

# Kapitel 3

## Differentialgleichungen

Die Klein–Gordon–Gleichung (3.2) und die Maxwell–Gleichungen (3.33) gehören zu den wichtigsten Differentialgleichungen bei der Beschreibung elementarer Teilchen, da sie die Bewegungsgleichungen freier Spin-0 und Spin-1 Teilchen repräsentieren. Um ihre Bedeutung im Rahmen des  $U(2)$ –Programms genauer studieren zu können, werden die Eigenlösungen der Gleichungen ermittelt.

Die Randbedingungen dieser Lösungen, die zur Eindeutigkeit und Stetigkeit auf der untersuchten Mannigfaltigkeit notwendig sind, werden bei der allgemeinen Lösung nicht berücksichtigt. Es werden alle Lösungen zugelassen, die auf dem offenen Intervall  $0 < \vartheta < \pi/2$   $C^\infty$ –Funktionen sind. Die Randpunkte  $\vartheta = 0$  und  $\vartheta = \pi/2$ , bzw. bei beliebigem Parameterbereich die singulären Stellen  $\vartheta = s_\vartheta$ , werden gesondert behandelt. Solange es nicht ausdrücklich angegeben wird, dürfen die Eigenwerte  $\omega, m_1$  und  $m_2$ , die aus den Operatoren der Cartan–Subalgebra gewonnen werden (mit  $A$  : Funktion, Vektorkomponente, Tensorkomponente etc.) ,

$$\partial_\tau A = i\omega A, \quad \partial_{\varphi_1} A = i m_1 A \quad \text{und} \quad \partial_{\varphi_2} A = i m_2 A, \quad (3.1)$$

beliebige (auch komplexe) Werte annehmen. Dies hat den Vorteil, bei geringfügigen Änderungen der Ausgangsgleichung (z.B. in Gleichung (3.11)) die Lösungen sofort ablesen zu können. Die eindeutigen, global definierten Funktionen müssen jedoch ganzzahlige Eigenwerte aufweisen.

### 3.1 Klein-Gordon-Feld

Die Klein–Gordon–Gleichung  $\square\Phi_{(0)} = 0$  beschreibt in der klassischen Theorie ein masseloses Spin-0-Teilchen. Im  $U(2)$ -Programm wird dieser Differentialgleichung und den zugehörigen Teilchen keine Bedeutung beigemessen.<sup>1</sup> Im Rahmen der Symmetrieuntersuchung läßt sich aber an dieser Gleichung und deren Eigenlösungen das Verhalten der  $K^{\alpha\pm}$ -Operatoren als Stufenoperatoren besonders gut deutlich machen. Des weiteren kommt den Lösungen bei der Eichung der Maxwell–Gleichung noch Bedeutung zu.

#### 3.1.1 Masselose Klein-Gordon-Gleichung

Die allgemeine Lösung  $\Phi_{(0)}$  der Klein–Gordon–Gleichung

$$0 = \square\Phi_{(0)} = \left( \frac{\partial^2}{\partial\tau^2} - \frac{1}{\cos^2\vartheta} \frac{\partial^2}{\partial\varphi_1^2} - \frac{1}{\sin^2\vartheta} \frac{\partial^2}{\partial\varphi_2^2} - \frac{1}{\sin\vartheta \cos\vartheta} \frac{\partial}{\partial\vartheta} \sin\vartheta \cos\vartheta \frac{\partial}{\partial\vartheta} \right) \Phi_{(0)} \quad (3.2)$$

läßt sich mit dem Separationsansatz

$$\Phi_{(0)} = e^{i(\omega\tau + m_1\varphi_1 + m_2\varphi_2)} \Phi(\vartheta) =: V \cdot \Phi(\vartheta) \quad (3.3)$$

einfach ermitteln. (Siehe z.B. [1, 24].) Der Vorfaktor  $V$  beinhaltet nur den Exponentialterm.

Es ergibt sich folgende Differentialgleichung für  $\Phi(z)$  mit  $z = \cos^2\vartheta$ :

$$0 = \frac{\partial^2}{\partial z^2} \Phi + \left[ \frac{1}{z} - \frac{1}{1-z} \right] \frac{\partial}{\partial z} \Phi + \left[ -\frac{m_1^2}{4z} - \frac{m_2^2}{4(1-z)} + \frac{\omega^2}{4} \right] \frac{\Phi}{z(1-z)}. \quad (3.4)$$

Dies ist eine verallgemeinerte hypergeometrische Differentialgleichung, deren allgemeine Lösung lautet ( $P$ : Riemannsche P-Funktion, siehe Anhang D):

$$\Phi(z) = P \left| \begin{array}{ccc|c} 0 & \infty & 1 & \\ -\frac{m_1}{2} & \frac{1+\sqrt{1+\omega^2}}{2} & -\frac{m_2}{2} & z \\ \frac{m_1}{2} & \frac{1-\sqrt{1+\omega^2}}{2} & \frac{m_2}{2} & \end{array} \right|. \quad (3.5)$$

Von den beiden Darstellungen der allgemeinen Lösung (3.5) als hypergeometrische Funktionen ( $F \equiv {}_2F_1$ ) ist nur eine Lösung an der Stelle  $z = 0$  (d.i.  $\vartheta = \pi/2$ ) beschränkt.

$$\Phi_{(0)} = V \cdot z^{\frac{|m_1|}{2}} (1-z)^{\frac{|m_2|}{2}} F\left(\frac{|m_1|+|m_2|+1}{2}, \frac{\sqrt{1+\omega^2}}{2}, \frac{|m_1|+|m_2|+1}{2} - \frac{\sqrt{1+\omega^2}}{2}; 1 + |m_1|; z\right) \quad (3.6)$$

---

<sup>1</sup>Siehe auch S.50.

(Die bei  $z = 1$  beschränkte Funktion ergibt sich durch Anwendung der  $\rho_0$ -Transformation.) Ohne die Beschränkung auf ganzzahlige Werte für  $m_1, m_2$  und  $\omega$  läßt sich immer eine Lösung durch die Nebenbedingung

$$\begin{aligned} \omega &= \pm \sqrt{(|m_1| + |m_2| + 2n + 2)(|m_1| + |m_2| + 2n)} \quad \text{mit} \quad n \in \mathbb{N}^0 \quad (3.7) \\ \longrightarrow -n &= \frac{|m_1| + |m_2| + 1}{2} - \frac{\sqrt{1 + \omega^2}}{2} \end{aligned}$$

finden, die im gesamten Definitionsgebiet beschränkt ist, da der zweite Parameter in der hypergeometrischen Funktion ganzzahlig und negativ ist.

$$\Phi_{(0)n} = e^{i(\omega(n)\tau + m_1\varphi_1 + m_2\varphi_2)} \cdot z^{\frac{|m_1|}{2}} (1-z)^{\frac{|m_2|}{2}} F(|m_1| + |m_2| + 1 + n, -n; 1 + |m_1|; z) \quad (3.8)$$

$$\sim e^{i(\omega(n)\tau + m_1\varphi_1 + m_2\varphi_2)} \cdot z^{\frac{m_1}{2}} (1-z)^{\frac{m_2}{2}} P_n^{(m_1, m_2)}(1-2z) \quad (3.9)$$

$$\sim e^{i(\omega(n)\tau + m_1\varphi_1 + m_2\varphi_2)} \cdot P_n^m(1-2z) \quad \text{für } |m_1| = |m_2| = |m| \quad (3.10)$$

Die Jacobi-Polynome  $P_n^{|m_1|, |m_2|}$  und die adjungierten Legendre-Funktionen  $P_n^m$  treten als äquivalente Darstellungen der angegebenen hypergeometrischen Funktion auf [20]. Ein von den Parametern abhängiger Vorfaktor wurde weggelassen. Gleichung (3.8) ist mit der bekannten Lösung (C.9) (aus [1]) mit  $n = (l - |m_2| - m_1)/2$  identisch.

