Kapitel 1

Einleitung

1.1 Vorwort

Die Beschreibung der Natur, besonders die Beschreibung der Elementarteilchen und ihrer Wechselwirkungen, hat seit Tausenden von Jahren die Physiker und Philosophen beschäftigt. Die Entwicklung von den *Atomen* Demokrits bis zu den *Quarks* von Gell-Mann und Zweig [17] ging einher mit dem technischen Fortschritt. Das Wissen über elementare Prozesse erwuchs aus Messungen und Erfahrungen; diese führten zu Theorien, und diese wiederum erzeugten Vorhersagen, die durch weitere Messungen überprüft werden mußten. Auf diesem Wege hat sich das Standardmodell der Elementarteilchen entwickelt, das den derzeitigen Wissensstand sehr gut beschreiben kann und zudem noch Vorhersagen über weitere Teilchen (Higgs) macht.

Das Standardmodell wird aber nicht als eine endgültige Theorie gesehen, denn es stellt nur eine phänomenologische Beschreibung der Natur dar, und es scheinen keine schlüssigen Zusammenhänge zwischen den einzelnen Aussagen zu stehen. Man benötigt z.B. die Symmetriegruppe $(SO(3,1) \otimes T^4) \times U(1) \times SU(2)_L \times SU(3)$ und eine Reihe von Parametern, wie die Feinstrukturkonstante α, den Weinbergwinkel θ_W, die Kopplungskonstante der starken Wechselwirkung α_S, die Teilchenmassen und die Cabibbo-Kobayashi-Maskawa-Matrix. Um zwischen diesen freien Parametern Zusammenhänge zu finden, werden neue Theorien aufgestellt, die (a) das Spektrum und die Gesetze des Standardmodells reproduzieren, dabei (b) eine höhere (einfacher zu beschreibende) Symmetrie besitzen, deren Brechung zu der gesuchten Symmetrie und eventuell zu den auftretenden Parametern führt sowie (c) potentielle Unstimmigkeiten des Standardmodells, z.B. bei Nichtexistenz des Higgs–Teilchens, umgehen.

Obwohl nicht klar ist, wie so eine übergeordnete Theorie aussehen könnte, werden einzelne Ansätze ausgeschlossen : Die Kaluza–Klein–Theorien erweitern den Minkowski–Raum $\mathbb{M}^4$ um eine heranmultiplizierte Mannigfaltigkeit ($M^4 \rightarrow M^4 \times M_{KK}$), deren Symmetriegruppe zu den Wechselwirkungen führen soll. Dabei können diese Theorien aber nicht die Chiralität erzeugen, die für die elektroschwache Theorie notwendig ist. Ein in den sechziger und siebziger Jahren erprobter Ansatz, eine Theorie mit einem konform invarianten Lagrangean, würde notwendig zu einem skalenunabhängigen Verhalten führen, dem z.B. die deutlich verschiedenen Massen der Elementarteilchen widersprechen (siehe z.B. [27]).

Als vielversprechendste Ansätze gelten zur Zeit die Supergravitation und die Stringtheorie. Eine geschlossene Darstellung, die zum Standardmodell führt, ist aber auch hier noch nicht zu erkennen.

In dieser Arbeit wird ein weiterer Ansatz untersucht, der von Donth in den letzten fünfzehn Jahren entwickelt und teilweise veröffentlicht wurde [9]-[14]: das $U(2)$–Programm. Hierzu gibt es auch eine Reihe von unveröffentlichten Manuskripten, die mir bei der Abfassung der Arbeit zur Verfügung standen [8]. Ihnen ist auch die im Anhang, Abschnitt A, stehende Kurzfassung dieses Ansatzes im Stand von 1994, zu Beginn der vorliegenden Arbeit, entnommen, auf der die im nächsten Abschnitt folgende Beschreibung basiert.

Ausgangspunkt des $U(2)$–Programms ist eine Mannigfaltigkeit mit der Topologie $S^1 \times S^3$ und Minkowski–artiger (1+3)-Signatur. Dabei wird eine Raum-Parametrisierung gewählt, bei der Lösungen (der Maxwell- und der Klein-Gordon-Gleichung) existieren, die zu allen drei $U(1)$-Untergruppen der $SU(2,2)$, also zu den Erzeugenden der Cartan–Unteralgebra, simultane Eigenlösungen sind. In einem Artikel von E. Schrödingers [34] werden mit der gleichen Parametrisierung Lösungen der Maxwellgleichung (und mit einer anderen Parametrisierung Lösungen der Dirac-Gleichung) in $S^1 \times S^3$ gefunden, die jedoch wegen einer zusätzlichen Zwangsbedingung nur eine Teilmenge aller Lösungen darstellen und zudem nur als Feldstärken und nicht als Vektorpotentiale formuliert werden.

