

Kapitel 2

Raum– und Symmetriebetrachtungen

2.1 Allgemeines

Die zugrundeliegende Mannigfaltigkeit besteht aus einem räumlichen Anteil, der von der 3-Sphäre S^3 gebildet wird und einem zeitlichen S^1 Anteil. Die relevanten topologischen Eigenschaften sind (unter Verwendung der Definitionen nach [5, 19], die auch in den folgenden Abschnitten die maßgeblichen Referenzen sind):

1. Die Betti-Zahlen β_i dieser Mannigfaltigkeit, also die Dimensionen der Kohomologiegruppen, lauten: $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 0$, $\beta_3 = 1$ und $\beta_4 = 1$.
2. Die Eulersche Charakteristik $\chi(S^1 \times S^3)$ verschwindet demnach:
$$\chi(S^1 \times S^3) = \sum (-1)^i \beta_i = 0.$$
3. Weil die zweite Kohomologiegruppe trivial ist ($\beta_2 = 0$), gibt es keinen wesentlichen 2-Zyklus. Eine 2-Form $F_{\mu\nu}$ kann auf ein global definiertes Potential A_μ mit $F = dA$ zurückgeführt werden, wenn $dF = 0$ gilt.
4. Weil die Eulersche Charakteristik verschwindet, gibt es stetige und nullstellenfreie Vektorfelder auf S^1 und S^3 .

Für die Parametrisierung der Sphäre S^3 bieten sich die biharmonischen Koordinaten an [24, 1]. Dieses Koordinatensystem ermöglicht nicht nur die Variablenseparation für die Lösungen der Klein–Gordon– und der Maxwell–Gleichung, sondern erlaubt zusätzlich die

Darstellung von Eigenfunktionen bezüglich der vollständigen Cartan-Subalgebra von der Symmetriegruppe von S^3 . Es stellt insofern ein ausgezeichnetes Koordinatensystem dieser Mannigfaltigkeit dar.

2.2 Metrik

Die Metrik der 3-Sphäre S^3 in biharmonischen Koordinaten läßt sich am einfachsten über die Einbettung in einen vierdimensionalen Euklidischen Raum gewinnen. Mit den Koordinaten x, y, z und w des flachen Raumes und der Nebenbedingung

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = R_{S^3}^2 = 1 \quad (2.1)$$

lassen sich die biharmonischen oder Zylinderkoordinaten mit der Koordinatentransformation

$$\left. \begin{aligned} x &= \cos(\vartheta) \cos(\varphi_1) \\ y &= \cos(\vartheta) \sin(\varphi_1) \\ z &= \sin(\vartheta) \cos(\varphi_2) \\ w &= \sin(\vartheta) \sin(\varphi_2) \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

mit $\varphi_1, \varphi_2 \in [0, 2\pi)$, $\vartheta \in [0, \pi/2]$ gewinnen.

Aus der Metrik $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + dw^2$ des flachen Raumes folgt, unter Hinzunahme der S^1 mit entgegengesetzter Signatur, die pseudoriemannsche Metrik von $S^1 \times S^3$ mit biharmonischer Parametrisierung zu $(\{\tau, \varphi_1, \varphi_2, \vartheta\} = \{x^0, x^1, x^2, x^3\})$.

$$ds^2 = d\tau^2 - (\cos^2 \vartheta d\varphi_1^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi_2^2 + d\vartheta^2) \quad (2.3)$$

Der metrische Tensor $g_{\mu\nu}$ ($\mu, \nu = 0..3$) hat die Diagonalform mit der Determinante

$g = -\sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta$ und den Komponenten

$$g_{00} = 1 \quad , \quad g_{11} = -\cos^2 \vartheta \quad , \quad g_{22} = -\sin^2 \vartheta \quad , \quad g_{33} = -1 \quad . \quad (2.4)$$

Die nichtverschwindenden Christoffelsymbole ergeben sich zu:

$$\Gamma_{ij}^k := \frac{1}{2} g^{ks} (\partial_j g_{si} + \partial_i g_{sj} - \partial_s g_{ij}) \quad (2.5)$$

$$\Gamma_{13}^1 = \Gamma_{31}^1 = -\tan \vartheta_3 \quad , \quad \Gamma_{23}^2 = \Gamma_{32}^2 = \cot \vartheta_3 \quad , \quad \Gamma_{11}^3 = -\Gamma_{22}^3 = \sin \vartheta \cos \vartheta \quad (2.6)$$

	$\varphi_1 \in$	$\varphi_2 \in$	$\vartheta \in$	$s_\vartheta \in$	Randbedingungen (Stetigkeit)
I	$[0, 2\pi)$	$[0, 2\pi)$	$[0, \frac{\pi}{2}]$	$\{0, \frac{\pi}{2}\}$	$f(\varphi_1 = 0, \varphi_2, \vartheta) = f(\varphi_1 = 2\pi, \varphi_2, \vartheta)$ $f(\varphi_1, \varphi_2 = 0, \vartheta) = f(\varphi_1, \varphi_2 = 2\pi, \vartheta)$
II	$[0, \pi)$	$[0, 2\pi)$	$[0, \pi]$	$\{0, \frac{\pi}{2}, \pi\}$	$f(\varphi_1 = 0, \varphi_2, \vartheta) = f(\varphi_1 = \pi, \varphi_2, \pi - \vartheta)$ $f(\varphi_1, \varphi_2 = 0, \vartheta) = f(\varphi_1, \varphi_2 = 2\pi, \vartheta)$
III	$[0, 2\pi)$	$[0, \pi)$	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	$\{-\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}\}$	$f(\varphi_1 = 0, \varphi_2, \vartheta) = f(\varphi_1 = 2\pi, \varphi_2, \vartheta)$ $f(\varphi_1, \varphi_2 = 0, \vartheta) = f(\varphi_1, \varphi_2 = \pi, -\vartheta)$
IV	$[0, \pi)$	$[0, \pi)$	$[0, 2\pi)$	$\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, 3\frac{\pi}{2}\}$	$f(\varphi_1 = 0, \varphi_2, \vartheta) = f(\varphi_1 = \pi, \varphi_2, \pi - \vartheta + 2\pi)$ $f(\varphi_1, \varphi_2 = 0, \vartheta) = f(\varphi_1, \varphi_2 = \pi, 2\pi - \vartheta)$ $f(\varphi_1, \varphi_2, \vartheta = 0) = f(\varphi_1, \varphi_2, \vartheta = 2\pi)$

Tabelle 2.1: Zulässige Koordinatenintervalle der biharmonischen Koordinaten. Je nach Bereich des Intervalls für ϑ erhält man andere singuläre Punkte s_ϑ der Metrik.

