 1; 1-z) \\ c_2 F(-\omega/2, \omega/2; 1; z) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.63})$$

Für ein nicht ganzzahliges  $k$  sind allerdings die Randbedingungen (C.58) verletzt, da die Komponenten nicht am zugehörigen Rand verschwinden.

Für  $\omega = 1$  (d.h.  $k = 1/2$ ) sind die Funktionen Elliptische Integrale.

$m_1 = 0, m_2 > 0$  Als Lösungen mit der Bedingung  $m_1 = 0$  und  $m_2 > 0$  kommen in Frage:

- Ein Feld  $\underline{A} = c \cdot (0, A_1, 0, 0)$  für  $\omega \in \mathbb{R}$  (bzw.  $k \geq -m_2/2$ ) mit

$$A_1 = \sin(\omega\tau) \cos(m_2\varphi_2)(1-z)^{m_2/2} F(-k, \omega - k; m_2 + 1; 1-z) \quad (\text{C.64})$$

Für nicht ganzzahlige  $m_2$  und  $k$  sind allerdings die Randbedingungen (C.58) verletzt, da die Komponenten nicht am zugehörigen Rand verschwinden.

- Ein Feld  $\underline{A} = c \cdot (0, 0, A_2, \hat{A}_3)$  mit

$$\hat{A}_3 = \sin(\omega\tau) \cos(m_2\varphi_2)(1-z)^{m_2/2} F(-k, \omega - k; m_2 + 1; 1-z) \quad (\text{C.65})$$

$$A_2 = \sin(\omega\tau) \sin(m_2\varphi_2)(1-z)^{m_2/2} (c_{2a}(1-z)F(1-k, 1+\omega-k; 1; z) - c_{2b}F(-k, \omega - k; 1; z)) \quad (\text{C.66})$$

Da die Konstanten  $c_{2a}$  und  $c_{2b}$  so gewählt werden müssen, daß die Addition der Funktionen die  $\hat{A}_3$ -Komponente liefert, ist es für die Beschränktheit der Lösung zwingend notwendig, daß die beiden kombinierten Funktionen ebenfalls beschränkt sind, sofern nicht eine bis auf einen konstanten Faktor mit der  $\hat{A}_3$ -Komponente identisch ist. Daher ergeben sich die Bedingungen:

- Für  $k = 0$ :  $c_{2a} = 0$  und  $c_{2b} = 1$ .
- Für  $k \in \mathbb{N}^+$ :  $c_{2a} = 1/c_a - c_b$  und  $c_{2b} = c_b$  (siehe Gleichung (3.41)). Diese Werte ergeben sich aus der Betrachtung an den Punkten ( $z = 1$ ) und ( $z = 0$ ).

$m_2 = 0, m_1 > 0$  Als Lösungen mit der Bedingung  $m_2 = 0$  und  $m_1 > 0$  kommen in Frage:

- Ein Feld  $\underline{A} = c \cdot (0, 0, A_2, 0)$  für  $\omega \in \mathbb{R}$  (bzw.  $k \geq -m_1/2$ ) mit

$$A_2 = \sin(\omega\tau) \sin(m_1\varphi_1)z^{m_1/2} F(-k, \omega - k; m_1 + 1; z) \quad (\text{C.67})$$

Für ein nicht ganzzahliges  $k$  sind allerdings die Randbedingungen (C.58) verletzt, da die Komponenten nicht am zugehörigen Rand verschwinden.

- Ein Feld  $\underline{A} = c \cdot (0, A_1, 0, \hat{A}_3)$  mit

$$\hat{A}_3 = \sin(\omega\tau) \cos(m_1\varphi_1)z^{m_1/2} F(-k, \omega - k; m_1 + 1; z) \quad (\text{C.68})$$

$$A_1 = \sin(\omega\tau) \sin(m_1\varphi_1)z^{m_1/2} (c_{1a}z \cdot F(1-k, 1+\omega-k; 1; 1-z) - c_{1b}F(-k, \omega - k; 1; 1-z)) \quad (\text{C.69})$$

Es ergeben sich analog die Bedingungen:

- Für  $k = 0$ :  $c_{1a} = 0$  und  $c_{1b} = 1$ .
- Für  $k \in \mathbb{N}^+$ :  $c_{1a} = 1/c_b - c_a$  und  $c_{1b} = c_a$  (siehe Gleichung (3.41)).

$m_2 = 2$  **oder**  $m_1 = 2$  **und**  $k = -1$  Diese Fälle führen auf die trivialen Lösungen

$$(A_1, A_2, \hat{A}_3) = (c_1 A_1(\phi_1), c_2 A_2(\phi_2), 0) \quad (\text{C.70})$$

die auf ein Gradientenfeld zurückgeführt werden können.

$m_1, m_2 > 0$  **und**  $k = 0$  Die Lösung ergibt sich zu:

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \hat{A}_3 \end{pmatrix} = \sin((m_1 + m_2)\tau) z^{m_1/2} (1 - z)^{m_2/2} \begin{pmatrix} \cos(m_1\varphi_1) \cos(m_2\varphi_2) \\ \sin(m_1\varphi_1) \sin(m_2\varphi_2) \\ -\sin(m_1\varphi_1) \cos(m_2\varphi_2) \end{pmatrix} \quad (\text{C.71})$$

$m_1, m_2 > 0$  **und**  $k \in \mathbb{N}^+$  (Bereits im Hauptteil, Abschnitt 3.2.3, beschrieben.) Es gibt zwei linear unabhängige Lösungen, die dargestellt werden können als:

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \hat{A}_3 \end{pmatrix} = V \cdot z^{m_1/2} (1 - z)^{m_2/2} \begin{pmatrix} -A_1(z) \\ A_2(z) \\ i\hat{A}_3(z) \end{pmatrix}$$

mit

- Erste Lösung ( $L_1$ )

$$\begin{aligned} A_1 &= -F(-k, \omega - k; 1 + m_2; 1 - z) \\ A_2 &= c_{2a}(1 - z)F(1 - k, 1 + \omega - k; 1 + m_1; z) - c_{2b}F(-k, \omega - k; 1 + m_1; z) \\ \hat{A}_3 &= F(-k, \omega - k; 1 + m_2; 1 - z) \\ c_{2a} &= 1/c_a - c_b \quad , \quad c_{2b} = c_b \end{aligned}$$

- Zweite Lösung ( $L_2$ )

$$\begin{aligned} A_1 &= c_{1a}z \cdot F(1 - k, 1 + \omega - k; 1 + m_2; 1 - z) - c_{1b}F(-k, \omega - k; 1 + m_2; 1 - z) \\ A_2 &= -F(-k, \omega - k; m_1 + 1; z) \\ \hat{A}_3 &= F(-k, \omega - k; m_1 + 1; z) \\ c_{1a} &= 1/c_b - c_a \quad , \quad c_{1b} = c_a \end{aligned}$$

Mit  $c_a$  und  $c_b$  nach Gleichung (3.41).