Ein wichtiger Punkt für das Verständnis des $U(2)$–Programms ist die Frage nach der

Querverbindung zu anderen Theorien. Hierbei bietet sich ein Zugang über die Symmetrieeigenschaften an, da die konformen Gruppen von $S^1 \times S^3$ und $\mathbb{M}^4$ identisch sind. Diese Eigenschaft liegt darin begründet, daß $(S^1 \times S^3)/\mathbb{Z}_2$ die konforme Kompaktifizierung des Minkowski–Raumes ist. Diese Räume spielen, wie auch die universelle Überlagerungsmannigfaltigkeit $R^1 \times S^3$, bei mehreren Autoren eine Rolle [15, 18, 22, 28, 35]. Die Arbeiten sind teilweise auch für das $U(2)$–Programm relevant, besonders aber die ausführliche Beschreibung der konformen Symmetrie in vier Dimensionen und der Lösungen der Klein-Gordon-Gleichung, die in dem Buch *Theory of Group Representations and Applications* von Barut und Raczka [1] sowie in dem Artikel von Kalnins et al. [24] zu finden sind.

1.2 Das $U(2)$–Programm

Das $U(2)$–Programm ist ein Versuch, die Phänomene der Elementarteilchenphysik aus einigen wenigen Grundannahmen heraus abzuleiten. Dabei spielen teilweise naturphilosophische Aspekte eine Rolle, weswegen man das Programm (noch) nicht in einer geschlossenen mathematischen Form darstellen kann. Die Grundannahmen des $U(2)$–Programms bestehen aus acht Punkten, welche als **U1** bis **U8** in der Formulierung von Donth [8, Stand des $U(2)$–Programms 1994] im Anhang, Abschnitt A, angegeben sind. Die folgende Darstellung beruht im wesentlichen auf diesen Punkten. Es wird aber versucht, den mathematischen Gehalt stärker zu betonen und weitere Aspekte, besonders die im $U(2)$–Programm nicht berücksichtigte Konformität, einzuarbeiten.

Aus der Kenntnis heraus, daß die elektrische Ladung nur diskret auftritt, wird angenommen, daß eine kompakte Mannigfaltigkeit die natürliche Quelle für Elektromagnetismus darstellt (**U1**). Denn eine kompakte Mannigfaltigkeit ermöglicht eine Entwicklung von Feldern nach Wellen, die ein diskretes Eigenwertspektrum besitzen. Der Radius der Mannigfaltigkeit R_{S3} darf dabei keine Rolle spielen. Speziell der Grenzfall $R_{S3} \to \infty$ muß erlaubt sein, da dieser für die Erklärung der instantanen Fernwirkung eines quantenmechanischen Experiments[1]

[1] Von Einstein als 'spukhafte Fernwirkung' (engl. *„spooky action at a distance“*) bezeichnet. Wird auch durch 'Kollaps der Wellenfunktion' beschrieben.

herangezogen wird (**U2**). Die Felder hängen auf der kompakten Mannigfaltigkeit nur von den internen Winkeln ab, der beliebig große Radius besitzt genausowenig Relevanz wie der Abstand eines Teilchen–Teilchen–Paares mit instantaner Fernwechselwirkung.

Für eine mathematische Beschreibung dieses Aspektes heißt dies speziell, daß eine Streckung (Dilatation) des kompakten Raumes eine invariante Operation sein muß.

Als Mannigfaltigkeit wird ein Raum mit der Topologie $S^1 \times S^3$ und pseudoriemannscher Signatur (1+3) angesetzt. Dabei werden als Parametrisierung biharmonische Koordinaten gewählt (**U3** und **U4**). Diese Wahl ist natürlich, wenn man bedenkt, daß $S^1 \times S^3$ die einfachste kompakte Überdeckung des $I\!M^4$ ist und die biharmonischen Koordinaten ein ausgezeichnetes Koordinatensystem darstellen. Die Auszeichnung manifestiert sich vor allem in der Beschreibung der Symmetriegruppe, die in Abschnitt 2.3.1 behandelt wird.

Die Maxwellgleichungen bilden den Ausgangspunkt für weitere Untersuchungen. Sie sind konform invariant, verhalten sich also für beliebigen Radius R_{S3} immer gleich und sie stehen für langreichweitige Kräfte, ihre Lösungen sind also auf der gesamten Mannigfaltigkeit - im Gegensatz zur schwachen Wechselwirkung, die auf lokale Operatoren zurückgeführt wird - definiert.

Nach der Entwicklung der Vektorpotentiale in Eigenfunktionen (**U5**) werden diese weiter in Vakuumelemente zerlegt. Die Statistik dieser Vakuumelemente führt für große Eigenwerte (Meßprozeß führt zu Erwartungswert, der als Mittelung über alle möglichen Zustände gewonnen wird) zu einer diskreten, unendlich hohen Stufe, die mit der Punktförmigkeit der Elementarteilchen im $I\!M^4$ in Verbindung gebracht wird (**U6**). Neben der Identifizierung von einzelnen Symmetrien des Raumes und der Eigenlösungen mit Ladungssymmetrie (e^+, e^-) sowie den Generationen von Leptonen, verbleiben nur noch wenige Freiheitsgrade, wobei ein Differentialoperator mit der Erzeugung von Massen in Verbindung gebracht wird (**U8**).