Nur für  $m_1 = m_2 = n = \omega = 0$  läßt sich die Nebenbedingung (3.7) mit ganzen Zahlen erfüllen. Die einzige Lösung der masselosen Klein-Gordon-Gleichung, die im gesamten Definitionsgebiet beschränkt und eindeutig ist, ist daher die triviale  $\Phi = \text{const}$ .

Arbeitet man aber mit zusätzlichen Termen in der Bewegungsgleichung, dann entstehen andere Lösungen, die auch global definiert sein können.

### 3.1.2 Erweiterte Klein-Gordon-Gleichung

Die masselose Klein-Gordon-Gleichung ist nicht konform invariant. Sie kann aber durch einen zusätzlichen Term, der den Krümmungsskalar mit berücksichtigt, konform invariant gemacht werden, wie es in Gleichung (2.70) geschehen ist. Ein weiterer  $\Phi_{(0)}^4$  kann ebenso addiert werden, der aber hier vernachlässigt wird [4]. Ein Wechselwirkungspotential  $U$ , das ebenfalls herangezogen werden kann und in der Bewegungsgleichung als  $U \cdot \Phi_{(0)}$  erscheinen soll, muß die Skalendimension  $d(U) = 2$  besitzen.

$$\square \Phi_{(0)} = \frac{R}{6} \Phi_{(0)} - U \cdot \Phi_{(0)} =: -\epsilon \Phi_{(0)} \quad (3.11)$$

Der Wert des Krümmungsskalars  $R$  nimmt bei einem Radius von 1 den Wert  $-6$  (Gleichung (2.12)) an, d.h. bei  $U \equiv 0$  ist  $\epsilon = -1$ .

Ein interessanter Ansatz ist für  $U$  durch

$$U = \epsilon_0 + \frac{\epsilon_1}{\cos^2 \vartheta} + \frac{\epsilon_2}{\sin^2 \vartheta} \quad (3.12)$$

gegeben, der es ermöglicht,  $\omega$ ,  $m_1$  und  $m_2$  beliebig zu variieren. Dasselbe  $U$  läßt sich auch als Divergenz einer 1-Form  $A_{(1)}$  mit  $(A_\tau, A_{\varphi_1}, A_{\varphi_2}, A_\vartheta) = (\epsilon_0\tau, \epsilon_1\varphi_1, \epsilon_2\varphi_2, 0)$  darstellen. Für weitere Untersuchungen wird  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0$  angenommen. Das  $\epsilon_0$  wird mit  $-R/6$  zu  $\epsilon = \epsilon_0 - R/6$  zusammengefaßt (Gleichung (3.11)).

Für die Berechnung von globalen Lösungen erhält man folgende Zwangsbedingung an  $\epsilon$  bzw.  $\omega$ :

$$\omega = \pm \sqrt{(|m_1| + |m_2| + 2n + 1)^2 - 1 - \epsilon} \in \mathbb{Z} \quad \text{mit} \quad n \in \mathbb{N}^0 \quad (3.13)$$

Daraus folgt, daß für  $\epsilon = -1$  unendlich viele globale Lösungen  $\Phi_{(0)n}$  der konform invarianten Klein-Gordon-Gleichung (3.11) in der Form (3.8) mit  $\omega(n) = \pm(|m_1| + |m_2| + 2n + 1)$  existieren. Da der  $M^4$  dem betrachteten Raum konform äquivalent ist, entspricht dies der Tatsache, daß im flachen Minkowskiraum die Lösungen der Klein-Gordon-Gleichung in ebene Wellen entwickelt werden können. In Gegenwart von Massen ( $\epsilon_0$ ) existieren in  $M^4$  Lösungen für beliebiges  $\epsilon$ , während sich für  $S^1 \times S^3$  ein diskretes Spektrum ergibt:

Für jedes gerade  $\epsilon$  bzw. für jedes ungerade  $\epsilon$  mit  $\epsilon + 1 = 0(\text{Mod } 4)$  existiert mindestens eine und für jedes ungerade  $\epsilon$  mit  $\epsilon + 1 = 2(\text{Mod } 4)$  keine globale Lösung. Betrachtet man  $\epsilon_0$  als Massenterm, dann existiert für jedes  $\epsilon_0 = -1/0/1(\text{Mod } 4)$  jeweils mindestens eine Lösung und für  $\epsilon_0 = 2(\text{Mod } 4)$  keine Lösung.<sup>2</sup>

### 3.1.3 Konforme Generatoren als Stufenoperatoren

Die  $K^{\alpha\pm}$ -Felder (Tabelle 2.2) wirken auf die Eigenfunktionen wie Stufenoperatoren. Hierbei spielt es keine Rolle, welche Bewegungsgleichung man benutzt, da nur die Struktur der  $K^{\alpha\pm}$  und der Funktionen eingehen.

---

<sup>2</sup> Abweichend vom  $U(2)$ -Programm vermute ich hier die Grundlage der drei Generationen. Sollte bei der Betrachtung der Dirac-Gleichung ein ähnliches Ergebnis vorliegen, dann hätte man ein Indiz für die Existenz von genau drei Leptonengenerationen mit unterschiedlichen Massen.

Operator	$K^{a\pm}$	$K^{b\pm}$	$K^{c\pm}$	$K^{d\pm}$	$K^{e\pm}$	$K^{f\pm}$
verändert	$m_1 + m_2$	$m_2 - m_1$	$\omega + m_2$	$\omega - m_2$	$\omega + m_1$	$\omega - m_1$
um	$\pm 2$	$\pm 2$	$\pm 2$	$\pm 2$	$\pm 2$	$\pm 2$
und läßt	$m_1 - m_2$	$m_1 + m_2$	$\omega - m_2$	$\omega + m_2$	$\omega - m_1$	$\omega + m_1$
und invariant	$\omega$	$\omega$	$m_1$	$m_1$	$m_2$	$m_2$

Tabelle 3.1: Wirkung der  $K^{\alpha\pm}$ -Felder auf Eigenwerte  $\omega, m_1$  und  $m_2$  der Cartan-Subalgebra (Gleichung (3.1)) beliebiger Eigenfunktionen. Es gibt eine Kombination der drei Eigenwerte, die verändert wird, während zwei andere unverändert bleiben.

Die Wirkung der Operatoren auf die Eigenwerte  $\omega, m_1$  und  $m_2$  ist in Tabelle 3.1 zusammengefaßt. Für jeden Operator gibt es eine Kombination der drei Werte, die verändert wird, während zwei invariant bleiben. Dabei ist zu beachten, daß die Veränderung von  $\omega + m_2 + m_1$  immer geradzahlig ist. Die Größe  $n$  mit  $n = (\omega - m_1 - m_2 - 1)/2$  bleibt also stets halbzahlig oder stets ganzzahlig.