### C.2.5 Explizite Maxwellgleichungen in 2. Eichung

Die Einführung einer anderen, zweiten Eichung, bei der das Vektorpotential  $\underline{A}$  die Bedingung  $A_3 = 0$  erfüllen soll, führt zu folgenden Beziehungen:

$$0 = -\frac{1}{\cos^2 \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi_1} \left( \frac{\partial}{\partial \varphi_1} A_0 - \frac{\partial}{\partial \tau} A_1 \right) - \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi_2} \left( \frac{\partial}{\partial \varphi_2} A_0 - \frac{\partial}{\partial \tau} A_2 \right) - \frac{1}{\sin \vartheta \cos \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \cos \vartheta \left( \frac{\partial}{\partial \vartheta} A_0 \right) \right) \quad (\text{C.72})$$

$$0 = -\frac{1}{\cos^2 \vartheta} \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\partial}{\partial \varphi_1} A_0 - \frac{\partial}{\partial \tau} A_1 \right) + \frac{1}{\cos^2 \vartheta} \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi_2} \left( \frac{\partial}{\partial \varphi_1} A_2 - \frac{\partial}{\partial \varphi_2} A_1 \right) - \frac{1}{\sin \vartheta \cos \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta} \left( \frac{\partial}{\partial \vartheta} A_1 \right) \right) \quad (\text{C.73})$$

$$0 = -\frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\partial}{\partial \varphi_2} A_0 - \frac{\partial}{\partial \tau} A_2 \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{1}{\cos^2 \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi_1} \left( \frac{\partial}{\partial \varphi_2} A_1 - \frac{\partial}{\partial \varphi_1} A_2 \right) - \frac{1}{\sin \vartheta \cos \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} \left( \frac{\partial}{\partial \vartheta} A_2 \right) \right) \quad (\text{C.74})$$

$$0 = -\frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\partial}{\partial \vartheta} A_0 \right) + \frac{1}{\cos^2 \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi_1} \left( \frac{\partial}{\partial \vartheta} A_1 \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi_2} \left( \frac{\partial}{\partial \vartheta} A_2 \right) \quad (\text{C.75})$$

und

$$\operatorname{div} A = \frac{\partial}{\partial \tau} A_0 - \frac{1}{\cos^2 \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi_1} A_1 - \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi_2} A_2 \quad (\text{C.76})$$

Die Gleichungen entkoppeln erst, wenn zusätzlich

$$\operatorname{div} A = 0 \quad (\text{C.77})$$

gefordert wird. Da generell alle Lösungen mit der Bedingung  $A_3 = 0$  durch Umeichung der allgemeinen Lösung 3.35 zu gewinnen sind, stellt sich die Frage, bei welchen Lösungen die Divergenzfreiheit erhalten bleibt.

Durch Umformung der Gleichungen (C.72) bis (C.76) erhält man:

$$\frac{\partial}{\partial \varphi_1} \frac{A_1}{(\cos \vartheta)^4} = \frac{\partial}{\partial \varphi_2} \frac{A_2}{(\sin \vartheta)^4} \quad (\text{aus C.75, C.76 und C.77}) \quad (\text{C.78})$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} A_0 = \frac{\partial}{\partial \varphi_1} \frac{A_1}{(\cos \vartheta)^4} \quad (\text{mit C.76 und C.77})^1 \quad (\text{C.79})$$

$$A_0(\vartheta) = (\sin \vartheta \cos \vartheta)^{-4/3} \quad (\text{mit C.72 und C.73}) \quad (\text{C.80})$$

$$\omega^2 = m_1^2 = m_2^2 = 16/9 \quad (\text{mit C.72}) \quad (\text{C.81})$$

<sup>1</sup> Die Variante  $\frac{\partial}{\partial \tau} A_0 = \frac{\partial}{\partial \varphi_1} A_1 = \frac{\partial}{\partial \varphi_2} A_2 = 0$  liefert die drei bekannten einkomponentigen Lösungen (Abschnitte 3.52, 3.54, 3.56 und C.2.4). Diese Lösungen erfüllen sowohl die erste als auch die zweite Eichung. Daher wird  $\frac{\partial}{\partial \tau} A_0 \neq 0$  angesetzt und man erhält aus obigen Gleichungen mit  $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2 \in \{-1, 1\}$  einen weiteren Lösungssatz (siehe Gleichung 3.57:

$$\begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = c \frac{e^{i(\sigma_0 \tau + \sigma_1 \varphi_1 + \sigma_2 \varphi_2)^{\frac{4}{3}}}}{(\sin \vartheta \cos \vartheta)^{\frac{4}{3}}} \begin{pmatrix} \sigma_0 \\ \sigma_1 (\cos \vartheta)^4 \\ \sigma_2 (\sin \vartheta)^4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C.82})$$

Unter Betrachtung aller Vorzeichenwechsel (d.h. die Wahl aller Kombinationen der  $\sigma_i$ ) erhält man so 8 verschiedene Einzellösungen. Die Zahlen  $\omega = 0$  und  $\omega = 4/3$ , die diese beiden Lösungssysteme charakterisieren, sind Lösungen der Gleichung

$$2\omega = 1 \pm \sqrt{1 + \omega^2} \quad \rightarrow \quad 0 = \omega \left( \frac{4}{3} - q \right). \quad (\text{C.83})$$

Diese Gleichung tritt bei der Eichfunktion in Erscheinung, die die Lösung von der ersten Eichung zur zweiten Eichung transformiert.

## C.2.6 Verweis auf andere Literatur

In seiner Arbeit über die Maxwell- und Diracgleichung im expandierenden Universum [34] behandelt Schrödinger das elektromagnetische Feld auf dem gekrümmten, 4-dimensionalen Raum  $S^1 \times S^3$  mit der Metrik

$$ds^2 = -d\omega^2 - \sin^2 \omega d\phi_1^2 - \cos^2 \omega d\phi_2^2 + d\tau^2 \quad (\text{C.84})$$

Ab hier werden alle Angaben aus obiger Arbeit, sofern nicht anderes vermerkt wird, bezüglich der Basis

$$ds^2 = d\tau^2 - \cos^2 \vartheta d\varphi_1^2 - \sin^2 \vartheta d\varphi_2^2 - d\vartheta^2 \quad (\text{C.85})$$

angegeben. (Die Indizes (1, 2, 3, 4) werden ersetzt durch (3, 2, 1, 0).)

In diesem Raum sucht er eine Lösung für den Feldstärketensor  $F_{ik}$ . Durch die Erweiterung auf die komplexe Zahlenebene führt Schrödinger eine spezielle Nebenbedingung ein, indem

er den Realteil von  $F_{ik}$  mit dem *klassischen* Feldtensor und den Imaginärteil mit dem *dualen* Feldtensor identifiziert. (Gleichung (2,4) in der Originalarbeit.)

Durch den Vergleich der beiden reellen Feldtensoren reduzieren sich die ursprünglich 6 komplexen Komponenten von  $F_{ik}$  auf 3. Die zusätzlichen Gleichungen, d.h. die neben den Maxwellgleichungen zu erfüllenden Nebenbedingungen lauten (nach [34, Glg.(2,10)]):

$$F_{21} = i \sin \vartheta \cos \vartheta F_{30}, \quad F_{13} = i \cot \vartheta_3 F_{20} \quad F_{32} = i \tan \vartheta_3 F_{10} \quad (\text{C.86})$$

Überträgt man diese Gleichungen auf die Potentiale, so ergibt sich, mit der Strahlungseichung ( $A_0 = 0$ ), das Gleichungssystem:

$$\frac{\partial}{\partial \varphi_2} A_3 - \frac{\partial}{\partial \vartheta} A_2 = i \frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta} \frac{\partial}{\partial \tau} A_1 \quad (\text{C.87})$$

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta} A_1 - \frac{\partial}{\partial \varphi_1} A_3 = i \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \tau} A_2 \quad (\text{C.88})$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi_1} A_2 - \frac{\partial}{\partial \varphi_2} A_1 = i \sin \vartheta \cos \vartheta \frac{\partial}{\partial \tau} A_3 \quad (\text{C.89})$$

Aus diesen Gleichungen kann sofort geschlossen werden, daß Potentiale mit nur einer, nichtverschwindenden Komponente (wie es z.B. das Feld  $\underline{A} = (0, A_1, 0, 0)$  ist), bis auf triviale Fälle die Nebenbedingung nicht erfüllen können. Unter Berücksichtigung der Divergenzfreiheit von  $\underline{A}$  muß ein solches Feld sogar konstant sein. Ebenso folgt sofort, daß rein reelle Lösungen nicht existieren. Dies hat zur Konsequenz, daß die komplex konjugierte einer gefundenen Lösung das Differentialgleichungssystem nicht erfüllt! Diese Einschränkung beruht nur auf der Nebenbedingung, d.h. der Verknüpfung von Real- und Imaginärteil, während die eigentlichen Maxwellgleichungen, als reellen Differentialgleichungen, auch von der komplex konjugierten gelöst werden.