Der Krümmungstensor und der Krümmungsskalar lauten:

$$R_{ikm}^j := \partial_k \Gamma_{mi}^j - \partial_m \Gamma_{ki}^j + \Gamma_{ks}^j \Gamma_{mi}^s - \Gamma_{ms}^j \Gamma_{ki}^s \quad (2.7)$$

$$R_{212}^1 = -R_{221}^1 = R_{232}^3 = -R_{223}^3 = \sin^2 \vartheta \quad (2.8)$$

$$R_{121}^2 = -R_{112}^2 = R_{131}^3 = -R_{113}^3 = \cos^2 \vartheta \quad (2.9)$$

$$R_{313}^1 = -R_{331}^1 = R_{323}^2 = -R_{332}^2 = 1 \quad \text{sonst } 0 \quad (2.10)$$

$$R_{\mu\nu} = \text{diag}(0, 2 \cos^2 \vartheta, 2 \sin^2 \vartheta, 2) \quad (2.11)$$

$$R = -6 \quad (2.12)$$

Die zulässigen Koordinatenintervalle lassen sich verschieden setzen. In Tabelle 2.1 sind vier Möglichkeiten aufgeführt, die aber unterschiedliche, durch die Metrik entstehende singuläre Punkte ($\vartheta = s_\vartheta$) aufweisen und die zu erweiterten Randbedingungen führen. Der übliche Ansatz (Punkt I in der Tabelle) setzt sich aus drei geschlossenen *Zyklen*, τ, φ_1 und φ_2 , und einem Intervall zusammen. Die Endpunkte des Intervalls sind dabei die singulären Punkte. In dieser Parametrisierung sind die beiden Heegaard-Tori der S^3 durch die Randbedingung $\Phi(\varphi_1, \varphi_2) = \Phi(\varphi_1 + 2\pi, \varphi_2) = \Phi(\varphi_1, \varphi_2 + 2\pi)$ gegeben.

Die in der Tabelle 2.1 angeführten Randbedingungen für Stetigkeit werden z.B. dann erfüllt, wenn sich die Funktion $f(\varphi_1, \varphi_2, \vartheta)$ als Potenzreihe von

$$\text{I: } e^{i\varphi_1}, e^{i\varphi_2}, \vartheta$$

$$\text{II: } \cos \vartheta e^{i\varphi_1}, e^{i\varphi_2}, \sin \vartheta$$

$$\text{III: } e^{i\varphi_1}, \sin \vartheta e^{i\varphi_2}, \cos \vartheta$$

$$\text{IV: } \cos \vartheta e^{i\varphi_1}, \sin \vartheta e^{i\varphi_2}, \cos^2 \vartheta$$

darstellen läßt.

Da alle im $U(2)$ -Programm auftretenden Funktionen nur mit den unter Punkt IV genannten Abhängigkeiten auftreten, ist es unerheblich, welches von den vier angegebenen Koordinatenintervallen für ϑ angenommen wird.

Erweitert man das zulässige Koordinatenintervall von ϑ noch auf einen Bereich in den komplexen Zahlen, und erlaubt man weiterhin einen konformen Faktor vor der Metrik, dann erhält man schließlich eine Reihe weiterer *Kopien* des Raumes $S^1 \times S^3$, die nicht kontinuierlich aus dem ursprünglichen Raum heraus gebildet werden können. Die Transformationen, die die Intervalle aufeinander abbilden, werden im folgenden ρ -Transformationen genannt und in Abschnitt 2.3.2 näher erläutert.

2.3 Transformationen und konforme Symmetrie

Bei metrisch-konformen Transformationen muß man zwei Arten unterscheiden. Die konformen Transformationen sind infinitesimale oder endliche Transformationen der Koordinaten, die die Metrik $g_{\mu\nu}$ entweder unverändert lassen (entspricht den Killingfeldern und im M^4 den Poincaré-Transformationen) oder nur um einen Faktor strecken (spezielle konforme Transformationen und Dilatationen). Die Weyl-Transformationen strecken ebenfalls die Metrik nur um einen Faktor, dieser läßt sich aber nicht auf infinitesimale Transformationen zurückführen.

Um das Transformationsverhalten von Feldern festzulegen, greift man am besten auf einen Lagrangean zurück. Die Wahl der Parametrisierung liefert das explizite Erscheinungsbild des Lagrangeans. Da man die Koordinaten als mathematisches Hilfsmittel ansehen kann, dürfen Umparametrisierungen, also beliebige Koordinatentransformationen, durchgeführt werden. Diese Transformationen haben keine Auswirkungen auf die physikalisch

relevanten Größen wie 'Ort' oder 'Impuls'. Die konformen Transformationen werden nun dadurch ausgezeichnet, daß die transformierten Koordinaten \tilde{x}^μ ein gleichwertiges Bezugssystem wie die ursprünglichen Koordinaten darstellen; durch Lorentztransformationen kann ein ruhendes in ein bewegtes Bezugssystem transformiert werden, ohne daß sich die physikalischen Gesetze ändern. Die physikalisch relevanten Größen wie 'Ort' oder 'Impuls' werden aber an das neue Bezugssystem angepaßt, die Felder müssen transformiert werden.

Die Invarianz des Lagrangeans unter den Transformationen ist eine notwendige Voraussetzung ihrer Zulässigkeit, wobei jedoch totale Ableitungen auftreten dürfen. Man erwartet weiterhin, daß die *Konstanten* einer Theorie unbeeinflusst bleiben.¹ Zu ihnen zählen z.B. die Elementarladung e und die Masse m eines Teilchens.