Die beiden kompakten Untergruppen der  $SU(2, 2)$ , die von  $K^{a,\pm}$  und  $K^{b,\pm}$  erzeugten  $SU(2)$ , besitzen im Funktionenraum eine endliche Basis der irreduziblen Darstellungen mit dem Gewicht  $j$ . Sie lassen sich bekanntlich mittels Kugelfunktionen  $Y_l^m$  darstellen [32]. Dies läßt sich auch leicht bestätigen, da  $Y_l^m \sim \exp(im\phi)P_l^m$  mit  $\phi = \varphi_1 \pm \varphi_2$  bereits in Gleichung (3.10) erscheint.

Mit den Gleichungen (B.6) und (B.7) wird die Bedingung

$$\hat{K}^2\Phi = j(j+1)\Phi, \quad (3.14)$$

die das Gewicht der Darstellung festlegt, mit der konform erweiterten Klein-Gordon-Gleichung verknüpft. Denn mit

$$\square\Phi = -\Phi \Rightarrow \Phi = e^{i(\omega\tau + m_1\varphi_1 + m_2\varphi_2)} P \begin{vmatrix} 0 & \infty & 1 \\ -\frac{m_1}{2} & \frac{1+\omega}{2} & -\frac{m_2}{2} \\ \frac{m_1}{2} & \frac{1-\omega}{2} & \frac{m_2}{2} \end{vmatrix} z \quad (3.15)$$

folgt

$$\hat{K}^2\Phi = -\frac{\Delta\Phi}{4} = \frac{\omega^2 - 1}{4}\Phi = j(j+1)\Phi \quad (3.16)$$

$$\rightarrow \frac{\omega^2}{4} = \left(j + \frac{1}{2}\right)^2 \rightarrow |\omega| = 2j + 1 \quad (3.17)$$

$$\Phi_j = e^{\pm i(2j+1)\tau} e^{i(m_1\varphi_1 + m_2\varphi_2)} P \begin{vmatrix} 0 & \infty & 1 \\ -\frac{m_1}{2} & -j & -\frac{m_2}{2} \\ \frac{m_1}{2} & 1+j & \frac{m_2}{2} \end{vmatrix} z. \quad (3.18)$$

Wegen (3.17) und  $|\omega| = |m_1| + |m_2| + 2n + 1$  folgt außerdem, daß  $n$  im Intervall  $0 \leq n \leq j$  liegen muß. Somit läuft  $n$  nur das halbe Gewichtsspektrum ab, die 'negative' Hälfte entsteht durch die Vorzeichenumkehr bei  $\omega$ .

Weiterhin erhält man die Eigenwerte der vertauschenden Operatoren  $K^a, K^b$  und  $\hat{K}^2$  (analog zu den Gleichungen (C.2)-(C.4) nach [24]):

$$K^a\Phi_j = i\frac{m_1 + m_2}{2}\Phi_j, \quad K^b\Phi_j = i\frac{m_1 - m_2}{2}\Phi_j, \quad (3.19)$$

$$\hat{K}^2\Phi_j = j(j+1)\Phi_j. \quad (3.20)$$

Fordert man die Abbruchbedingungen für die Zustände mit höchstem Gewicht,  $K_-\Phi_- = 0$  und  $K_+\Phi_+ = 0$ , sowie die Verbindungen  $(K_+)^{2j}\Phi_- = \Phi_+$  und  $(K_-)^{2j}\Phi_+ = \Phi_-$ , dann erhält man die Forderung

$$\Phi_{\pm} = e^{\pm i(m_1\varphi_1 + m_2\varphi_2)} z^{m_1/2} (1-z)^{m_2/2}. \quad (3.21)$$

(Dies sind speziell diejenigen Entwicklungen der  $P$ -Funktion, bei denen die beteiligte hypergeometrische Funktion trivial wird.)

In den folgenden Punkten wird zu jedem Gewicht  $j$  eine endliche Basis der irreduziblen Darstellungen im Funktionenraum gegeben. Weil die unterliegende Symmetrie die  $SU(2, 2)$ -Gruppe ist, treten auch die halbzahligen Darstellungen der  $SU(2)$ -Untergruppen in Erscheinung; man erhält  $D(j, j)$ -Darstellungen mit  $j = 0, 1/2, 1, \dots$ . Weiterhin lassen sich nach Gleichung (3.13) für jedes  $j$  die möglichen Werte für  $\epsilon_0$  durch die Bedingung

$$\omega' = \pm\sqrt{(2j+1+2n')^2 - \epsilon_0} \in \mathbb{Z} \quad \text{mit} \quad n' \in \mathbb{N}^0 \quad (3.22)$$

$$\leftrightarrow \epsilon_0 = (2j+1+2n')^2 - (\omega')^2 = (2j+1+2n'+\omega)(2j+1+2n'-\omega) \quad (3.23)$$

finden. Es sind genau die  $\epsilon_0$  erlaubt, die sich als Differenz zweier Quadratzahlen schreiben lassen, wobei die Größere entweder gerade (bei  $j$ : halbzahlig) oder ungerade (bei  $j$ :

ganzzahlig) ist.

- $\mathbf{j} = \mathbf{0}$  (mit  $n = 0$ ):  $\{0, 0\}$ : Es gibt nur die triviale konstante Lösung. Die globalen Lösungen können sowohl masselos ( $\epsilon_0 = 0$ ) als auch massiv ( $\epsilon_0 = 1(\text{Mod } 4)$  oder  $\epsilon_0 = 0(\text{Mod } 8)$ ) sein.
- $\mathbf{j} = \mathbf{1/2}$  (mit  $n = 0$ ):  $\{1, 0\} \leftrightarrow \{0, 1\}$ : Es gibt vier verschiedene Lösungen mit den Eigenschaften:

$$\left. \begin{array}{l}
 \boxed{
 \begin{array}{ccc}
 e^{i\varphi_1} \cos \vartheta & \xleftrightarrow{K^{b\pm}} & e^{i\varphi_2} \sin \vartheta \\
 K^{a\pm} \uparrow & & K^{a\pm} \downarrow \\
 e^{-i\varphi_2} \sin \vartheta & \xleftrightarrow{K^{b\pm}} & e^{-i\varphi_1} \cos \vartheta
 \end{array}
 } & \begin{array}{l}
 e^{i\varphi_1} \cos \vartheta = \Phi_+^{a,1} = \Phi_+^{b,1} \\
 e^{-i\varphi_1} \cos \vartheta = \Phi_-^{a,2} = \Phi_-^{b,2} \\
 e^{i\varphi_2} \sin \vartheta = \Phi_+^{a,2} = \Phi_-^{b,1} \\
 e^{-i\varphi_2} \sin \vartheta = \Phi_-^{a,1} = \Phi_+^{b,2}
 \end{array}
 \end{array} \right\} (3.24)$$

Die globalen Lösungen existieren für die  $\epsilon_0$  Werte  $\epsilon_0 = 3(\text{Mod } 4)$ ,  $\epsilon_0 = 4(\text{Mod } 8)$  oder  $\epsilon_0 = 0(\text{Mod } 16)$ .