Die auftretenden Parameter ( $\nu, m, n$ ) bei Schrödinger lassen sich mit demselben Tripel ( $\omega, m_1, m_2$ ) in dieser Arbeit identifizieren.

Auf S. 29/30 bzw. mit (II,7) reduziert Schrödinger die Parametermenge auf  $k \in \{1, 2, 3, \dots\}$ .

Die Schrödingerschen Lösungen lassen sich darstellen als:

- mit  $n_1 = 1/2(\omega - m_2 - m_1 - 2) = k - 1$      $p = m_1 + m_2 + 1$      $q = m_1 + 1$

$$F_{30} \sim A_3 = \frac{ie^{i(\omega\tau + m_1\varphi_1 + m_2\varphi_2)}}{\sin \vartheta \cos \vartheta} \left[ \frac{m_2 - m_1}{\omega} f + \frac{m_1 + m_2}{\omega} g \right] \quad (\text{C.90})$$

$$F_{20} \sim A_2 = e^{i(\omega\tau + m_1\varphi_1 + m_2\varphi_2)}(f - g) \quad (\text{C.91})$$

$$F_{10} \sim A_1 = e^{i(\omega\tau + m_1\varphi_1 + m_2\varphi_2)}(f + g) \quad (\text{C.92})$$

$$f = -\frac{\omega - m_1 - m_2}{\omega + m_1 - m_2} z^{m_1/2} (1 - z)^{m_2/2} F(1 - k, k + m_1 + m_2; m_1 + 1; z) \quad (\text{C.93})$$

$$g = z^{m_1/2} (1 - z)^{m_2/2} F(1 + k + m_1 + m_2, -k; m_1 + 1; z) \quad (\text{C.94})$$

Die Verknüpfung der beiden Lösungen  $L_1$  und  $L_2$  aus Abschnitt 3.2.3 zu

$$L_S = -\frac{k}{(k + m_1)c_{2a}} L_1 + \left(1 + \frac{c_{2b}}{c_{2a}}\right) \frac{k}{k + m_1} L_2 \quad (\text{C.95})$$

ergibt nach weiteren Umformungen (Formeln z.B. in [3, Vol.I,Kap. 2.8]) die Schrödinger-Lösung  $L_S$ .



# Anhang D

## P-Funktion und Hypergeometrische Funktion

### D.1 Riemannsche P-Funktion

Die Lösungen der verallgemeinerten hypergeometrischen Differentialgleichung

$$0 = \frac{\partial^2}{\partial z^2} S + \left[ \frac{1 - \alpha - \alpha'}{z} - \frac{1 - \gamma - \gamma'}{1 - z} \right] \frac{\partial}{\partial z} S - \left[ -\frac{\alpha\alpha'}{z} - \frac{\gamma\gamma'}{1 - z} + \beta\beta' \right] \frac{S}{z(1 - z)} \quad (\text{D.1})$$

können mittels der Riemannschen  $P$ -Funktion dargestellt werden:

$$S = P \begin{vmatrix} 0 & \infty & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma & z \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{vmatrix} \quad (\text{D.2})$$

Hierbei steht die  $P$ -Funktion für zwei linear unabhängige Lösungen, die um die jeweiligen Polstellen (die in der ersten Zeile stehen) entwickelt werden können. Die Entwicklung um  $z = 0$  liefert die beiden Lösungen ( $F \equiv {}_2F_1$ )

$$\left. \begin{aligned} S = P^\alpha &= z^\alpha (1 - z)^\gamma F(\alpha + \beta + \gamma, \alpha + \beta' + \gamma; 1 + \alpha - \alpha'; z) \\ &= z^\alpha (1 - z)^{\gamma'} F(\alpha + \beta + \gamma', \alpha + \beta' + \gamma'; 1 + \alpha - \alpha'; z) \\ S' = P^{\alpha'} &= z^{\alpha'} (1 - z)^\gamma F(\alpha' + \beta + \gamma, \alpha' + \beta' + \gamma; 1 + \alpha' - \alpha; z) \\ &= z^{\alpha'} (1 - z)^{\gamma'} F(\alpha' + \beta + \gamma', \alpha' + \beta' + \gamma'; 1 + \alpha' - \alpha; z) \end{aligned} \right\} (\text{D.3})$$

**Sonderfälle:** Bei der Darstellung der  $P$ -Funktion mittels hypergeometrischer Funktionen wie in Gleichung (D.3) müssen einzelne Sonderfälle untersucht werden, da  $F(a, b; c; z)$  für ein ganzzahliges, nichtpositives  $c$  nicht definiert ist. Die folgende Unterteilung entstammt aus [25]:

1. *Es ist  $\alpha - \alpha' = -m_1$  keine ganze Zahl.* Die Lösungen  $S$  und  $S'$  sind verschieden und wohldefiniert.
2. *Es ist  $\alpha - \alpha' = -m_1 = 0$ .* Es liegt ein *Ausnahmefall erster Ordnung* vor.
3. *Es ist  $\alpha - \alpha' = -m_1$  eine von Null verschiedene ganze Zahl.* Eine Lösung ist immer korrekt (z.B.  $S'$  für  $m_1 > 0$ ), die andere nur für den Fall, daß

$$(\alpha' - \alpha) \pm (\beta' - \beta) \pm (\gamma' - \gamma) = m_1 \pm \omega \pm (1 + m_2)$$

für eine geeignete Vorzeichenkombination eine positive ganze, ungerade Zahl und kleiner als  $2m$  ist (*Ausnahmefall zweiter Ordnung*). Setzt man  $\omega = 2k + m_1 + m_2$ , erhält man die Bedingungen

$$k \in \{0, -1, \dots, -m_1\} \quad \text{oder} \quad k \in \{-m_2, -m_2 - 1, \dots, -m_2 - m_1\} \quad (\text{D.4})$$

$$\text{bzw.} \quad \omega \in m_2 - m_1, m_2 - m_1 + 2, \dots, m_2 + m_1 \quad (\text{D.5})$$

$$\text{oder} \quad \omega \in -m_2 - m_1, -m_2 - m_1 + 2, \dots, -m_2 + m_1 \quad (\text{D.6})$$

In allen anderen Fällen liegt wieder ein Ausnahmefall erster Ordnung vor.

**Ausnahmefall erster Ordnung:** In den Ausnahmefällen erster Ordnung muß die linear unabhängige zweite Lösung erst bestimmt werden. Sie ergibt sich aus einer Grenzbetrachtung und weist immer einen logarithmischen Term auf.

Ist z.B.  $S'$  die reguläre Lösung, so weist die Reihenentwicklung von der hypergeometrischen Funktion  $F$  in  $S$  erstmalig beim  $m_1$ -ten Element eine Unbestimmtheit auf; der zugehörige Koeffizient  $a_m$  ist

$$a_m = [(\alpha + \beta + \gamma)_m (\alpha + \beta' + \gamma)_m] / [(1 + \alpha - \alpha')_m m!]$$

Ersetzt man nun  $\alpha$  durch  $\alpha + \epsilon$  und bildet den Grenzwert von

$$S'' = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} [S/a_m - S'], \quad (\text{D.7})$$

so hat man die zweite Lösung vorliegen.

Im Fall  $m_1 = 0$  läßt sich die Lösung  $S''$  auch darstellen als:

$$S'' = \log(z)S' + z^{\alpha'}(1-z)^{\gamma} \frac{\partial}{\partial \epsilon} F(\beta + \gamma + \epsilon, \beta' + \gamma + \epsilon; 1 + 2\epsilon; z)|_{\epsilon=0}$$

## D.2 hypergeometrische Funktion

Literatur: [25, 26, 30, 29, 5, 20] Die hypergeometrische Funktion  $F(a, b, c; z)$  ist (für positive  $c$ ) dann und nur dann bei  $z = 1$  beschränkt, wenn

1.  $a$  oder  $b$  null oder eine negative ganze Zahl ist, oder
2.  $c > a + b$  gilt.