Die verschiedenen Arten von *Transformationen* sind:

allgemeine Koordinatentransformationen [5] Diese Transformationen sind rein formaler Natur und spielen bei der Berechnung der Wirkung als Integral über die Lagrange-dichte keine Rolle. Diese Transformation wirkt nur auf die Koordinatenparametrisierung, Spinorindizes² bleiben unbeeinflusst.

$$x^\mu \rightarrow y^\mu = y^\mu(x) \quad (2.13)$$

$$\text{mit } \Omega_\nu^\mu := \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\nu} \quad \text{und} \quad \text{Det}(\Omega_\nu^\mu) \neq 0$$

$$T_{\mu..}{}^{\nu..}(x) \rightarrow \tilde{T}_{\mu..}{}^{\nu..}(y) = (\Omega^{-1})_\mu^\rho \cdots \Omega_\sigma^\nu \cdots T_{\rho..}{}^{\sigma..}(x(y)) \quad (2.14)$$

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \tilde{g}_{\mu\nu} = (\Omega^{-1})_\mu^\rho (\Omega^{-1})_\nu^\sigma g_{\rho\sigma} \quad (2.15)$$

$$\text{Det}(-g_{\mu\nu}) \rightarrow \text{Det}(-\tilde{g}_{\mu\nu}) = \text{Det}(\Omega_\rho^\mu)^{-2} \text{Det}(-g_{\rho\sigma}) \quad (2.16)$$

$$dV_x \rightarrow dV_y = \text{Det}(\Omega) dV_x \quad (2.17)$$

Konforme, Poincaré- und Lorentz-Transformation [1] Die konformen, Poincaré- und Lorentz-Transformationen beruhen auf genau den Umparametrisierungen, die das Wegelement ds^2 invariant lassen und die Metrik $g_{\mu\nu} = \lambda^2 \tilde{g}_{\mu\nu}$ nur mit einem Faktor

¹Diese Erwartung wird manchmal erst nach Einführung eines weiteren Feldes, z.B. dem Dilaton, erfüllt.

²Im $U(2)$ -Programm spielen Spinoren im Raum $S^1 \times S^3$ keine Rolle. Sie werden erst bei der Abbildung in den M^4 erzeugt. Alle folgenden Betrachtungen über Spinorindizes beziehen sich deshalb auch nur auf Spinoren im M^4 . Siehe auch S.105.

skalieren. Dieser Faktor ist bei den Poincaré- und Lorentz-Transformationen identisch 1. Alle diese Transformationen sollen durch infinitesimale Generatoren, z.B. als Differentialoperatoren wie in Tabelle 2.2,³ erzeugt werden können, wodurch z.B. die Paritätstransformation gesondert behandelt werden muß.

Im Anschluß an eine solche Umparametrisierung wird die transformierte Koordinate \tilde{x}^μ wieder als ursprüngliche Koordinate interpretiert (Reparametrisierung), mit der Bedeutung, daß beide Punkte physikalisch gleichwertig sind.

$$x^\mu \xrightarrow{\text{Transf.}} \tilde{x}^\mu := e^{\alpha_i X^i} x^\mu \xrightarrow{\text{Reparam.}} x^\mu, \quad (2.18)$$

Nun ergeben sich zwischen den Transformationen mit $\lambda^2 \equiv 1$ und denen mit $\lambda^2 \neq 1$ (Dilatation und spezielle konforme Transformation) signifikante Unterschiede.

Die Transformationsmatrizen werden durch

$$\Lambda_\nu^\mu := \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\nu} \quad (2.19)$$

$$S_a^b := \left(e^{\alpha_i \tilde{X}^i} \right)_a^b \quad (2.20)$$

erhalten, wobei \tilde{X}^i die Matrixdarstellung des infinitesimalen Generators X^i ist.

1.) $\lambda^2 = 1$: Poincaré- und Lorentz-Transformationen: Das Wegelement $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ bleibt identisch erhalten, ebenso die Koordinaten x^μ , Koordinatendifferentiale dx^μ und die partielle Ableitung ∂_μ (Basis der Tangentialvektoren).

Tensoren und Spinoren werden entsprechend ihrer Indexstruktur transformiert.

2.) $\lambda^2 \neq 1$: spezielle konforme Transformationen: Das Wegelement $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \rightarrow \lambda^2 ds^2$ wird mit einem konformen Faktor λ^2 skaliert. Die Koordinaten x^μ , Koordinatendifferentiale dx^μ und die partielle Ableitung ∂_μ bleiben wiederum identisch erhalten.

Tensoren $T_{\mu\dots\nu\dots}$ und Spinoren Ψ^a transformieren neben ihrer Indexstruktur nun auch mit einem weiteren Faktor. Die Transformationsmatrizen sind wieder durch die Gleichungen (2.19) und (2.20) gegeben, der Exponent des Vorfaktors ist eine feldabhängige Größe $d(T)$, die konforme Skalendimension von T .

³Andere Darstellungen sind für die biharmonischen Koordinaten und für kartesische Koordinaten im Anhang B.1 gegeben.

$$T_{\mu..}{}^{\nu..}(x) \rightarrow \tilde{T}_{\mu..}{}^{\nu..}(y) = \lambda^{-d(T)} (\Lambda^{-1})_{\mu}^{\rho} \cdots \Lambda_{\sigma}^{\nu} \cdots T_{\rho..}{}^{\sigma..}(x(y)) \quad (2.21)$$

$$\Psi^a \rightarrow \tilde{\Psi}^a = \lambda^{-d(\Psi)} S_b^a(\alpha_j) \Psi^b = \lambda^{-d(\Psi)} \left(e^{\alpha_j \tilde{X}^j} \right)_b^a \Psi^b \quad (2.22)$$

Während die Lorentz-Transformationen z.B. das Skalarprodukt (a, b) von Vektoren oder Tensoren invariant lassen, wirken die speziellen konformen Transformationen nur winkeltreu, d.h. $\cos \psi = \frac{(a,b)}{\sqrt{(a,a)(b,b)}}$ bleibt invariant.

Der Faktor λ^2 wird durch die Transformation festgelegt.

$$ds^2 \rightarrow \widetilde{ds^2} = g_{\mu\nu}(y) dy^{\mu} dy^{\nu} = g_{\mu\nu}(y(x)) \Lambda_{\rho}^{\mu} \Lambda_{\sigma}^{\nu} dx^{\rho} dx^{\sigma} \stackrel{!}{=} \lambda^2(y) g_{\rho\sigma}(x) dx^{\rho} dx^{\sigma} \quad (2.23)$$

$$\rightarrow \lambda^2(y) g_{\rho\sigma}(x) = g_{\mu\nu}(y(x)) \Lambda_{\rho}^{\mu} \Lambda_{\sigma}^{\nu} \quad (2.24)$$

$$\lambda^2(y) = \frac{1}{4} g^{\rho\sigma}(x) g_{\mu\nu}(y) \Lambda_{\rho}^{\mu} \Lambda_{\sigma}^{\nu} \quad (2.25)$$

$$= \left((\det \Lambda)^2 \frac{\det g_{\mu\nu}(y)}{\det g_{\mu\nu}(x)} \right)^{1/4} \quad (2.26)$$

Einige Erläuterungen zu den letzten Gleichungen: Durch Multiplikation und Aufsummation von Gleichung (2.24) mit $g^{\rho\sigma}(x)$ erhält man auf der linken Seite einen Term $\lambda^2 g^{\rho\sigma}(x) g_{\rho\sigma}(x) = \lambda^2 \delta_{\rho}^{\rho} = 4\lambda^2$. Diese 4 tritt in Gleichung (2.25) auf der rechten Seite auf. Eine andere Methode zur Bestimmung von λ^2 wird in Gleichung (2.26) besprochen. Durch Bildung der Determinanten beider Seiten von Gleichung (2.24) erhält man auf der linken Seite einen Term $\lambda^8 \det g_{\rho\sigma}(x)$ und auf der rechten $\det(g_{\mu\nu}(y) \Lambda \Lambda) = \det g_{\mu\nu}(y) \det \Lambda \det \Lambda$, woraus schließlich Gleichung (2.26) folgt.