- $\mathbf{j} = \mathbf{1}$  (mit  $n = 0/1$ ):  $\{2, 0\} \leftrightarrow \{1, 1\} \leftrightarrow \{0, 2\}$ : Es gibt acht Funktionen, die bezüglich einer  $SU(2)$ -Gruppe einen Zustand mit höchstem Gewicht darstellen:

$$\left. \begin{array}{l}
 e^{i2\varphi_1} \cos^2 \vartheta = \Phi_+^{a,1} = \Phi_+^{b,1} \\
 e^{-i2\varphi_1} \cos^2 \vartheta = \Phi_-^{a,2} = \Phi_-^{b,2} \\
 e^{i2\varphi_2} \sin^2 \vartheta = \Phi_+^{a,2} = \Phi_-^{b,1} \\
 e^{-i2\varphi_2} \sin^2 \vartheta = \Phi_-^{a,1} = \Phi_+^{b,2}
 \end{array} \right\} (3.25)$$

$$\left. \begin{aligned}
K^{a+} \Phi_-^{a,1} &= e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} \sin \vartheta \cos \vartheta = K^{a-} \Phi_+^{a,1} \\
K^{a+} \Phi_-^{a,2} &= e^{i(-\varphi_1 + \varphi_2)} \sin \vartheta \cos \vartheta = K^{a-} \Phi_+^{a,2} \\
K^{b+} \Phi_-^{b,1} &= e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} \sin \vartheta \cos \vartheta = K^{b-} \Phi_+^{b,1} \\
K^{b+} \Phi_-^{b,2} &= e^{i(-\varphi_1 - \varphi_2)} \sin \vartheta \cos \vartheta = K^{b-} \Phi_+^{b,2}
\end{aligned} \right\} \quad (3.26)$$

Wendet man die Stufenoperatoren der jeweils anderen Gruppe auf die rechts stehenden Funktionen an, wird zwar in einer Richtung die Abbruchbedingung erfüllt (Vertauschungsregeln von  $K^{a\pm}$  und  $K^{b\pm}$ ), in der anderen verläßt man aber den Zyklus.

$$\left. \begin{aligned}
K^{a+} K^{b+} \Phi_-^{b,1} &= K^{b+} K^{a+} \Phi_+^{a,2} = 0 \\
K^{a-} K^{b+} \Phi_-^{b,2} &= K^{b+} K^{a-} \Phi_-^{a,2} = 0 \\
K^{b+} K^{a+} \Phi_-^{a,1} &= K^{a+} K^{b+} \Phi_+^{b,2} = 0 \\
K^{b-} K^{a+} \Phi_-^{a,2} &= K^{a+} K^{b-} \Phi_-^{b,2} = 0
\end{aligned} \right\} \quad (3.27)$$

und

$$K^{a+} K^{b+} \Phi_-^{b,2} = K^{b-} K^{a+} \Phi_-^{a,1} = K^{a-} K^{b+} \Phi_-^{b,1} = K^{b+} K^{a+} \Phi_-^{a,2} = \sin^2 \vartheta - \cos^2 \vartheta \quad (3.28)$$

Die letzte Funktion besitzt **keine**  $\varphi_1$ - oder  $\varphi_2$ -Abhängigkeit und gehört zu dem Wert  $n = 1$ , während alle anderen den Wert  $n = 0$  besitzen. Die Gleichheit folgt aus den Vertauschungsregeln und der Identität der Abbruchfunktionen.

Die Funktionen der Gleichungen (3.26) und (3.28) bilden die  $j = 1$ -Darstellungen der beiden  $SU(2)$  Untergruppen  $K^{a\pm}$  und  $K^{b\pm}$ .

$e^{i2\varphi_1} \cos^2 \vartheta$	$\xleftrightarrow{K^{b\pm}}$	$e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} \sin \vartheta \cos \vartheta$	$\xleftrightarrow{K^{b\pm}}$	$e^{i2\varphi_2} \sin^2 \vartheta$
$K^{a\pm} \updownarrow$		$K^{a\pm} \updownarrow$		$K^{a\pm} \updownarrow$
$e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} \sin \vartheta \cos \vartheta$	$\xleftrightarrow{K^{b\pm}}$	$(\sin^2 \vartheta - \cos^2 \vartheta)$	$\xleftrightarrow{K^{b\pm}}$	$e^{i(-\varphi_1 + \varphi_2)} \sin \vartheta \cos \vartheta$
$K^{a\pm} \updownarrow$		$K^{a\pm} \updownarrow$		$K^{a\pm} \updownarrow$
$e^{-i2\varphi_2} \sin^2 \vartheta$	$\xleftrightarrow{K^{b\pm}}$	$e^{i(-\varphi_1 - \varphi_2)} \sin \vartheta \cos \vartheta$	$\xleftrightarrow{K^{b\pm}}$	$e^{-i2\varphi_1} \cos^2 \vartheta$



Betrachtet man wieder, für welche Werte von  $\epsilon_0$  sich global definierte Lösungen ergeben, dann ergibt sich dasselbe Spektrum wie bei  $j = 0$ ,  $\epsilon_0 = 1(\text{Mod } 4)$  oder  $\epsilon_0 = 0(\text{Mod } 8)$ , mit einer Ausnahme:  $\epsilon_0 = 1$  ist verboten! (Es gibt keine natürlichen Zahlen  $n'$  und  $\omega$ , die die Bedingung  $(3 + 2n')^2 - \omega^2 = 1$  erfüllen.)

- $\mathbf{j}:\{2j, 0\} \leftrightarrow \{2j - 1, 1\} \leftrightarrow \dots \leftrightarrow \{0, 2j\}$  Alle beschränkten Lösungen lassen sich in folgendes Diagramm einordnen:

$$\begin{array}{ccccc}
 e^{i2j\varphi_1} \cos^{2j} \vartheta & \xleftrightarrow{K^{b\pm}} & \dots & \xleftrightarrow{K^{b\pm}} & e^{i2j\varphi_2} \sin^{2j} \vartheta \\
 K^{a\pm} \downarrow & & \vdots & & K^{a\pm} \downarrow \\
 \vdots & & \dots & & \vdots \\
 K^{a\pm} \downarrow & & \vdots & & K^{a\pm} \downarrow \\
 e^{-i2j\varphi_2} \sin^{2j} \vartheta & \xleftrightarrow{K^{b\pm}} & \dots & \xleftrightarrow{K^{b\pm}} & e^{-i2j\varphi_1} \cos^{2j} \vartheta
 \end{array}$$

Generell gilt: Eine *Eckfunktion* ( $\sqrt{\Phi_+^{a,b}}$ , höchste Gewichtsfunktion) darf nicht gleichzeitig von  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  abhängig sein. Startet man von einer beliebigen Ecke, dann kann nur dann eine andere Ecke erreicht werden, wenn der Startparameter  $m_1$  oder  $m_2$  ganzzahlig ist.

Die Lösungen der Klein–Gordon–Gleichung oder ihrer konformen Erweiterung führen auf einfache Weise zu den Basiselementen der irreduziblen Darstellung der  $SU(2) \times SU(2)$  Untergruppe der  $SU(2, 2)$ . Die einfachste nichttriviale Darstellung,  $D(1/2, 1/2)$ , besitzt vier Elemente (Gleichung (3.24)), die als *Grundbausteine* in allen relevanten Funktionen auftreten:

$$r := \cos \vartheta e^{i\varphi_1}, \quad \bar{r} = \cos \vartheta e^{-i\varphi_1}, \quad s := \sin \vartheta e^{i\varphi_2}, \quad \bar{s} = \sin \vartheta e^{-i\varphi_2}. \quad (3.29)$$