Es gilt ( $k, m, n \in \mathbb{N}$ ):

$$F(-k, m + n + 1, m + 1, x) = \binom{m+n}{m}^{-1} \sum_{r=0}^k \binom{k}{r} \binom{m+n+r}{n} (-1)^r x^r \quad (\text{D.8})$$

$$F(a, b; c; x) = (1-x)^{c-a-b} F(c-a, c-b; c; x) \quad (\text{D.9})$$

$$F(a, b; c; 1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} \quad (\text{D.10})$$

- Legendre-Funktionen  $P_n(z)$  [5]

$$P_n(z) = F(n+1, -n, 1, (1-x)/2) \quad (\text{D.11})$$

- adjungierte Legendre-Funktionen [20]

$$P_n^m(z) = (z+1)^{m/2} (z-1)^{-m/2} / \Gamma(1-m) F(n+1, -n, 1-m, (1-x)/2) \quad (\text{D.12})$$

- Jacobi-Polynome  $P_n^{(a,b)}(z)$  [20]

$$P_n^{(a,b)}(z) = (a+1)_n / n! F(-n, a+b+n+1; a+1, (1-z)/2) \quad (\text{D.13})$$

- Jacobi-Funktion  $\Phi_n^{(a,b)}(z)$  [20]

$$\Phi_n^{(a,b)}(z) = F((a+b+1-in)/2, (a+b+1+in)/2; a+1, -\sinh^2 z) \quad (\text{D.14})$$

- Elliptische Integrale  $E(z)$  und  $K(z)$ [20]

$$E(z) = \pi/2 F(-1/2, 1/2, 1, z^2) \quad (\text{D.15})$$

$$K(z) = \pi/2 F(1/2, 1/2, 1, z^2) \quad (\text{D.16})$$

- Chebyshev-Polynome  $T_n(z)$ [20]

$$T_n(z) = F(-n, n, 1/2, (1-z)/2) = \cos(n \arccos z) \quad (\text{D.17})$$

- ultrasphärische Polynome  $C_n^{(a)}(z)$  [20]

$$C_n^{(a)}(z) = (2a)_n/n! F(-n, n+2a; a+1/2; (1-z)/2) \quad (\text{D.18})$$

- allgemeine Beziehungen 1 [5]

$$F(a, n; a, x) = (1-x)^{-n} \quad (\text{D.19})$$

$$F(1, 1; 2; x) = -\ln(1-x)/x \quad (\text{D.20})$$

$$F(1/2, 1/2; 3/2; x^2) = \arcsin(x)/x \quad (\text{D.21})$$

- allgemeine Beziehungen 2 [20]

$$\lim_{b \rightarrow \infty} F(1, b; 1, z/b) = e^z \quad (\text{D.22})$$

$$F(1/2, 1; 3/2; z^2) = \ln((1+z)/(1-z))/(2z) \quad (\text{D.23})$$

$$F(1/2, 1; 3/2; -z^2) = \arctan(z)/z \quad (\text{D.24})$$

$$F(n/2, -n/2; 1/2; \sin^2 z) = \cos(nz) \quad (\text{D.25})$$

$$F((1+n)/2, (1-n)/2; 3/2; \sin^2 z) = \sin(nz)/(n \sin z) \quad (\text{D.26})$$

Die hypergeometrische Funktion lässt sich in Integraldarstellung und als Summe schreiben. Sie erfüllt die hypergeometrische Differentialgleichung.

- Differentialgleichung

$$0 = \left( z(1-z) \frac{\partial^2}{\partial z^2} + (c - (1+a+b)z) \frac{\partial}{\partial z} - ab \right) F(a, b; c; z) \quad (\text{D.27})$$

- Reihenentwicklung

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k z^k}{(c)_k k!} \quad (\text{D.28})$$

- Integraldarstellung

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{c-a-1} (1-zt)^{-b} dt \quad (\text{D.29})$$

**Es treten explizit folgende Lösungen auf.**

*Elliptische Integrale:* E in Gleichung (C.63)

$$m_1 = m_2 = 0 \quad \text{und} \quad \omega = 1 \quad (\text{D.30})$$

$$\underline{A} = (0, A_1, 0, 0) \quad \text{mit} \quad A_1 = \sin \tau F(-1/2, 1/2, 1, \sin^2 \vartheta) \quad (\text{D.31})$$

$$\underline{A} = (0, 0, A_2, 0) \quad \text{mit} \quad A_2 = \sin \tau F(-1/2, 1/2, 1, \cos^2 \vartheta) \quad (\text{D.32})$$

*Chebyshev-Polynome:* Diese Polynome treten recht häufig auf (Lösungen  $L_1$  und  $L_2$  nach Abschnitt 3.2.3 sowie die Lösungen nach Schroedinger, Abschnitt C.2.6). Bei den hypergeometrischen Funktionen gibt es vier Typen, die hier relevant sind (Beachte Ersetzung  $m_2 \leftrightarrow m_1$  und gleichzeitig  $\vartheta \leftrightarrow \pi/2 - \vartheta$ ):

1.  $F(-k, \omega - k, 1 + m_2, \sin^2 \vartheta)$

$$m_1 = m_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow F(\dots) = \frac{\sin \omega \vartheta}{\omega \sin \vartheta} \quad (\text{D.33})$$

$$m_1 = \frac{1}{2} \wedge m_2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow F(\dots) = \cos \omega \vartheta \quad (\text{D.34})$$

2.  $F(1 - k, \omega - k, 1 + m_2, \sin^2 \vartheta)$

$$m_1 = m_2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow F(\dots) = \cos(\omega - 1) \vartheta \quad (\text{D.35})$$

$$m_1 = -\frac{1}{2} \wedge m_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow F(\dots) = \frac{\sin(\omega - 1) \vartheta}{(\omega - 1) \sin \vartheta} \quad (\text{D.36})$$

3.  $F(-k, 1 + \omega - k, 1 + m_2, \sin^2 \vartheta)$

$$m_1 = m_2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow F(\dots) = \cos(\omega + 1) \vartheta \quad (\text{D.37})$$

$$m_1 = -\frac{1}{2} \wedge m_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow F(\dots) = \frac{\sin(\omega + 1) \vartheta}{(\omega + 1) \sin \vartheta} \quad (\text{D.38})$$

$$4. F(1 - k, 1 + \omega - k, 1 + m_2, \sin^2 \vartheta)$$

$$m_1 = -\frac{3}{2} \wedge m_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow F(\dots) = \frac{\sin \omega \vartheta}{\omega \sin \vartheta} \quad (\text{D.39})$$

$$m_1 = -\frac{3}{2} \wedge m_2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow F(\dots) = \cos \omega \vartheta \quad (\text{D.40})$$

### D.3 Entwicklungen der P-Funktion durch Mathematica

Die Angabe der beiden Lösungen der  $P$ -Funktion für alle möglichen Parameter erfordert einen größeren Aufwand. Die Einbindung in *Mathematica* erfolgt über das Paket `hypvoll.ma`, das im folgenden Abschnitt erläutert wird.