An dieser Stelle ist auf einen wichtigen Unterschied zur Literatur hinzuweisen. Es wird in der Regel angenommen (z.B.[16]), daß ein Spinor nur unter Lorentz-Transformationen nichttrivial transformiert, da er in der irreduziblen Darstellung der Lorentz-Gruppe liegt. Diese Voraussetzung liegt in dem hier gezeigten Fall aber nicht vor. Der Spinor transformiert unter allen Transformationen, auch den Translationen, nichttrivial, da er in der irreduziblen Darstellung der konformen Gruppe liegt.

Weyl-Transformation : Eine Verallgemeinerung der konformen Transformationen mit Reparametrisierung stellen die Weyl-Transformation dar. Bei ihnen muß jedoch der Faktor λ^2 nicht der Gleichung (2.24) genügen, er wird also nicht auf eine infinitesimale

Transformation zurückgeführt. Folgt man der Literatur [15, 21], dann kann das Transformationsverhalten direkt von der konformen Transformation übernommen werden. **Diese einfache Aussage trifft hier nicht auf Spinoren zu!** Weil ein Spinor auch unter Dilatation nichttrivial transformiert, muß sich eine lokale (ortsabhängige) Dilatation — und so sollte sich eine Weyl-Transformation im einfachsten Fall verhalten — genauso auswirken. Die anderen Felder, also die ohne Spinorindex, lassen sich problemlos auf die herkömmliche Weise Weyl-transformieren:

$$x^\mu \rightarrow x^\mu \quad A_\mu \rightarrow A_\mu \quad F_{\mu\nu\dots} \rightarrow F_{\mu\nu\dots} \quad (2.27)$$

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \lambda_W^2 g_{\mu\nu} \quad (2.28)$$

$$T_{\mu\dots\nu\dots}(x) \rightarrow \tilde{T}_{\mu\dots\nu\dots}(x) = \lambda_W^{-d(T)} T_{\mu\dots\nu\dots}(x) \quad (2.29)$$

Die Transformationsgesetze für einen $SU(2, 2)$ -Spinor zu finden, sprengt den Rahmen dieser Untersuchung. Der einfache Ansatz lokaler Dilatationen wird wahrscheinlich nicht ausreichen, da z.B. im M^4 auch die speziellen konformen Transformationen ein ortsabhängiges λ^2 besitzen.

2.3.1 Infinitesimale konforme Generatoren

Da $S^1 \times S^3$ eine Überlagerungsmannigfaltigkeit von M^4 ist, können die bekannten infinitesimalen Generatoren des Minkowskiraumes direkt übernommen werden. Da zudem eine Parametrisierung des M^4 möglich ist, die zu der biharmonischen Parametrisierung (als Weyl-Transformation) konform äquivalent ist, lassen sie sich einfach angeben. Im Anhang, Abschnitt B.1, sind die Darstellungen der Algebra $su(2, 2)$ und $so(4, 2)$ durch Differentialoperatoren für die biharmonischen Koordinaten und für kartesische Koordinaten des Minkowskiraums gegeben.

Die Killingfelder (Killingvektoren) $X^i = X^{i\mu} \underline{e}_\mu \sim X^{i\mu} \partial_\mu$ werden aus der Symmetrie des Raumes abgeleitet und beschreiben die Isometrien des Raumes. Die Killingfelder von S_3 bilden eine Basis der Liealgebra $o(4)$ der orthogonalen Gruppe $O(4)$ ⁴ und lassen sich in der

⁴Diese Symmetriegruppe liegt auch bei einem $1/r$ -Potential in der klassischen Theorie, also beim Kepler-Problem und beim Wasserstoffatom, vor.

euklidischen Parametrisierung besonders einfach angeben ($\mu, \nu = 1 \dots 4$) [24]:

$$D_{\mu\nu} := x_\nu \partial_{x_\mu} - x_\mu \partial_{x_\nu} \quad (2.30)$$

Sie lassen sich z.B. in der Form X^2 bis X^7 nach Gleichung (B.16) oder durch Linearkombinationen (L_i, R_i bzw. $K^{a,\pm}, K^{b,\pm}$) darstellen. Der Killingvektor der Zeitrichtung liegt mit dem Differentialoperator X^1 vor.

Durch Anwendung der ρ -Transformationen, die im folgenden Abschnitt definiert werden, kann man diese sieben Generatoren der Killingfelder zu dem gesamten Satz der konformen Generatoren erweitern. Dies führt zu demselben Ergebnis, wie es durch die konforme Gruppe des Minkowskiraumes mittels Koordinatentransformation erzeugt wird.

Man besitzt nunmehr fünfzehn Differentialoperatoren, die sich in reeller Form durch die Gleichung (B.16) oder in komplexer Form wie in Tabelle 2.2 darstellen lassen. Da sie eine Basis für eine $su(2, 2)$ -Algebra darstellen, lassen sich die Vertauschungsrelationen auch in Matrixform angeben. Dabei ist es günstiger, von der komplexen Darstellung, $K^{\alpha\pm}, \alpha \in \{a, \dots, f\}$, auszugehen. Die Vertauschungsrelationen können dann durch die folgende Matrix K_m^n ausgedrückt werden:

$$K_m^n := i \begin{pmatrix} \partial_\Sigma - \frac{\partial}{\partial\varphi_2} & K^{b+} & iK^{d+} & iK^{e+} \\ K^{b-} & \partial_\Sigma - \frac{\partial}{\partial\varphi_1} & iK^{f+} & iK^{c+} \\ iK^{d-} & iK^{f-} & \partial_\Sigma - \frac{\partial}{\partial\tau} & K^{a+} \\ iK^{e-} & iK^{c-} & K^{a-} & -\partial_\Sigma \end{pmatrix} \quad (2.49)$$

$$\text{mit } \partial_\Sigma := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial\varphi_1} + \frac{\partial}{\partial\varphi_2} + \frac{\partial}{\partial\tau} \right) \quad (2.50)$$

$$[K_m^n, K_r^s] = i \cdot (\delta_r^n K_m^s - \delta_m^s K_r^n) \quad (2.51)$$

Die zugehörige Matrixdarstellung lautet dann einfach

$$K^{\alpha\pm} \sim K_m^n \Rightarrow \widetilde{K^{\alpha\pm}} \sim (\delta_{m,a} \delta_{n,b})^b, \quad (2.52)$$

wobei Vorfaktoren ($\pm 1, \pm i$) entsprechend der Einträge in der Matrix (2.49) auftreten.