Definiert man weiterhin

$$t := e^{i\tau} \quad \bar{t} = e^{-i\tau}, \quad (3.30)$$

dann läßt sich z.B. Gleichung (3.8) auch durch

$$\Phi_{(0)n} = t^\omega r^{m_1} s^{m_2} F(m_1 + m_2 + 1 + n, -n; 1 + m_1; r\bar{r}) \quad (3.31)$$

$$= t^\omega r^{m_1} s^{m_2} F(m_1 + m_2 + 1 + n, -n; 1 + m_2; s\bar{s}) \quad (3.32)$$

darstellen.<sup>3</sup>

## 3.2 Maxwell-Feld

Die Darstellung aller Vektorpotentiale  $A_{(1)}$ , die Lösung der quellenfreien Maxwell-Gleichungen

$$0 = F^{mn}{}_{;n} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \sqrt{-g} g^{mk} g^{nl} (A_{k,l} - A_{l,k}) \right) \quad (3.33)$$

und gleichzeitig Eigenlösungen bezüglich der Cartan-Subalgebra der Symmetriegruppe  $SU(2,2)$  sind, ist ein Hauptziel dieser Arbeit. Es wird wie gehabt mit der biharmonischen Parametrisierung des Raumes  $S^1 \times S^3$  gearbeitet, deren Metrik mit Gleichung (2.3) gegeben ist. Einzelne Eigenlösungen sind bereits bekannt, so z.B. in [9] die für das  $U(2)$ -Programm relevanten Lösungen oder in [34] Eigenlösungen in Form von selbstdualen Feldstärken. Der Zusammenhang letzterer mit den hier gefundenen Lösungen wird im Anhang, Abschnitt C.2.6, hergestellt.

### 3.2.1 Wahl der Eichung

Für die Darstellung der Lösungen sind zwei verschiedene Eichungen von Interesse. Die **erste Eichung** dient zur Ermittlung aller Lösungen. Sie wird charakterisiert durch die Bedingung  $A_{0;0} \equiv 0$ . Es kann weiterhin  $\operatorname{div} A = \delta A = A^\mu{}_{;\mu} = 0$  gefordert werden, wobei sich diese Eigenschaft entweder aus den Maxwell-Gleichungen ergeben kann (falls  $\frac{\partial}{\partial \tau} A_\mu = i\omega A_\mu \neq 0$  ist) oder als freie Wahl zur Verfügung steht (falls  $A_0 \neq 0$  und  $A_{0;0} = 0$  gelten). Mit dieser Eichung lassen sich die Maxwellgleichungen nach ein paar Umformungen entkoppeln. Man erhält vier hypergeometrische Differentialgleichungen, die durch die Riemannsche  $P$ -Funktion gelöst werden. Diese vier Funktionen müssen, zur Erfüllung einer notwendigen Nebenbedingung, linear abhängig sein, was auf Grund ihrer Verwandtschaft<sup>4</sup> auch stets möglich ist. Im Anhang, Abschnitt C.2, ist der komplette Lösungsweg aufgezeigt, die vollständige Lösung bezüglich der ersten Eichung wird im nächsten Abschnitt dargestellt.

---

<sup>3</sup>Siehe auch S.50.

<sup>4</sup>Bei verwandten  $P$ -Funktionen unterscheiden sich zwei der sechs Parameter um  $\pm 1$ . Drei verwandte  $P$ -Funktionen sind stets linear abhängig.[25]

Im Rahmen des  $U(2)$ -Programms ist jedoch eine andere Eichung von Bedeutung. Da die Tori der  $\tau, \varphi_1$  und  $\varphi_2$ -Richtungen die dominierenden topologischen Objekte des Programms sind, werden nur die 1-Formen  $A_{(1)}$  betrachtet, die tangential auf diesen Tori definiert sind. Dies bedeutet, daß deren  $A_\vartheta$ -Komponente verschwinden muß. Diese Bedingung der **zweiten Eichung** ist stets durch Umeichen der bekannten Lösungen zu erreichen. Dabei wird aber in der Regel die Eigenschaft  $\delta A = 0$  verlorengehen. Berücksichtigt man weiterhin die  $\rho$ -Transformationen, dann bleibt die Eichung, im Gegensatz zur ersten Eichung, erhalten. Die Divergenz des Vektorpotentials verhält sich unter den  $\rho$ -Transformationen nach der ersten Eichung wie ein sekundäres Feld, während sie nach der zweiten Eichung wie ein quasiprimäres Feld transformiert (siehe Gleichung (2.72)). Speziell bei den Lösungen der zweiten Eichung, die divergenzfrei sind ( $\delta A = 0$ ), hat man Invarianz unter den  $\rho$ -Transformationen, sowohl für  $A_\mu$  als auch für  $\delta A$ . Wegen  $\delta F = \delta dA = 0$  und  $\delta A = 0$  gilt auch  $(\delta d + d\delta)A = 0$ , womit diese Lösungen harmonische 1-Formen sind und bei  $\rho$ -Transformationen dies auch bleiben. Diesen Lösungen wird eine besondere Bedeutung zugemessen.

### 3.2.2 Komplexes Lösungssystem

Die Lösungen der Maxwellgleichungen mit der ersten Eichung  $A_{0,0} = 0$ , die außerdem Eigenlösungen bezüglich der Cartan-Subalgebra von  $SU(2, 2)$  sind, lassen sich mit dem Separationsansatz

$$A_i = e^{i(\omega\tau + m_1\varphi_1 + m_2\varphi_2)} A_i(\vartheta) \quad (3.34)$$

gewinnen. Für  $A_0 \equiv 0$  lassen sie sich darstellen als:

$$\begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = e^{i(\omega\tau + m_1\varphi_1 + m_2\varphi_2)} \begin{pmatrix} 0 \\ -c_{1A} \cdot P_{1A} + c_{1B} \cdot P_{1B} \\ c_{2A} \cdot P_{2A} - c_{2B} \cdot P_{2B} \\ i\hat{A}_3(z)/\sqrt{z(1-z)} \end{pmatrix} \quad (3.35)$$

mit den Konstanten  $c_{1A}, c_{1A}, c_{1A}$  und  $c_{1A}$ , die so zu wählen sind, daß die Nebenbedingung

$$\hat{A}_3(z) = c_{2A} \cdot P_{2A} + c_{2B} \cdot P_{2B} \stackrel{!}{=} c_{1A} \cdot P_{1A} + c_{1B} \cdot P_{1B} \quad (3.36)$$

erfüllt wird. Dabei stehen die Funktionen

$$P_{1A} = P \begin{vmatrix} 0 & \infty & 1 \\ -\frac{m_1}{2} & -\frac{\varepsilon}{2} & -\frac{m_2}{2} \\ 1 + \frac{m_1}{2} & \frac{\varepsilon}{2} & \frac{m_2}{2} \end{vmatrix} z \quad (3.37)$$

$$P_{2A} = P \begin{vmatrix} 0 & \infty & 1 \\ -\frac{m_1}{2} & -\frac{\varepsilon}{2} & -\frac{m_2}{2} \\ \frac{m_1}{2} & \frac{\varepsilon}{2} & 1 + \frac{m_2}{2} \end{vmatrix} z \quad (3.38)$$

$$P_{1B} = P \begin{vmatrix} 0 & \infty & 1 \\ 1 - \frac{m_1}{2} & -\frac{\varepsilon}{2} & -\frac{m_2}{2} \\ \frac{m_1}{2} & \frac{\varepsilon}{2} & \frac{m_2}{2} \end{vmatrix} z \quad (3.39)$$

$$P_{2B} = P \begin{vmatrix} 0 & \infty & 1 \\ -\frac{m_1}{2} & -\frac{\varepsilon}{2} & 1 - \frac{m_2}{2} \\ \frac{m_1}{2} & \frac{\varepsilon}{2} & \frac{m_2}{2} \end{vmatrix} z \quad (3.40)$$

für Riemannsche  $P$ -Funktionen. Da diese verwandte Funktionen sind, läßt sich die Nebenbedingung (3.36) stets erfüllen.