Definition der Pochhammer und  $\Psi$ -Funktionen:

$$\text{Pochhammer}[e,f] = (e)_f = e(e+1)(e+2) \cdots (e+f-1) = \Gamma(e+f)/\Gamma(e)$$

$$\text{PolyGamma}[a] = -\sum_{k=0}^{\infty} (a+k)^{-1}$$

```
ph[e_,f_] := Pochhammer[e,f]
```

```
psii[a_,b_,c_,i_] := PolyGamma[a+i] - PolyGamma[a] +
  PolyGamma[b+i] - PolyGamma[b] - PolyGamma[c+i] + PolyGamma[c] -
  PolyGamma[1+i] + PolyGamma[1]
```

```
psia[a_,b_,c_,i_] := -PolyGamma[1-a] + PolyGamma[-a-i+1] +
  PolyGamma[b+i] - PolyGamma[b] - PolyGamma[c+i] + PolyGamma[c] -
  PolyGamma[1+i] + PolyGamma[1]
```

```
psib[a_,b_,c_,i_] := -PolyGamma[1-b] + PolyGamma[-b-i+1] +
  PolyGamma[a+i] - PolyGamma[a] - PolyGamma[c+i] + PolyGamma[c] -
  PolyGamma[1+i] + PolyGamma[1]
```

```
psiab[a_,b_,c_,i_] := -PolyGamma[1-a] + PolyGamma[-a-i+1] +
  PolyGamma[-b-i+1] - PolyGamma[1-b] - PolyGamma[c+i] + PolyGamma[c] -
  PolyGamma[1+i] + PolyGamma[1]
```

```
psi[a_,b_,c_,i_] := psii[a,b,c,i] /; (a >= 0 && b >= 0)
```

```
psi[a_,b_,c_,i_] := psia[a,b,c,i] /; (a < 0 && b >= 0)
```

```
psi[a_,b_,c_,i_] := psib[a,b,c,i] /; (a >= 0 && b < 0)
```

```
psi[a_,b_,c_,i_]:=psiab[a,b,c,i]/;(a<0 && b<0)
```

Mit dieser Definiton sind auch alle negativen Werte für  $a$  und  $b$  zugelassen. Die  $\Psi$ -Funktion (`psi[.]`) tritt bei der Entwicklung der divergenten  ${}_2F_1$ -Funktion auf.

```
hfa[a_,b_,c_,d_]:=Hypergeometric2F1[a,b,c,d]
```

```
hfb[a_,b_,c_,d_]:=Sum[ph[a,i]ph[b,i]/ph[c,i]/i! d^(i),{i,0,-c}]
```

```
hfc[a_,b_,c_,d_]:=Sum[(-1)^(i-1)(i-1)!
```

```
ph[a,-i]ph[b,-i]/ph[c,-i] d^(-i),{i,1,c-1}]+
```

```
Log[d] hfa[a,b,c,d] +
```

```
Sum[ph[a,i]ph[b,i]/ph[c,i]/i! psi[a,b,c,i] d^(i),{i,0,Infinity}]
```

```
hfd[b_,c_,d_]:=-Sum[ph[b,-i]/ph[c,-i]/i d^(-i),{i,1,c-1}]+Log[d] +
```

```
Sum[ph[b,i]/ph[c,i]/i d^(i),{i,1,Infinity}]
```

```
hfe[a_,b_,c_,d_]:=-Sum[(-a)!ph[b,-i]/ph[c,-i]/ph[i,-a+1] d^(-i),{i,1,c-1}]+
```

```
Log[d] hfa[a,b,c,d] +
```

```
Sum[ph[a,i]ph[b,i]/ph[c,i]/i! psia[a,b,c,i] d^(i),{i,1,-a}]+
```

```
(-1)^(-a)(-a)!Sum[ph[b,i]/ph[c,i]/ph[i+a,1-a] d^(i),{i,1-a,Infinity}]
```

- Die Funktion `hfa` ist die normale hypergeometrische Funktion  ${}_2F_1$ .
- Die Funktion `hfb` ist die hypergeometrische Funktion  ${}_2F_1$  mit Abbruchbedingung ( $c$  ist ganzzahlig negativ sowie  $a$  oder  $b$  ganzzahlig negativ und größer als  $c$ )
- Die Funktion `hfc` ist die divergente hypergeometrische Funktion  $G[a,b,c,d]$  für  $(c) \in \{1, 2, 3, \dots\}$  und weder  $a$  noch  $b$  sind Elemente von  $\{\dots, -1, 0, 1, \dots, c-1\}$ .
- Die Funktion `hfd` ist die divergente hypergeometrische Funktion  $G[a,b,c,d]$  für  $(c) \in \{1, 2, 3, \dots\}$  und  $a = 0$ .
- Die Funktion `hfe` ist die divergente hypergeometrische Funktion  $G[a,b,c,d]$  für  $(c) \in \{1, 2, 3, \dots\}$  und  $(a) \in \{-1, -2, \dots\}$  und  $b \notin \{a+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, c-1\}$ .

hfa :  ${}_2F_1(a, b; c; d)$  für  $c \notin \{0, -1, -2, \dots\}$

hfb :  ${}_2F_1(a, b, c; d)$  für  $c \in \{0, -1, -2, \dots\} \wedge (a \vee b) \in \{0, -1, \dots, c\}$

hfc :  $G(a, b, c, d)$  für  $c \in \{1, 2, 3, \dots\} \wedge (a \wedge b) \notin \{\dots, -1, 0, 1, \dots, c-1\}$

hfd :  $G(0, b, c, d)$  für  $c \in \{1, 2, 3, \dots\} \wedge (a = 0 \vee b = 0)$

hfe :  $G(a, b, c, d)$  für  $c \in \{1, 2, 3, \dots\} \wedge a \in \{-1, -2, \dots\} \wedge b \notin \{a+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, c-1\}$

Mit diesen Definitionen lassen sich nun alle Lösungspaare der hypergeometrischen Funktion erzeugen:

Die erste Lösung:

fa[a\_, b\_, c\_, d\_] := hfa[a, b, c, d] / (Round[c] != c)

fa[a\_, b\_, c\_, d\_] := hfb[a, b, c, d] / (Round[c] == c && c < 1 && (Round[a] == a && a <= 0 && a >= c) || (Round[b] == b && b <= 0 && b >= c))

fa[a\_, b\_, c\_, d\_] := hfa[a, b, c, d] / (Round[c] == c && c > 1 && (Round[a] == a && a > 0 && a < c) || (Round[b] == b && b > 0 && b < c))

fa[a\_, b\_, c\_, d\_] := hfa[a, b, c, d] / (Round[c] == c && c > 0 && (Round[a] != a || a >= c) && (Round[b] != b || b >= c))

fa[a\_, b\_, c\_, d\_] := d^(1-c) hfa[1+a-c, 1+b-c, 2-c, d] / (Round[c] == c && c < 1 && (Round[a] != a || a < 0 || a > c) && (Round[b] != b || b < 0 || b > c))

fa[a\_, b\_, c\_, d\_] := 1 / (Round[c] == c && c > 0 && a == 0 && (Round[b] != b || b <= 0 || b >= c))

fa[a\_, b\_, c\_, d\_] := 1 / (Round[c] == c && c > 0 && b == 0 && (Round[a] != a || a <= 0 || a >= c))

fa[a\_, b\_, c\_, d\_] := hfa[a, b, c, d] / (Round[c] == c && c > 0 && Round[a] == a && a < 0 && (Round[b] != b || b <= a || b >= c))

fa[a\_, b\_, c\_, d\_] := hfa[a, b, c, d] / (Round[c] == c && c > 0 && Round[b] == b && b < 0 && (Round[a] != a || a < b || a >= c))

Die zweite Lösung:

fb[a\_, b\_, c\_, d\_] := d^(1-c) hfa[1+a-c, 1+b-c, 2-c, d] / (Round[c] != c)

fb[a\_, b\_, c\_, d\_] := d^(1-c) hfa[1+a-c, 1+b-c, 2-c, d] / (Round[c] == c && c < 1 && (Round[a] == a && a <= 0 && a >= c) || (Round[b] == b && b <= 0 && b >= c))



```

fb[a_,b_,c_,d_] := d^(1-c) hfb[1+a-c,1+b-c,2-c,d]/(Round[c]==c && c>1 && (
  (Round[a]==a && a>0 && a<c) || (Round[b]==b && b>0 && b<c)))
fb[a_,b_,c_,d_] := hfc[a,b,c,d]/(Round[c]==c && c>0 &&
  (Round[a]!=a || a>=c) && (Round[b]!=b || b>=c))
fb[a_,b_,c_,d_] := d^(1-c)hfc[1+a-c,1+b-c,2-c,d]/(Round[c]==c && c<1 &&
  (Round[a]!=a || a<0 || a>c)&&(Round[b]!=b || b<0 || b>c))
fb[a_,b_,c_,d_] := hfd[b,c,d]/(Round[c]==c && c>0 && a==0 &&
  (Round[b]!=b || b<=0 || b>=c))
fb[a_,b_,c_,d_] := hfd[a,c,d]/(Round[c]==c && c>0 && b==0 &&
  (Round[a]!=a || a<=0 || a>=c))
fb[a_,b_,c_,d_] := hfe[a,b,c,d]/(Round[c]==c && c>0 &&
  Round[a]==a && a<0 && (Round[b]!=b || b<=a || b>=c))
fb[a_,b_,c_,d_] := hfe[b,a,c,d]/(Round[c]==c && c>0 &&
  Round[b]==b && b<0 && (Round[a]!=a || a<b || a>=c))

```

Die Nebenbedingungen sind in übersichtlicher Form in Tabelle D.1 zusammengefaßt.