Die Matrixdarstellung der im M^4 üblich verwendeten infinitesimalen Generatoren ist im Anhang, Gleichung (B.46), zu finden.

Basis einer $su(2, 2)$ -Algebra

$$K^{a+} = e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} \frac{1}{2} \left(\frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi_1} - \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi_2} + i \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) \quad (2.31)$$

$$K^{a-} = e^{-i(\varphi_1+\varphi_2)} \frac{1}{2} \left(\frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi_1} - \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi_2} - i \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) \quad (2.32)$$

$$K^a = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi_1} + \frac{\partial}{\partial \varphi_2} \right) \quad (2.33)$$

$$K^{b+} = e^{i(\varphi_1-\varphi_2)} \frac{1}{2} \left(\frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi_1} + \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi_2} + i \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) \quad (2.34)$$

$$K^{b-} = e^{-i(\varphi_1-\varphi_2)} \frac{1}{2} \left(\frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi_1} + \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi_2} - i \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) \quad (2.35)$$

$$K^b = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi_2} - \frac{\partial}{\partial \varphi_1} \right) \quad (2.36)$$

$$K^{c+} = e^{i(\tau+\varphi_2)} \frac{1}{2} \left(\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi_2} - i \cos \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) \quad (2.37)$$

$$K^{c-} = e^{-i(\tau+\varphi_2)} \frac{1}{2} \left(\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi_2} + i \cos \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) \quad (2.38)$$

$$K^c = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \varphi_2} \right) \quad (2.39)$$

$$K^{d+} = e^{i(\tau-\varphi_2)} \frac{1}{2} \left(\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi_2} - i \cos \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) \quad (2.40)$$

$$K^{d-} = e^{-i(\tau-\varphi_2)} \frac{1}{2} \left(\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi_2} + i \cos \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) \quad (2.41)$$

$$K^d = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial \varphi_2} \right) \quad (2.42)$$

$$K^{e+} = e^{i(\tau+\varphi_1)} \frac{1}{2} \left(\cos \vartheta \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{1}{\cos \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi_1} + i \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) \quad (2.43)$$

$$K^{e-} = e^{-i(\tau+\varphi_1)} \frac{1}{2} \left(\cos \vartheta \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{1}{\cos \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi_1} - i \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) \quad (2.44)$$

$$K^e = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \varphi_1} \right) \quad (2.45)$$

$$K^{f+} = e^{i(\tau-\varphi_1)} \frac{1}{2} \left(\cos \vartheta \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{1}{\cos \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi_1} + i \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) \quad (2.46)$$

$$K^{f-} = e^{-i(\tau-\varphi_1)} \frac{1}{2} \left(\cos \vartheta \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{1}{\cos \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi_1} - i \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) \quad (2.47)$$

$$K^f = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial \varphi_1} \right) \quad (2.48)$$

Tabelle 2.2: Diese Differentialoperatoren bilden eine Basis für eine $su(2, 2)$ -Algebra. Sie bestehen aus zwei $su(2)$ (K^a und K^b) und vier $su(1, 1)$ (K^c bis K^f) Unteralgebren. Von den insgesamt achtzehn Differentialoperatoren sind aber nur fünfzehn linear unabhängig: zwölf $K^{\alpha\pm}$ und drei der K^α .

Die infinitesimalen Generatoren werden durch eine Exponentialabbildung zu endlichen Transformationen. Dabei hängt die Wahl der Darstellung von dem zu transformierenden Objekt ab.

1. Auf Koordinaten wendet man die Differentialoperatoren an, sie erzeugen die konformen Abbildungen:

$$x^\mu \rightarrow x^{\mu'} = e^{\alpha_i X^i} x^\mu. \quad (2.53)$$

Als Beispiele seien z.B. eine Translation im Minkowskiraum

$$x^\mu \rightarrow x^{\mu'} = e^{\alpha^\mu \partial_\mu} x^\mu = (1 + \alpha^\mu \partial_\mu + \alpha^\mu \partial_\mu \alpha^\mu \partial_\mu / 2 + \dots) x^\mu = (x^\mu + \alpha^\mu + 0) \quad (2.54)$$

und für biharmonische Koordinaten die Transformation K^{a+}

$$\varphi_1 \rightarrow \varphi_1' = e^{\alpha K^{a+}} \varphi_1 = \varphi_1 - i \left(\exp\left(i \frac{\alpha \sin \vartheta}{2 \cos \vartheta} e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}\right) - 1 \right) \quad (2.55)$$

$$\cos \vartheta e^{i\varphi_1} \rightarrow e^{\alpha K^{a+}} \cos \vartheta e^{i\varphi_1} = \cos \vartheta e^{i\varphi_1} \quad (2.56)$$

$$\sin \vartheta e^{i\varphi_2} \rightarrow e^{\alpha K^{a+}} \sin \vartheta e^{i\varphi_2} = \sin \vartheta e^{i\varphi_2} \quad (2.57)$$

$$\cos \vartheta e^{-i\varphi_1} \rightarrow e^{\alpha K^{a+}} \cos \vartheta e^{-i\varphi_1} = \cos \vartheta e^{-i\varphi_1} - i\alpha \sin \vartheta e^{i\varphi_2} \quad (2.58)$$

$$\sin \vartheta e^{-i\varphi_2} \rightarrow e^{\alpha K^{a+}} \sin \vartheta e^{-i\varphi_2} = \sin \vartheta e^{-i\varphi_2} + i\alpha \cos \vartheta e^{i\varphi_1} \quad (2.59)$$

angegeben.

2. In Form komplexer 4×4 -Matrizen sollen sie auf einen 4-komponentigen Spinor wirken. Betrachtet man die Darstellung der Symmetriegruppe im Minkowskiraum, dann ist, unter der Wirkung von Lorentztransformationen, dieser Spinor mit dem Dirac-Spinor identisch (siehe z.B. [1] und Anhang S. 66). Das Transformationsverhalten des Spinors ist nun für alle konformen Transformationen festgelegt. Dabei koppeln im M^4 die speziellen konformen Transformationen genauso wie das Eichfeld der schwachen Wechselwirkung mit $\gamma^\mu(1 - \gamma^5)$ an einen Spinor, was als Indiz für eine Verbindung dieser beiden, eigentlich verschiedenen Phänomene angenommen werden kann.