Die Erzeugung von Objekten und Zusammenhängen im $I\!M^4$ aus den Erkenntnissen, die im $S^1 \times S^3$ gewonnen wurden, geschieht über mehrere Stufen (**U7**), was im Rahmen dieser Arbeit aber nicht näher betrachtet wird.

1.3 Ziel der Arbeit

Das Ziel der Arbeit ist es, einige (der vielen) offene(n) Fragen des $U(2)$–Programms zu beantworten.

Dabei werden drei Themenkomplexe angesprochen:

1. Die mit der Maxwellgleichung verbundene Symmetrie ist die vollständige konforme Gruppe. Da $S^1 \times S^3$ zudem eine Überlagerungsmannigfaltigkeit des $I\!M^4$ darstellt, wirkt auf beiden Räumen dieselbe konforme Symmetriegruppe $SO(4,2)$ bzw. $SU(2,2)$. Durch die Angabe der zugehörigen Differentialoperatoren werden die ursprünglich sieben Generatoren (die eigentlichen Killingvektoren des Raumes) um acht weitere ergänzt. Dabei ergibt sich eine 'natürliche' Erklärung für die Chiralität (also der Unterscheidung von 'rechts' und 'links' bei Wechselwirkungen). In Kapitel 2 der vorliegenden Arbeit werden die diesbezüglichen Ergebnisse und Ergänzungen zum $U(2)$–Programm dargelegt.

2. Nach den Punkten U5 und U6 wird den Eigenlösungen der quellenfreien Maxwell–Gleichungen eine besondere Bedeutung zugemessen. Im $U(2)$–Programm war nicht sichergestellt, wodurch die bisher bevorzugten 'komponententreuen' Lösungen der Maxwellgleichung explizit ausgezeichnet sind - bzw. daß keine anderen, ähnlich wichtigen Lösungen existieren. Erst mit Angabe des vollständigen Satzes der Eigenlösungen der Maxwell–Gleichung bezüglich der gewählten Basis ist die Möglichkeit gegeben, die Auszeichnung einzelner Lösungen genauer anzugeben. Mit der Wahl aller harmonischen 1-Formen, die nur tangential entlang der Tori wirken, treten neben den beiden bekannten komponententreuen (die A_1- und A_2–Lösungen) noch eine weitere einkomponentige (A_0–Lösung) und eine *Drittellösung* auf.

   Die Eigenlösungen lassen sich als Kombination von komplexen Phasen und einer statistischen Verteilung von sogenannten *Vakuumelementen* (die im gewissen Sinn die Rolle von Quanten einnehmen) auffassen, wobei die Statistik aus Bose–Einstein und Fermi–Dirac zusammengesetzt ist. Mit dieser Verteilung und den Vakuumelementen werden im $U(2)$–Programm Erwartungswerte für die Feinstrukturkonstante und den Weinbergwinkel berechnet.

Die Eigenlösungen der Maxwell–Gleichungen, ergänzt um die der Klein–Gordon–Gleichung, welche für die Symmetriebetrachtungen interessant sind, bilden den Kernpunkt des Kapitels 3.

3. Wenn das $U(2)$–Programm ein richtiger Weg ist, wo liegen dann die Parallelen zu anerkannten Quantenfeldtheorien, die ja teilweise hervorragende Ergebnisse aufzuweisen haben? Die Beantwortung dieser Frage im letzten Kapitel dieser Arbeit trennt sich in manchen Punkten von dem bisherigen Programm (oder widerspricht ihm teilweise sogar). Es wird versucht, und dies ist als spekulativer Ansatz zu verstehen, das $U(2)$–Programm über eine konform invariante Theorie mit dem Standardmodell zu verknüpfen.

Im $U(2)$–Programm sind noch viele Details ungeklärt, daher werden einige Aspekte einer Elementarteilchentheorie außen vor gelassen oder nur als spekulative Ansätze diskutiert. Zum Teil werden in dieser Arbeit auch Aspekte, die diese spekulativen Ansätze betreffen, aufgegriffen. Darüber hinaus sind einzelne Zwischenergebnisse und kleinere Rechnungen für das $U(2)$-Programm relevant. Zu den zusätzlichen Ergebnissen in bezug auf das $U(2)$–Programm gehören z.B. Indizien für die starke Wechselwirkung und eine Verknüpfung eines $U(2)$–*Massenoperators* ∂_ϑ mit den Symmetrieoperatoren.

Bei der Beschäftigung mit dem $U(2)$–Programm ergaben sich jedoch auch einige Aspekte, deren Motivation nicht nachvollzogen werden konnte. Möglicherweise fehlen nur Zwischenschritte, aber dennoch bedürfen diese Punkte einer ausführlicheren Auseinandersetzung. Zu diesen Aspekten gehören z.B. die Abbildung in den Minkowskiraum, die Existenz von genau drei Generationen und die Bestimmung der Massen der Elementarteilchen.

Wichtige Ergebnisse dieser Arbeit für das $U(2)$–Programm werden in Abschnitt 4.1 zusammengefaßt dargestellt.