Bei  $A_0 \neq 0$  (aber  $A_{0,0} \equiv 0$  gilt) erhält man eine Sonderlösung, die in Gleichung (3.52) dargestellt ist.

### 3.2.3 Beispiele

Folgende Konstanten werden bei der Erfüllung der Nebenbedingung (3.36) benötigt:

$$\left. \begin{aligned} c_a &= \frac{\Gamma(1+k+m_2)\Gamma(1-k-m_1)}{\Gamma(1+m_2)\Gamma(1-m_1)} = \frac{(1+m_2)_k}{(1-k-m_1)_k} \\ c_b &= \frac{\Gamma(1+k+m_1)\Gamma(1-k-m_2)}{\Gamma(1+m_1)\Gamma(1-m_2)} = \frac{(1+m_1)_k}{(1-k-m_2)_k} \end{aligned} \right\} \quad (3.41)$$

Diese Konstanten gelten auch für nichtganze  $m_1$  und  $m_2$ , aber nicht für gebrochene oder nichtpositive  $k$ .

Betrachtet man die Lösungen mit  $m_1, m_2 > 0$  und  $k = \frac{\omega - m_1 - m_2}{2} \in \mathbb{N}^+$ , dann erhält man zwei linear unabhängige Lösungen, die global definiert sind (stetig und beschränkt).

Sie können dargestellt werden als

$$\begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = e^{i(\omega\tau+m_1\varphi_1+m_2\varphi_2)} \cdot z^{m_1/2}(1-z)^{m_2/2} \begin{pmatrix} 0 \\ A_1(z) \\ A_2(z) \\ \frac{i}{\sqrt{z(1-z)}}\hat{A}_3(z) \end{pmatrix} \quad (3.42)$$

mit

- Erste Lösung ( $L_1$ )

$$A_1 = F(-k, \omega - k; 1 + m_2; 1 - z) \quad (3.43)$$

$$A_2 = c_{2a}(1-z)F(1-k, 1+\omega-k; 1+m_1; z) - c_{2b}F(-k, \omega-k; 1+m_1; z) \quad (3.44)$$

$$\hat{A}_3 = F(-k, \omega - k; 1 + m_2; 1 - z) \quad (3.45)$$

$$c_{2a} = 1/c_a - c_b \quad , \quad c_{2b} = c_b \quad (3.46)$$

- Zweite Lösung ( $L_2$ )

$$A_1 = -c_{1a}z \cdot F(1-k, 1+\omega-k; 1+m_2; 1-z) + c_{1b}F(-k, \omega-k; 1+m_2; 1-z) \quad (3.47)$$

$$A_2 = -F(-k, \omega - k; m_1 + 1; z) \quad (3.48)$$

$$\hat{A}_3 = F(-k, \omega - k; m_1 + 1; z) \quad (3.49)$$

$$c_{1a} = 1/c_b - c_a \quad , \quad c_{1b} = c_a \quad (3.50)$$

Mit den Konstanten  $c_a$  und  $c_b$  nach Gleichung (3.41). Andere Lösungen sind im Anhang, Abschnitt C.2.4, aufgeführt.

Unter Ausnutzung der  $\rho$ -Transformationen lassen sich einzelne Lösungen miteinander verbinden. Denn mit einer Lösung

$$A_\mu = \chi_\mu(\tau, \varphi_1, \varphi_2, \vartheta) \quad \text{mit } \mu = 0..4 \text{ folgen}$$

$$B_\mu = \chi_\mu(\tau, \varphi_2, \varphi_1, \rho_0(\vartheta)),$$

$$C_\mu = \chi_\mu(\varphi_2, \tau, \varphi_1, \rho_1(\vartheta)),$$

$$D_\mu = \chi_\mu(\varphi_1, \tau, \varphi_2, \rho_2(\vartheta)),$$

$$F_\mu = \chi_\mu(\varphi_2, \varphi_1, \tau, \rho_3(\vartheta)) \quad \text{und}$$

$$E_\mu = \chi_\mu(\varphi_1, \varphi_2, \tau, \rho_4(\vartheta))$$

mittels der  $\rho$ -Transformationen als weitere Lösungen. Diese Eigenschaft wird ausgenutzt, um die Lösungen in Abschnitt 3.3.2 zu klassifizieren.

### 3.2.4 Ausgezeichnete Lösungen

Wie bereits dargestellt, sind im Rahmen des  $U(2)$ -Programms diejenigen Lösungen von Interesse, deren  $A_\theta$ -Komponente weggeeicht worden ist, also die der zweiten Eichung genügen. Da wegen der Eichfreiheit alle Lösungen auf diese Form gebracht werden können, geben wir hier die speziellen Fälle an, bei denen die Lösungen zusätzlich divergenzfrei sind ( $\delta A = 0$ ). Dies sind alle Lösungen, deren Divergenzfreiheit auch nach den  $\rho$ -Transformationen erhalten bleibt.

Dies sind zuerst die Lösungen, die bereits mit der ersten Eichung keine  $A_\theta$ -Komponente besitzen (siehe Anhang, Abschnitt C.2.4).

#### 1. 'A<sub>0</sub>-Lösung'

$$\underline{A} = e^{i(m_1\varphi_1+m_2\varphi_2)}(A_0(z), 0, 0, 0) \quad (3.51)$$

$$A_0(z) = P \begin{vmatrix} 0 & \infty & 1 \\ -\frac{m_1}{2} & 0 & -\frac{m_2}{2} & z \\ \frac{m_1}{2} & 1 & \frac{m_2}{2} \end{vmatrix} \quad (3.52)$$

#### 2. 'A<sub>1</sub>-Lösung'

$$\underline{A} = e^{i(\omega\tau+m_2\varphi_2)}(0, A_1(z), 0, 0, 0) \quad (3.53)$$

$$A_1(z) = P \begin{vmatrix} 0 & \infty & 1 \\ 0 & -\frac{\omega}{2} & -\frac{m_2}{2} & z \\ 1 & \frac{\omega}{2} & \frac{m_2}{2} \end{vmatrix} \quad (3.54)$$

Die beschränkten Entwicklungen dieser Funktion sind bei den ad hoc Lösungen des  $U(2)$ -Programms mit enthalten.

#### 3. 'A<sub>2</sub>-Lösung'

$$\underline{A} = e^{i(\omega\tau+m_1\varphi_1)}(0, 0, A_2(z), 0) \quad (3.55)$$

$$A_2(z) = P \begin{vmatrix} 0 & \infty & 1 \\ -\frac{m_1}{2} & -\frac{\omega}{2} & 0 & z \\ \frac{m_1}{2} & \frac{\omega}{2} & 1 \end{vmatrix} \quad (3.56)$$

Die beschränkten Entwicklungen dieser Funktion sind bei den ad hoc Lösungen des  $U(2)$ -Programms mit enthalten.

4. 'Drittellösung': Neben den Lösungen der ersten Eichung, die gleichzeitig die zweite Eichung erfüllen, gibt es genau einen weiteren Satz von Lösungen, die divergenzfrei sind und die zweite Eichung erfüllen.