2.3.2 ρ -Transformationen

Die ρ -Transformationen sind global definierte konforme Transformationen von $S^1 \times S^3$, deren Konformfaktor λ^2 nur von $z = \cos^2 \vartheta$ abhängig ist. Dabei wird das ursprüngliche Koordi-

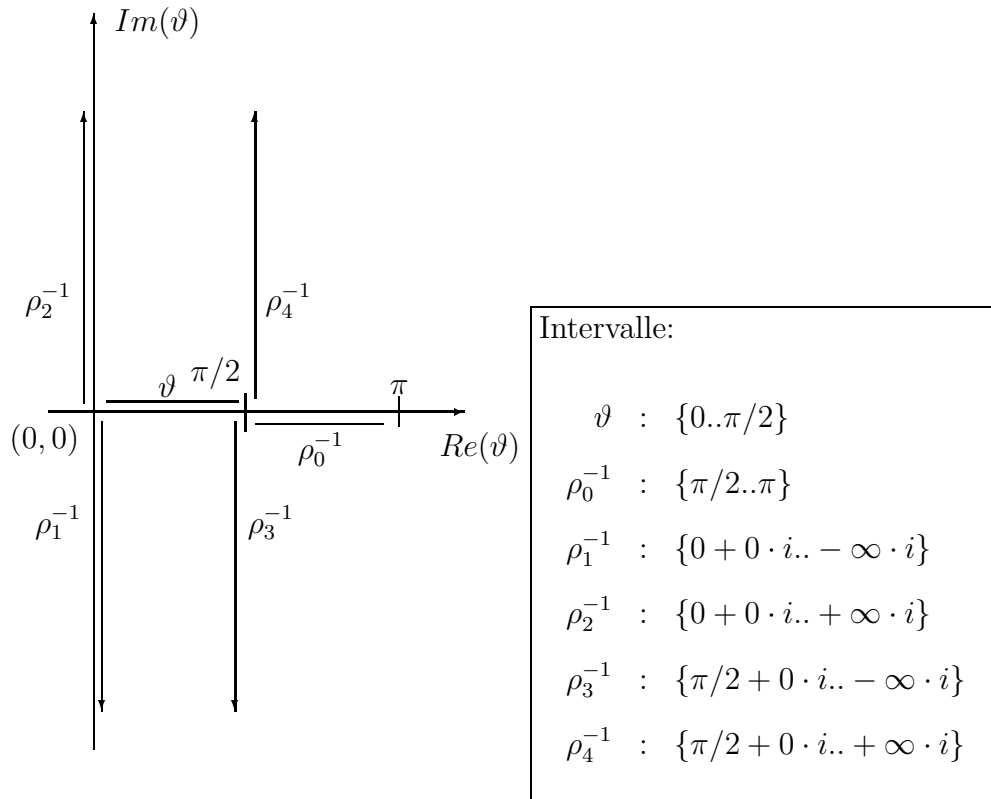


Abbildung 2.1: Parameterbereich von ϑ , der durch die ρ -Transformationen abgedeckt wird. Liegt ρ_i in dem Basisintervall $\{0.. \pi/2\}$, dann liegt das Urbild ρ_i^{-1} in den angegebenen Intervallen einer komplexen ϑ -Ebene.

natenintervall von ϑ auf andere Intervalle in der komplexen Zahlenebene abgebildet (siehe Bild 2.1). Außerdem stellen die ρ -Transformationen die vollständige Symmetrie zwischen den drei Tori τ, φ_1 und φ_2 her.

$$\left. \begin{aligned}
 \rho_0 &:= \pi/2 + \vartheta & : z \rightarrow 1 - z \\
 \rho_1 &:= i \ln(\tan(\vartheta/2)) & : z \rightarrow 1/(1 - z) \\
 \rho_2 &:= i \ln(\tan(\pi/4 + \vartheta/2)) & : z \rightarrow 1/z \\
 \rho_3 &:= \pi/2 + i \ln(\tan(\vartheta/2)) & : z \rightarrow -z/(1 - z) \\
 \rho_4 &:= \pi/2 + i \ln(\tan(\pi/4 + \vartheta/2)) & : z \rightarrow -(1 - z)/z
 \end{aligned} \right\} \quad (2.60)$$

Die $\hat{\rho}$ -Transformationen lassen sich kurz charakterisieren, wenn die Gleichungen (2.60) sowie die Auswirkungen auf die Metrik (2.61) nach Tabelle 2.3 betrachtet werden:

$$ds^2 = \lambda^2 \left(d(x^0)^2 - (\cos^2(x^3)d(x^1)^2 + \sin^2(x^3)d(x^2)^2 + d(x^3)^2) \right) \quad (2.61)$$

Transf.	λ^2	(x^0)	(x^1)	(x^2)	(x^3)	Inv.Tr.	Struktur
Id.	1	τ	φ_1	φ_2	ϑ	1	1
$\hat{\rho}_0$	1	τ	φ_2	φ_1	ρ_0	$\hat{\rho}_0$	\mathbb{Z}_2
$\hat{\rho}_1$	$-\cos^{-2}(\rho_1)$	φ_2	τ	φ_1	ρ_1	$\hat{\rho}_4$	\mathbb{Z}_3
$\hat{\rho}_2$	$-\cos^{-2}(\rho_2)$	φ_1	τ	φ_2	ρ_2	$\hat{\rho}_2$	\mathbb{Z}_2
$\hat{\rho}_3$	$-\sin^{-2}(\rho_3)$	φ_2	φ_1	τ	ρ_3	$\hat{\rho}_3$	\mathbb{Z}_2
$\hat{\rho}_4$	$-\sin^{-2}(\rho_4)$	φ_1	φ_2	τ	ρ_4	$\hat{\rho}_1$	\mathbb{Z}_3

Tabelle 2.3: Auswirkungen der ρ -Transformationen auf die Metrik: ρ -Transformationen sind global definierte konforme Transformationen, die die Metrik (Gleichung (2.61)) konform mit dem Faktor λ^2 transformieren. Mit Inv.Tr. wird die jeweilige Rücktransformation angegeben, und die Struktur \mathbb{Z}_i beschreibt, daß nach i -maliger Anwendung die Identität vorliegt.