Darstellung der Lösungen von  $S_2$

$$\begin{aligned}
szaa &:= x^{(ma/2)}(1-x)^{(1+mb/2)} fa[1-k, 1+k+ma+mb, 1+ma, x] \\
szab &:= x^{(ma/2)}(1-x)^{(1+mb/2)} fb[1-k, 1+k+ma+mb, 1+ma, x] \\
szac &:= x^{(ma/2)}(1-x)^{(1+mb/2)} fa[1-k, 1+k+ma+mb, 2+mb, 1-x] \\
szad &:= x^{(ma/2)}(1-x)^{(1+mb/2)} fb[1-k, 1+k+ma+mb, 2+mb, 1-x]
\end{aligned}$$

Darstellung der Lösungen von  $D_2$

$$\begin{aligned}
dzaa &:= x^{(ma/2)}(1-x)^{(mb/2)} fa[-k, k+ma+mb, 1+ma, x] \\
dzab &:= x^{(ma/2)}(1-x)^{(mb/2)} fb[-k, k+ma+mb, 1+ma, x] \\
dzac &:= x^{(ma/2)}(1-x)^{(mb/2)} fa[-k, k+ma+mb, 2+mb, 1-x] \\
dzad &:= x^{(ma/2)}(1-x)^{(mb/2)} fb[-k, k+ma+mb, 2+mb, 1-x]
\end{aligned}$$

Darstellung der Lösungen von  $D_1$

$$daaa := x^{(1+ma/2)}(1-x)^{(mb/2)} fa[1-k, 1+k+ma+mb, 1+mb, 1-x]$$

$c \notin \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$	
$hfa[a, b, c, x]$	$x^{(1-c)}hfa[1 + a - c, 1 + b - c, 2 - c, x]$
$c \in \{0, -1, -2, \dots\} \wedge (a \vee b) \in \{0, -1, \dots, c\}$	
$hfb[a, b, c, x]$	$x^{(1-c)}hfa[1 + a - c, 1 + b - c, 2 - c, x]$
$c \in \{2, 3, 4, \dots\} \wedge (a \vee b) \in \{1, 2, \dots, c - 1\}$	
$hfa[a, b, c, x]$	$x^{(1-c)}hfb[1 + a - c, 1 + b - c, 2 - c, x]$
$c \in \{1, 2, 3, 4, \dots\} \wedge (a \wedge b) \notin \{\dots, -1, 0, 1, \dots, c - 1\}$	
$hfa[a, b, c, x]$	$hfc[a, b, c, x]$
$c \in \{0, -1, -2, \dots\} \wedge (a \wedge b) \notin \{0, -1, \dots, c\}$	
$x^{(1-c)}hfa[1 + a - c, 1 + b - c, 2 - c, x]$	$x^{(1-c)}hfc[1 + a - c, 1 + b - c, 2 - c, x]$
$c \in \{1, 2, 3, 4, \dots\} \wedge b \notin \{1, \dots, c - 1\} \wedge a = 0$	
$hfa[0, b, c, x] = 1$	$hfd[b, c, x]$
$c \in \{1, 2, 3, 4, \dots\} \wedge a \notin \{1, \dots, c - 1\} \wedge b = 0$	
$hfa[0, a, c, x] = 1$	$hfd[a, c, x]$
$c \in \{1, 2, 3, 4, \dots\} \wedge b \notin \{a + 1, \dots, -1, 0, 1, \dots, c - 1\} \wedge a \in \{-1, -2, \dots\}$	
$hfa[a, b, c, x]$	$hfe[a, b, c, x]$
$c \in \{1, 2, 3, 4, \dots\} \wedge a \notin \{b, \dots, -1, 0, 1, \dots, c - 1\} \wedge b \in \{-1, -2, \dots\}$	
$hfa[a, b, c, x]$	$hfe[b, a, c, x]$

Tabelle D.1: Zusammenstellung der hypergeometrischen Funktionen  $F(a, b, c, x)$ , die bei der Entwicklung der *P*-Funktion nach Gleichung (D.3) auftreten. Für jeden Parameterbereich von  $a, b$  und  $c$  gibt es zwei Lösungen (linke und rechte Spalte).

$$daab := x^{(1+ma/2)}(1-x)^{(mb/2)}fb[1-k, 1+k+ma+mb, 1+mb, 1-x]$$

$$daac := x^{(1+ma/2)}(1-x)^{(mb/2)}fa[1-k, 1+k+ma+mb, 2+ma, x]$$

$$daad := x^{(1+ma/2)}(1-x)^{(mb/2)}fb[1-k, 1+k+ma+mb, 2+ma, x]$$

Darstellung der Lösungen von  $S_1$

$$saaa := x^{(ma/2)}(1-x)^{(mb/2)}fa[-k, k+ma+mb, 1+mb, 1-x]$$

$$saab := x^{(ma/2)}(1-x)^{(mb/2)}fb[-k, k+ma+mb, 1+mb, 1-x]$$

$$saac := x^{(ma/2)}(1-x)^{(mb/2)}fa[-k, k+ma+mb, 2+ma, x]$$

$$saad := x^{(ma/2)}(1-x)^{(mb/2)}fb[-k, k+ma+mb, 2+ma, x]$$

Darstellung der Lösung mit der Nebenbedingung  $adreja \stackrel{!}{=} adreiz$

$$adreiz := czaa \cdot szaa + czab \cdot szab + czba \cdot dzaa + czbb \cdot dzab$$

$$adreja := caaa \cdot saaa + caab \cdot saab + caba \cdot daaa + cabb \cdot daab$$

$$aeins := caaa \cdot saaa + caab \cdot saab - caba \cdot daaa - cabb \cdot daab$$

$$azwei := czaa \cdot szaa + czab \cdot szab - czba \cdot dzaa - czbb \cdot dzab$$

Ein paar Beispiele für die Lösungen der Maxwellgleichung mit  $m_1 = m_2 = 2(1)$ ,  $\omega = 2k + m_1 + m_2 =$  und  $k = -1(0)$ .

1. ( $m_1 = m_2 = 2, k = -1$ ):

$\begin{pmatrix} A_1(z) \\ A_2(z) \\ \hat{A}_3(z) \end{pmatrix}$	$\frac{1-x}{x} \begin{pmatrix} 1+x \\ x \\ -1 \end{pmatrix}$	$\frac{1-x}{x} \begin{pmatrix} x \\ -1 \\ x \end{pmatrix}$	$\frac{x}{1-x} \begin{pmatrix} 1-x \\ 2-x \\ 1 \end{pmatrix}$	$\frac{x}{1-x} \begin{pmatrix} 1 \\ -(1-x) \\ (1-x) \end{pmatrix}$
--	--	--	---	--

Geprüft auf Divergenzfreiheit und Erzeugung.