Man erhält mit  $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2 \in \{-1, 1\}$ :

$$\begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = c \frac{e^{i(\sigma_0\tau + \sigma_1\varphi_1 + \sigma_2\varphi_2)\frac{4}{3}}}{(\sin \vartheta \cos \vartheta)^{\frac{4}{3}}} \begin{pmatrix} \sigma_0 \\ \sigma_1(\cos \vartheta)^4 \\ \sigma_2(\sin \vartheta)^4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.57)$$

Unter Betrachtung aller Vorzeichenwechsel (d.h. die Wahl aller Kombinationen der  $\sigma_i$ ) erhält man so 8 verschiedene Einzellösungen.

Obwohl einzelne Komponenten divergieren, ist die  $\vartheta$ -Abhängigkeit

$$\int_0^{\pi/2} A_\mu^* A^\mu \sin \vartheta \cos \vartheta d\vartheta = 3 \int_0^{\pi/2} (\sin \vartheta \cos \vartheta)^{1/3} d\vartheta = \frac{3\Gamma(2/3)^2}{2\Gamma(4/3)} \approx 3.08009 \quad (3.58)$$

beschränkt (und unabhängig von den  $\sigma_i$ ).

### 3.2.5 Proca-Gleichung

Um die Untersuchung der Differentialgleichungen und ihrer Lösungen zu ergänzen, bietet sich die Proca-Gleichung (inhomogene Maxwellgleichung)

$$F^{mn}{}_{;n} = -\epsilon B^m \quad \text{mit} \quad F = dB \quad (3.59)$$

an.

Für die Lösungen, die der ersten Eichung genügen, ist die Angabe der Lösung einfach. Nur der  $\tau$ -abhängige Vorfaktor einer Lösung  $\underline{A} = e^{i\omega\tau} \underline{A}(\omega, \dots)$  der homogenen Maxwellgleichungen (3.33) mit  $A_0 = 0$  muß variiert werden. Bildet man den (ebenfalls divergenzfreien)

Vektor

$$\underline{B} = e^{i\tilde{\omega}\tau} \underline{A}(\omega, \dots) \quad \text{mit} \quad \tilde{\omega} = \sqrt{\omega^2 - \epsilon},$$

dann liegt eine Lösung der Proca-Gleichung (3.59) vor.

Die Drittellösung kann ebenfalls auf eine Lösung der Proca-Gleichung abgebildet werden, indem man ein  $\omega(\epsilon)$  einführt:

$$\begin{pmatrix} B_0 \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} = e^{i\omega\tau} \frac{e^{i(\sigma_1\varphi_1 + \sigma_2\varphi_2)^{\frac{4}{3}}}}{(\sin\vartheta \cos\vartheta)^{\frac{4}{3}}} \begin{pmatrix} 4/3 \\ \omega\sigma_1(\cos\vartheta)^4 \\ \omega\sigma_2(\sin\vartheta)^4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad (3.60)$$

$$\omega = \pm \sqrt{\frac{16}{9} - \epsilon} \quad (3.61)$$

Interessanterweise ergibt sich für

$$\epsilon = 7/9 \quad \iff \quad \omega = \pm 1$$

der einzige Wert für ein positives  $\epsilon$ , der ein nichtverschwindendes, ganzzahliges  $\omega$  erlaubt.

### 3.3 Klassifizierung und Vergleich

Es wird nach einer Möglichkeit gesucht, die Lösungen der Maxwell-Gleichungen so zu klassifizieren, daß die besondere Stellung, die einzelne Lösungen im  $U(2)$ -Programm einnehmen, erkennbar wird. Ein solches Schema wird jedoch nicht gefunden. Die Auszeichnung der (für das Programm) relevanten Lösungen kann zur Zeit nur auf die Eigenschaft zurückgeführt werden, daß durch die Eichbedingung  $A_\vartheta \equiv 0$  die Felder nur Komponenten entlang der Heegaard-Tori (und der  $\tau - S^1$ ) besitzen und daß ihre Auszeichnung in der Divergenzfreiheit besteht.

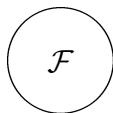
Die beiden folgenden Einteilungen wurden gewählt, um die ausgezeichneten Lösungen (nach Abschnitt 3.2.4) näher charakterisieren zu können.



### 3.3.1 Nach der ersten Eichung

Nachdem alle Lösungen bekannt sind, können sie nach bestimmten Eigenschaften unterteilt werden. Die folgenden Bezeichnungen werden in diesem Abschnitt benutzt:

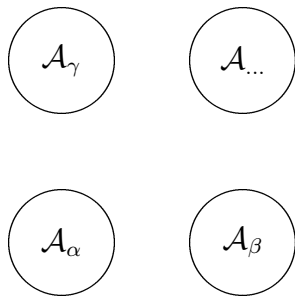
$\mathcal{F}$	$:= \{F \mid dF = \delta F = 0\}$	Feldstärken $F$
$\mathcal{A}$	$:= \{A \mid F = dA \wedge F \in \mathcal{F}\}$	Vektorpotentiale $A$
$\mathcal{C}$	$:= \{A \mid A \in \mathcal{A} \wedge \delta A = 0\}$	Divergenzfreie Vektorpotentiale
$\mathcal{A}_\mu$	$:= \{A \mid A \in \mathcal{A} + \text{Eichung}\}$	Potentiale in bestimmter Eichung / Darstellung
	$\mathcal{A}_\alpha$	erste Eichung
	$\mathcal{A}_\beta$	zweite Eichung
$\mathcal{B}$	$:= \{A \mid  A  < \infty\}$	beschränkte Potentiale
$\mathcal{N}$	$:= \{A \mid m_1, m_2, \omega \in \mathbb{Z}\}$	ganzzahlige Quantenzahlen
$\mathcal{G}$	$:= \{A \mid A \in \mathcal{A}_\alpha \cap \mathcal{A}_\beta\}$	einkomponentige Potentiale
$\mathcal{G}_3$	:	Drittellösung



Alle Feldstärketensoren ( $F_{mn}$ ), die die Maxwellgleichungen erfüllen und deren Komponenten nach der gewählten Basis in variablenseparierter Darstellung schreibbar sind (genauer gesagt, die auf ein solches Potential zurückführbar sind), seien in der Menge  $\mathcal{F}$  zusammengefaßt.

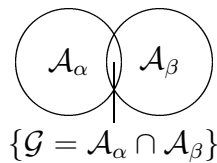
Die Lösungen lassen sich durch die Quantenzahlen  $m_1, m_2$  und  $\omega$  unterscheiden. Zu jedem Satz von Quantenzahlen gehören jedoch mehrere Lösungen. Aus der  $\varphi_1, \varphi_2$  und  $\tau$ -Abhängigkeit folgen drei freie Phasen und aus der  $\vartheta$ -Abhängigkeit noch maximal vier freie Parameter (durch 2  $P$ -Funktionen à zwei Entwicklungen).

Für die homogenen Maxwellgleichungen ist der duale Feldtensor ebenfalls eine Lösung. (Dies wird in Schrödingers Arbeit [34] ausgenutzt.) Es lassen sich immer selbstduale und antiselbstduale Felder erzeugen.

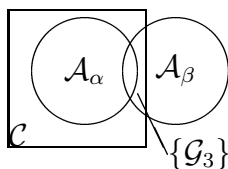


- Die Menge  $\mathcal{F}$  kann auch durch eine äquivalente Menge  $\mathcal{A}$  von Vektorpotentialen dargestellt werden. Die Darstellung ist aber nicht eindeutig, weil die Potentiale  $A$  umgeichtet werden können, ohne daß die Felder  $F$  verändert werden:  $F = dA_\alpha = dA_\beta$  mit  $A_\alpha = A_\beta + d\Phi$ .