Die Transformation ρ_0 wirkt wie eine Paritätsoperation. Die Richtung von $d\vartheta$ bleibt positiv, während die Richtungen von $d\varphi_1$ und $d\varphi_2$ gegeneinander vertauscht werden.⁵

Die Transformationen ρ_1 und ρ_4 vertauschen die drei Tori τ, φ_1 und φ_2 zyklisch untereinander; ρ_2 und ρ_3 gehen unter Anwendung von ρ_0 aus ihnen hervor.

Die ρ -Transformationen können nicht durch endliche konforme Transformationen erzeugt werden. Für ρ_0 als Paritätsoperation ist dies offensichtlich, und für ρ_1 muß es ebenfalls gelten, weil diese Transformation die Signatur der Metrik von (1+3) auf (3+1) verändert.⁶ Da alle anderen Transformationen durch diese beiden ausgedrückt werden können,

$$\hat{\rho}_2 = \hat{\rho}_1 \cdot \hat{\rho}_0, \quad \hat{\rho}_3 = \hat{\rho}_0 \cdot \hat{\rho}_1, \quad \text{und} \quad \hat{\rho}_4 = \hat{\rho}_1 \cdot \hat{\rho}_1, \quad (2.62)$$

⁵Achtung: Die im $U(2)$ -Programm übliche Transformation $\vartheta \rightarrow \pi/2 - \vartheta$ ist eine Drehung der 3-Sphäre auf sich selbst, während ρ_0 als Paritätsoperation eine nichttriviale Transformation darstellt.

⁶Solange konforme Invarianz besteht, spielt das globale Vorzeichen der Metrik keine Rolle!

läßt sich leicht verifizieren, daß keine dieser Transformationen kontinuierlich, also über endliche konforme Transformationen, aus der Identität gewonnen werden können.

Die ρ_i erzeugen mit $z = \cos^2 \vartheta$ eine Basis für gebrochen lineare Transformationen: $\{\vartheta \rightarrow (\rho_0, \rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4)\} \simeq \{z \rightarrow (1-z, 1/(1-z), 1/z, -z/(1-z), -(1-z)/z)\}$. Dabei bilden die ρ -Transformationen einen abgeschlossenen Satz von diskreten Transformationen: die *Dihedrale Gruppe* D_3 (die Symmetriegruppe eines gleichseitigen Dreiecks). [23] Es gilt: $D_3 = gp\{\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_0\}$ mit $\hat{\rho}_1^3 = \hat{\rho}_0^2 = (\hat{\rho}_0\hat{\rho}_1)^2 = Id$. Mit Hilfe dieser Gruppe werden in Abschnitt 3.3.2 die Lösungen der Maxwellgleichung klassifiziert.⁷

2.3.3 Transformationen quasiprimärer Felder

Die Bezeichnungen *primäres*, *quasiprimäres* und *sekundäres* Feld beziehen sich auf ihre Eigenschaften unter konformen Transformationen. Ein primäres Feld (z.B. Koordinaten, Vektorpotential) erhält keinen zusätzlichen Faktor, d.h. die Skalendimension verschwindet: $d(\cdot) = 0$. Unter 'quasiprimär' faßt man die primären Felder und die, die mit einem zusätzlichen Faktor transformieren ($d(\cdot) \neq 0$, z.B. eine Lösung der Klein-Gordon-Gleichung), zusammen. Ein sekundäres Feld transformiert nicht mit einer reinen Skalierung, sondern es können weitere Terme auftreten, wie z.B. bei der Divergenz einer 1-Form nach Gleichung (2.72).

Das Transformationsverhalten einer 1-Form $A_{(1)}$ wird so gewählt, daß eine Lösung der Bewegungsgleichung, z.B. der Maxwell-Gleichungen, wieder auf Lösungen abgebildet werden. Das Vektorpotential, genauer die Komponenten der 1-Form $A_{(1)}$, transformieren dabei wie ein primäres Feld, d.h. sie erfahren keine Änderung:

$$A_{(1)} = A_\mu dx^\mu \rightarrow \hat{A}_{(1)} = \hat{A}_\mu d\hat{x}^\mu \quad \text{mit} \quad \hat{A}_\mu = A_\mu \quad (2.63)$$

Es muß aber beachtet werden, daß die Länge $|A|^2 = A^\mu A_\mu$ dabei nicht invariant bleibt. Dies ist generell die Eigenschaft der konformen Transformationen: sie sind nur winkelerhaltend.

Der von zwei Vektoren aufgespannte Winkel ϕ mit

$$\cos \phi = \frac{(a, b)}{\sqrt{(a, a)(b, b)}} \quad \text{mit} \quad (a, b) = g_{\mu\nu} a^\mu b^\nu \quad (2.64)$$

⁷Siehe auch [25, §9] für die Auswirkungen dieser Transformationen auf die P -Funktion, die noch von Interesse sein wird.

bleibt invariant bei konformer Transformation.

Die homogenen Maxwellgleichungen transformieren dann unter endlichen konformen oder Weyl-Transformationen mit einer reinen Skalierung:

$$F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0 \rightarrow \hat{F}^{\mu\nu}{}_{;\nu} = \frac{1}{\sqrt{-\hat{g}}} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\sqrt{-\hat{g}} \hat{g}^{\mu k} \hat{g}^{\nu l} (\hat{A}_{k,l} - \hat{A}_{l,k}) \right) \quad (2.65)$$

$$= \frac{\lambda^{-4}}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\lambda^4 \sqrt{-g} \lambda^{-2} g^{\mu k} \lambda^{-2} g^{\nu l} (A_{k,l} - A_{l,k}) \right) = \lambda^{-4} F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0 \quad (2.66)$$

Dieses Verhalten der Maxwell-Theorie ist bereits 1910 durch Cunningham und Bateman ([6, 2]) dargelegt worden. Für das $U(2)$ -Programm sollte deswegen noch einmal hervorgehoben werden, daß nicht nur die Killingfelder, sondern auch die konformen Generatoren Symmetrieoperatoren der betrachteten Lösungen sind.