2. ( $m_1 = m_2 = 1, k = -1$ ):

$\begin{pmatrix} A_1(z) \\ A_2(z) \\ \hat{A}_3(z) \end{pmatrix}$	$\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\frac{\sqrt{1-x} \ln(1-x)}{\sqrt{x}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$	$+$	$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
	$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\frac{\sqrt{x} \ln x}{\sqrt{1-x}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$+$	$\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

3. ( $m_1 = m_2 = 2, k = 0$ ):

$\begin{pmatrix} A_1(z) \\ A_2(z) \\ \widehat{A}_3(z) \end{pmatrix}$	$x(1-x)$	$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\frac{1-x}{x}$	$\begin{pmatrix} 1 + 2x + 9x^2 \\ (1-x)(1+3x) \\ (1-x)(1+3x) \end{pmatrix}$
$\infty$ -Summe?			$\frac{x}{1-x}$	$\begin{pmatrix} 6 - 16x + 9x^2 \\ 6 - 8x + 3x^2 \\ 6 - 8x + 3x^2 \end{pmatrix}$

# Kapitel E

## Abkürzungen und Definitionen

Hier werden die wichtigsten der in dieser Arbeit benutzten Abkürzungen Formelzeichen und Begriffe erläutert.

$$\mathbb{N}^0 : \text{ alle natürlichen Zahlen } (\{0, 1, 2, 3, \dots\}) \quad (\text{E.1})$$

$$\mathbb{N}^+ : \text{ alle positiven natürlichen Zahlen } (\{1, 2, 3, \dots\}) \quad (\text{E.2})$$

$$\mathbb{Z} : \text{ alle ganzen Zahlen} \quad (\text{E.3})$$

$$\mathbb{R} : \text{ alle reellen Zahlen} \quad (\text{E.4})$$

$$\mathbb{R}^+ : \text{ alle positiven reellen Zahlen} \quad (\text{E.5})$$

$$\mathbb{C} : \text{ alle komplexen Zahlen} \quad (\text{E.6})$$

$$\Phi_{(0)} : \text{ 0-Form, Klein-Gordon-Feld} \quad (\text{E.7})$$

$$A_{(1)} : \text{ 1-Form} \quad (\text{E.8})$$

$$R : \text{ Krümmungsskalar} \quad (\text{E.9})$$

$$R_{S^3} : \text{ Radius der Sphäre } S^3 \quad (\text{E.10})$$

$$\ast : \text{ Hodge-Dual-Operator} \quad (\text{E.11})$$

$$\text{diag}(a, b, \dots, c) : \text{ Matrix mit Werten } a, b, \dots, c \text{ auf Hauptdiagonalen, sonst Null} \quad (\text{E.12})$$

$$X^i : \text{ Generator einer konf. Transformation als Differentialoperator} \quad (\text{E.13})$$

$$\widetilde{X}^i : \text{ Generator einer konformen Transformation als } su(2, 2)\text{-Matrix} \quad (\text{E.14})$$

$$\Delta := \frac{1}{\cos^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi_1^2} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi_2^2} + \frac{1}{\sin \vartheta \cos \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \cos \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \quad (\text{E.15})$$

(Laplace-Operator von  $S^3$  für skalares Feld)

$$\square := \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \Delta = \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \frac{1}{\cos^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi_1^2} - \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi_2^2} - \frac{1}{\sin \vartheta \cos \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \cos \vartheta \frac{\partial}{\partial \lambda} \quad (\text{E.16})$$

(d'Alembert-Operator von  $S^1 \times S^3$  für skalares Feld)

obere Indizes

$$(\cdot)^* : \text{komplex-konjugiert} \quad (\text{E.17})$$

$$(\cdot)^T : \text{transponiert} \quad (\text{E.18})$$

$$(\cdot)^* : \text{transponiert (Matrix) und komplex-konjugiert} \quad (\text{E.19})$$

$$(\cdot)^\dagger : \eta_{(2,2)}\text{-transponiert (Spinor) und komplex-konjugiert} \quad (\text{E.20})$$

spezielle Definitionen

$$V : \text{exponentieller Vorfaktor, resultiert aus Separationsansatz}$$

$$V = e^{i(\omega\tau + m_1\varphi_1 + m_2\varphi_2)} \quad (\text{E.21})$$

$$\eta = \text{diag}(1, -1, -1, -1) \quad M^4\text{-Metrik} \quad (\text{E.22})$$

$$\eta_{(2,2)} = \text{diag}(1, 1, -1, -1) \quad SU(2, 2)\text{-Metrik} \quad (\text{E.23})$$

$$F(a, b, c; x) = {}_2F_1(a, b, c; x) \quad \text{hypergeometrische Funktion} \quad (\text{E.24})$$

$$z = \cos^2 \vartheta \quad (\text{E.25})$$

**singuläre Punkte** : Die singulären Punkte sind diejenigen Werte  $s_\vartheta$ , an denen die Determinante der Metrik  $g_{\mu\nu}$  verschwindet. So hat man z.B. an dem Punkt  $\vartheta = 0$  ein verschwindendes Maß für  $\varphi_2$ , und das  $\varphi_1$ -Maß wird maximal. Analog zu den gewöhnlichen Kugelkoordinaten ist dieser Punkt also ein *Pol* für  $\varphi_2$  und ein *Äquator* für  $\varphi_1$ . Im  $U(2)$ -Programm entspricht der Äquator der *Seele* des Torus.

**harmonische Funktion** : Eine (skalare) Funktion  $\Phi$  ist dann harmonisch, wenn  $\square\Phi = -(d\delta + \delta d)\Phi = 0$  gilt. Eine 1-Form  $A_{(1)}$  ist dann harmonisch, wenn  $(d\delta + \delta d)A_{(1)} = 0$  gilt.

**P-Funktionen, verwandte** : Zwei P-Funktionen sind dann verwandt, wenn vier der Koeffizienten  $(\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma')$  in beiden Funktionen dieselben Werte annehmen und die beiden übrigen Koeffizienten sich genau um  $\pm 1$  unterscheiden.

**Eichung, erste** : Eichung der Maxwellgleichung mit

$$A_\tau \equiv 0 \quad \text{für } \omega \neq 0 \quad \text{und} \quad (\text{E.26})$$

$$\operatorname{div} A \equiv 0 \quad \text{für } \omega = 0 \quad (\text{E.27})$$

**Eichung, zweite** : Eichung der Maxwellgleichung mit

$$A_\theta \equiv 0 \quad (\text{E.28})$$

**(quasi-)primäre Felder** : Ein primäres (quasiprimäres) Feld  $(T_{a\dots\mu\dots}{}^{b\dots\nu\dots})$  besitzt die Skalendimension  $d(T) = 0$  ( $\neq 0$ ). Ob ein Feld primär, quasiprimär oder keines von beiden ist, läßt sich erst nach Angabe des Lagrangeans entscheiden. Die kinetischen Terme für ein skalares Feld  $(\partial_\mu \Phi_{(0)} \partial^\mu \Phi_{(0)})$ , einen Dirac–Spinor  $(\Psi^\dagger \gamma^\mu \partial_\mu \Psi)$  und ein Eichfeld  $(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, F = dA)$  führen zu den Skalendimensionen  $d(\Phi_{(0)}) = 1$ ,  $d(\Psi) = 3/2$  und  $d(A) = 0$ . Ein  $SU(2,2)$ –Spinor  $\Psi_{(2,2)}$  besitzt die Skalendimension  $d(\Psi_{(2,2)}) = 2$ .

**ausgezeichnetes Koordinatensystem** : Es ist möglich, eine Parametrisierung von  $S^1 \times S^3$  zu wählen, bei der Funktionen (Lösungen der Feldgleichungen) existieren, die zu allen drei  $U(1)$  Untergruppen (Cartan-Subalgebra) der  $SU(2,2)$  gleichzeitig Eigenlösungen sind. Nach [24] gibt es für  $S^3$  genau eine derartige Wahl für separierbare Koordinatensysteme.