Bei der Betrachtung der Klein-Gordon-Gleichung benötigt man das Transformationsverhalten einer 0-Form $\Phi_{(0)}$. Sie soll mit einem konformen Faktor skalieren:

$$\Phi_{(0)} \rightarrow \hat{\Phi}_{(0)} = \lambda^{-1} \Phi_{(0)} \quad (2.67)$$

Die Klein-Gordon-Gleichung transformiert dann wie:

$$\square \Phi_{(0)} \rightarrow \square \hat{\Phi}_{(0)} = \frac{1}{\sqrt{-\hat{g}}} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\sqrt{-\hat{g}} \hat{g}^{\mu\nu} \hat{\Phi}_{,\nu} \right) \quad (2.68)$$

$$= \frac{\lambda^{-4}}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\lambda^4 \sqrt{-g} \lambda^{-2} g^{\mu\nu} (\lambda^{-1} \Phi)_{,\nu} \right) = \lambda^{-3} \square \Phi_{(0)} - \lambda^{-4} \Phi_{(0)} \square \lambda \quad (2.69)$$

Da hier kein reines Skalenverhalten unter konformer Transformation vorliegt, wird eine Lösung der Klein-Gordon-Gleichung nicht zwingend auf eine Lösung abgebildet. Ergänzt man die Differentialgleichung um einen Term proportional zum Krümmungsskalar der Mannigfaltigkeit, dann wird der letzte Term aufgehoben:⁸

$$\square \Phi_{(0)} - \frac{R}{6} \Phi_{(0)} \rightarrow \square \hat{\Phi}_{(0)} - \frac{\hat{R}}{6} \hat{\Phi}_{(0)} = \lambda^{-3} \square \Phi_{(0)} - \lambda^{-3} \frac{R}{6} \Phi_{(0)} \quad (2.70)$$

Die analoge Betrachtung für die Divergenz des Vektorpotentials führt zu folgendem Ergebnis:

$$\operatorname{div} \hat{A} = \frac{1}{\sqrt{-\hat{g}}} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\sqrt{-\hat{g}} \hat{g}^{\mu\nu} \hat{A}_\nu \right) \quad (2.71)$$

⁸Es geht aber auch noch einfacher: Aus dem Lagrangean $\mathcal{L} = g^{\mu\nu} (\partial_\mu + A_\mu) \Phi (\partial_\nu + A_\nu) \Phi$ mit einer Eichtransformation für $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \ln \lambda$ ergibt sich eine konform invariante Bewegungsgleichung $(\square + (\partial_\mu A^\mu) - A_\mu A^\mu) \Phi = 0$.

$$= \frac{\lambda^{-4}}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\lambda^4 \sqrt{-g} \lambda^{-2} g^{\mu\nu} A_\nu \right) = \lambda^{-2} \operatorname{div} A + \lambda^{-4} \operatorname{grad}(\lambda^2) \cdot A \quad (2.72)$$

Die Divergenz eines Vektorpotentials ist bei der Betrachtung konformer Symmetrie demnach keine erhaltene Größe. Für Vektoren oder Ströme wie j^μ , die wie die 1-Formen trivial transformieren, aber eine andere Indexstruktur tragen, ist die Divergenz jedoch erhalten.

Für die ρ -Transformationen ergibt sich eine Vereinfachung. Da der konforme Faktor λ^2 nur von $\cos^2 \vartheta$ abhängig ist, transformiert die Divergenz des Vektorpotentials genau dann mit einer reinen Skalierung, wenn die A_ϑ -Komponente weggeëicht worden ist. Diese Eichung wird im folgenden *zweite Eichung* genannt.

$$\operatorname{div} \hat{A} = \lambda^{-2} \operatorname{div} A \quad \text{wegen} \quad (2.73)$$

$$\operatorname{grad} \left(\lambda^2(\vartheta) \right) \cdot A \sim \operatorname{grad} \left(\lambda^2(\vartheta) \right)_\vartheta \cdot A_\vartheta = 0 \quad (2.74)$$

2.4 Lie-Gruppen und Algebren

Die Elemente von $U(2)$ in Matrixdarstellung bestehen aus allen unitären 2×2 -Matrizen $\hat{M}_{U(2)}$ mit $\hat{M}^{-1} = \hat{M}^*$. Sie können mit derselben Parametrisierung wie $S^1 \times S^3$ dargestellt werden, wobei man jedoch nur einen halben τ -Zyklus benötigt, da eine Verschiebung $\tau \rightarrow \tau + \pi$ äquivalent zu $\varphi_1 \rightarrow \varphi_1 + \pi$ und $\varphi_2 \rightarrow \varphi_2 + \pi$ ist [18].⁹

$$\hat{M}_{U(2)} = e^{i\tau} \begin{pmatrix} \sin \vartheta e^{-i\varphi_2} & \cos \vartheta e^{i\varphi_1} \\ -\cos \vartheta e^{-i\varphi_1} & \sin \vartheta e^{i\varphi_2} \end{pmatrix} \quad (2.75)$$

Die Liealgebra $u(2)$ ist über die *Exponentialabbildung* mit der Liegruppe $U(2)$ verknüpft: Für alle $\tilde{m} \in u(2)$ gilt $e^{\tilde{m}} \in U(2)$. Die $u(2)$ -Elemente bestehen aus komplexen 2×2 -Matrizen mit $\hat{m}^* = -\hat{m}$. [19]

⁹Im $U(2)$ -Programm wird die \mathbb{Z}_2 -Aufspaltung von $U(2) \sim S^1 \times S^3 / \mathbb{Z}_2$ außer acht gelassen. Bei der Interpretation des Ansatzes spielt aber mehr die Topologie von $S^1 \times S^3$ als die Eigenschaften von $U(2)$ eine Rolle, so daß die Bezeichnung des Ansatzes als $U(2)$ -Programm zwar zu Fehlinterpretationen führen kann, die anderen Aspekte des Programms aber unberührt bleiben.

Die Lie-Gruppe $U(2, 2)$ besteht aus allen unitären 4×4 -Matrizen $\hat{M}_{U(2,2)}$, die der Bedingung

$$\hat{M}_{U(2,2)}^* \cdot \eta_{2,2} \cdot \hat{M}_{U(2,2)} = \eta_{2,2} \quad (2.76)$$

$$\text{mit } \eta_{2,2} := \text{diag}(1, 1, -1, -1) \quad (2.77)$$

genügen. Die Elemente $\hat{m}_{u(2,2)}$ der Algebra $u(2, 2)$ sind ebenfalls komplexe 4×4 -Matrizen, die aber die Bedingung

$$\hat{m}_{u(2,2)}^* \cdot \eta_{2,2} = -\eta_{2,2} \cdot \hat{m}_{u(2,2)} \quad (2.78)$$

erfüllen müssen. Eine Basis für diese Algebra stellen die vier γ -Matrizen und deren Produkte oder generell alle (4×4) -Matrizen $\hat{m}_{u(2,2)}$ der Form

$$\hat{m}_{u(2,2)} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ u_2^* & u_3 \end{pmatrix} \quad (2.79)$$

dar, wobei u_2 eine beliebige komplexe 2×2 -Matrix und u_1 und u_3 zwei antihermitesche Matrizen mit $\text{Tr}(u_1) = -\text{Tr}(u_3)$ sind.