**Spinoren** Unter einem Spinor wird in dieser Arbeit ein vierelementiges Objekt verstanden, daß in der fundamentalen Darstellung der  $SU(2,2)$ –Gruppe liegt. Er liegt gleichzeitig in der Spinordarstellung von  $SO(4,2)$ , der reellen konformen Gruppe des Minkowskiraumes. Wenn Spinoreigenschaften untersucht werden, dann soll der zugehörige Spinor im  $M^4$  definiert sein, da die Angabe einer Transformation von Spinoren bei der Abbildung von  $S^1 \times S^3$  nach  $M^4$  (noch) nicht möglich ist. Im  $U(2)$ –Programm wird das Urbild eines  $M^4$ –Spinors nicht mit einem Spinor in  $S^1 \times S^3$  identifiziert. Der 'klassische' Spinor wird Dirac–Spinor genannt. Er entspricht einem  $SU(2,2)$ –Spinor, solange nur die Lorentz–Transformationen betrachtet werden.

# Literaturverzeichnis

- [1] A. O. Barut and R. Raczka. *Theory of Group Representations and Applications*. PWN Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1977.
- [2] H. Bateman. The transformation of the electrodynamical equations. *Proc. Lond. Math. Soc.*, 8:223–264, 1910.
- [3] H. Bateman and A. Erdelyi (Ed.). *Higher Transcendental Functions*. McGraw-Hill book company, Inc., 1953.
- [4] N. D. Birrell and P. C. W. Davies. *QFT in Curved Space*. Cambridge Univ. Press, 1982.
- [5] I.N. Bronstein and K.A. Semendjajew. *Taschenbuch der Mathematik*. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, 23 edition, 1987.
- [6] E. Cunningham. The principle of relativity in electrodynamics and an extension thereof. *Proc. Lond. Math. Soc.*, 8:77–98, 1910.
- [7] P. A. M. Dirac. Relativistic Wave Equations. *Proc. Roy. Soc. London*, A(155):447–459, 1936.
- [8] E. Donth. Private Aufzeichnungen und Mitteilungen.
- [9] E. Donth. Lösung der quelfreien Maxwell'schen Gleichungen auf  $S^3 \times S^1$ . *Experimentelle Technik der Physik*, 32(3):213–220, 1984.
- [10] E. Donth. Elektrische Ladungen als symmetrische Wellenfelder auf der kompakten Mannigfaltigkeit  $U(2)$ . *Wissenschaftliche Zeitschrift TH Leuna-Merseburg*, 28(6):680–694, 1986.



- [11] E. Donth. Common Tangent Space  $R_1^4$  from  $U(2)$  Charges. *International Journal of Theoretical Physics*, 27(12):1461–1497, 1988.
- [12] E. Donth.  $U(2)$  Programm Part 1. Physical Analysis of the Space Problem. *Wissenschaftliche Zeitschrift TH Leuna-Merseburg*, 33:89–104, 1991.
- [13] E. Donth.  $U(2)$  Programm Part 2. First order calculation of fine structure constant and Weinberg angle. *Wissenschaftliche Zeitschrift TH Leuna-Merseburg*, 33:265, 1991.
- [14] E. Donth and O. Lange. Orthogonal Harmonic Polynomials on  $U(2)$ . *International Journal of Theoretical Physics*, 25(12):1235–1255, 1986.
- [15] M. Flato, J. Simon, and D. Sternheimer. Conformal covariance of field equations. *Annals of Physics*, 61:78–97, 1970.
- [16] P. Di Francesco, P. Mathieu, and D. Senechal. *Conformal Field Theory*. Springer Verlag, 1997.
- [17] M. Gell-Mann and Y. Ne'eman. *The Eight-fold Way*. Benjamin, New York, 1964.
- [18] R. Gilmore. *Lie groups, Lie algebras, and some of their applications*. Krieger Publishing Company, Malabar, Florida, 1994.
- [19] G. Grosche, editor. *Teubner-Taschenbuch der Mathematik*. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, 1995.
- [20] M. Hazewinkel, editor. *Encyclopaedia of mathematics*. Dordrecht [u.a.] : Kluwer, 1988.
- [21] A. Iorio, L. O'Raiheartaigh, I. Sachs, and C. Wiesendanger. Weyl-Gauging and Conformal Invariance. *hep-th/9607110*, 1996.
- [22] H. P. Jakobsen, B. Ørsted, I.E. Segal, B. Speh, and M. Vergne. Symmetry and causality properties of physical fields. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, pages 1609–1611, 1978.
- [23] H. F. Jones. *Groups, representations and physics*. IOP Publishing Ltd, 1990.
- [24] E.G. Kalnins, W. Miller Jr., and P. Winternitz. The group  $o(4)$ , separation of variables and the hydrogen atom. *SIAM J.Appl.Math.*, 30(4):630–664, 1976.

- [25] F. Klein. *Vorlesungen über die hypergeometrische Funktion*. Springer Verlag, 1933.
- [26] F. Klein. *Funktionentheorie in geometrischer Behandlungsweise*. BSB Teubner, 1987.
- [27] G. Mack. Introduction to conformal invariant Quantum Field Theory in two and more dimensions. In G. T'Hooft, editor, *Nonperturbative Quantum Field Theory*, 1988.
- [28] J. Mickelsson and J. Niederle. Conformally covariant field equations. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, A 23(3):277–295, 1975.
- [29] N. E. Nörlund. The logarithmic solutions of the hypergeometric equation. *Matematisk.fysiske Skrifter*, 2(5):1 – 58, 1963.
- [30] O. Perron. Über das Verhalten der hypergeometrischen Reihe bei unbegrenztem Wachstum eines oder mehrerer Parameter. *Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften*, A.9:1 – 24, 1916.
- [31] M. E. Peskin. Spin, Mass, and Symmetry. *SLAC-PUB-6453*, 1994.
- [32] M.I. Petraschen and E.D. Trifonow. *Anwendung der Gruppentheorie in der Quantenmechanik*. Akademie-Verlag Berlin, 1969.
- [33] L. H. Ryder. Dirac monopoles and the Hopf map  $S^3 \rightarrow S^2$ . *Journ. Phys. A.: Math. Gen.*, 13:437–447, 1980.
- [34] E. Schrödinger. Maxwell's and Dirac's Equations in the Expanding Universe. *Proceedings of the Royal Irish Academie*, 46 A:25 – 47, 1940.
- [35] I. E. Segal. *Mathematical Cosmology and Extragalactic Astronomy*. Academic Press, New York, 1976.
- [36] H. Stephani. *Allgemeine Relativitätstheorie*. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1991.
- [37] J. Tits. Colloque sur la théorie de la relativité. *Centre Belge Recherches Math.*, 107, 1960.

# LEBENS LAUF

## Persönliche Daten

Name : Karsten Busse  
Wohnort : Hardenbergstr. 21, 06114 Halle / Saale  
Telefon : 0345 / 290 52 72  
Geburtsdatum, -ort : 10.01.1968 in Bad Harzburg  
Familienstand : ledig

## Ausbildung

08/1974 - 07/1978 : Grundschule Hohegeiß / Harz  
08/1978 - 06/1980 : Orientierungsstufe Braunlage  
08/1980 - 06/1984 : Gymnasium Braunlage  
08/1984 - 06/1987 : Gymnasium Bad Harzburg  
Abschluß: Abitur  
07/1987 - 09/1988 : Bundeswehr  
10/1988 - 02/1994 : Physik-Studium an der TU Braunschweig  
Abschluß: Diplom  
seit 09/1994 : Promotion an der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg  
Fachbereich Physik

## Studienabschnitte

01.10.1988 : Immatrikulation  
22.10.1990 : Diplomvorprüfung  
10/1990 - 02/1991 : Veranstaltung zur Fachkunde im Strahlenschutz  
08/1991 - 09/1991 : Sommerferienpraktikum beim HASYLAB  
10/1992 - 11/1993 : Diplomarbeit bei ARGUS  
14.02.1994 : Diplomprüfung

Halle / Saale, den 06.07.1998

### Eidesstattliche Erklärung

Hiermit erkläre ich, daß ich die vorliegende Arbeit selbständig und unter Verwendung der angegebenen Hilfsmittel verfaßt habe.

Die Arbeit wurde bisher an keiner anderen wissenschaftlichen Einrichtung als Dissertation eingereicht.

Halle / Saale, den 06.07.1998