Jeder Kreis steht für die vollständige Lösungsmenge (bezüglich  $\mathcal{F}$ ), wobei sich die Kreise untereinander durch die jeweilige Eichung unterscheiden. Die Mengen  $\mathcal{A}_\alpha, \mathcal{A}_\beta$  usw. können durchaus gemeinsame Untermengen, d.h. identische Darstellungen einzelner Lösungen, besitzen. Im folgenden seien  $\mathcal{A}_\alpha$  alle Lösungen mit der ersten Eichung und  $\mathcal{A}_\beta$  alle Lösungen mit der zweiten Eichung.

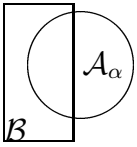


- Die drei Klassen von einkomponentigen Lösungen besitzen in beiden Eichungen dieselbe Darstellung. Sie spannen die Schnittmenge  $\mathcal{G} = \mathcal{A}_\alpha \cap \mathcal{A}_\beta$  auf. Die Menge  $\mathcal{G}$  besteht aus den  $A_0, A_1$  und  $A_2$ -Lösungen sowie den dazugehörigen unbeschränkten Lösungen (siehe Abschnitt 3.2.4).

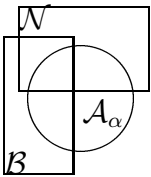


- Die Menge  $\mathcal{C}$  aller divergenzfreien (harmonischen) Lösungen  $A$  besitzt  $\mathcal{A}_\alpha$  vollständig als Untermenge. Zusätzlich beinhaltet sie noch alle Darstellungen, die durch Umeichung mit einer harmonischen Eichfunktion  $\Phi$  (mit  $\square\Phi = 0$ ) aus der Menge  $\mathcal{A}_\alpha$  entstehen. Die Schnittmenge  $\mathcal{C} \cap \mathcal{A}_\beta$  beinhaltet außer der Menge  $\mathcal{G}$  noch die Menge  $\mathcal{G}_3$ , die nur aus der Drittellösung besteht.

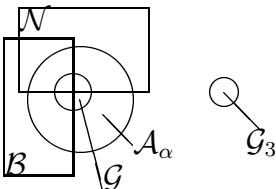
- Die Menge  $\mathcal{B}$  besteht aus allen Vektorpotentialen  $A$  mit beschränkten Komponenten. Dies sind alle Lösungen, deren  $\vartheta$ -Abhängigkeit keine Polstellen aufweisen. Die Schnittmenge  $\mathcal{B} \cap \mathcal{A}_\alpha$  wird in Abschnitt C.2.4 angegeben. Es ergeben sich bestimmte Einschränkungen auf den Wertebereich von  $k$ .  $m_1, m_2$  und  $\omega$  sind noch beliebig (reellwertig). Es besteht die Möglichkeit, daß bei einer anderen Eichung noch weitere beschränkte Lösungen existieren.



- Die Menge  $\mathcal{N}$  besteht aus allen Vektorpotentialen  $A$  mit ganzen Quantenzahlen  $m_1, m_2$  und  $\omega$ . Zu den unbeschränkten Lösungen in  $\mathcal{N} \cap \mathcal{A}_\alpha$  gehören z.B. fast alle negativen oder halbzahligen  $k$ -Werte oder die divergenten Zweige der P-Funktionen.



- Die Lösungsmengen  $\mathcal{G}$  und  $\mathcal{G}_3$  repräsentieren die wichtigen Lösungen und können auch in diesem Bild dargestellt werden.



Ausgehend vom vorhergehenden Diagramm werden die Lösungen in  $\mathcal{A}_\alpha$  in 8 Untermengen unterteilt. Die Menge  $\overline{\mathcal{B}}$  usw. ist dabei das Komplement der Menge  $\mathcal{B}$ , d.h.  $\overline{\mathcal{B}} = \{A \mid A \notin \mathcal{B}\}$ .

Zur Abkürzung werden die folgenden Bezeichnungen eingeführt:

$$\mathcal{U}_1 := \mathcal{A}_\alpha \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{N} \cap \mathcal{G}$$

$$\mathcal{U}_2 := \mathcal{A}_\alpha \cap \overline{\mathcal{B}} \cap \mathcal{N} \cap \mathcal{G}$$

$$\mathcal{U}_3 := \mathcal{A}_\alpha \cap \overline{\mathcal{B}} \cap \overline{\mathcal{N}} \cap \mathcal{G}$$

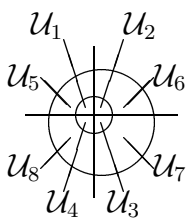
$$\mathcal{U}_4 := \mathcal{A}_\alpha \cap \mathcal{B} \cap \overline{\mathcal{N}} \cap \mathcal{G}$$

$$\mathcal{U}_5 := \mathcal{A}_\alpha \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{N} \cap \overline{\mathcal{G}}$$

$$\mathcal{U}_6 := \mathcal{A}_\alpha \cap \overline{\mathcal{B}} \cap \mathcal{N} \cap \overline{\mathcal{G}}$$

$$\mathcal{U}_7 := \mathcal{A}_\alpha \cap \overline{\mathcal{B}} \cap \overline{\mathcal{N}} \cap \overline{\mathcal{G}}$$

$$\mathcal{U}_8 := \mathcal{A}_\alpha \cap \mathcal{B} \cap \overline{\mathcal{N}} \cap \overline{\mathcal{G}}$$



Die folgende Unterteilung weist die speziellen Lösungen den Mengen zu. Die Angabe  $(X^*)$  in Klammern gibt die Entartung / Vielfachheit der reellen Lösungen bezüglich fest gewählter,

nichtnegativer Quantenzahlen an. (So liefert z.B. die Vertauschung  $\sin \omega \tau \leftrightarrow \cos \omega \tau$  den Faktor  $(2^*)$ , da beide Versionen zulässig sind.)

### 1. Einkomponentige Lösungen

(a) **beschränkte und eindeutige Lösungen:** Menge  $\mathcal{U}_1$ . Die Quantenzahlen  $\omega, k, m_1$  und  $m_2$  sind ganzzahlig.

i.  $A_0$ -Lösung:  $\omega = 0$  ( $4^*$ )

ii.  $A_1$ -Lösung:  $m_1 = 0$  ( $4^*$ ) Interpretation im  $U(2)$ -Programm:

A.  $m_2 = 0$  und  $k = 1, 2, 3$ : Neutrinos

B.  $m_2 = 1$  und  $k = 1, 2, 3$ : Elektron, Myon, Tau

C.  $m_2 = 1$  und  $k = 0$ : Baryonenladung

iii.  $A_2$ -Lösung:  $m_2 = 0$  ( $4^*$ ) Interpretation im  $U(2)$ -Programm: zugehörige Antiteilchen

(b) **nicht beschränkte, aber eindeutige Lösungen:** Menge  $\mathcal{U}_2$ . Die Quantenzahlen  $\omega, m_1$  und  $m_2$  sind ganzzahlig,  $k$  ist halbzahlig oder negativ.

i. Lösung:  $\omega = 0$  ( $4^* / 8^*$ )

ii. Lösung:  $m_1 = 0$  ( $4^* / 8^*$ )

iii. Lösung:  $m_2 = 0$  ( $4^* / 8^*$ )

(c) **nichtganze Quantenzahlen, beschränkt:** Menge  $\mathcal{U}_4$ . Hier gibt es für die Quantenzahlen  $m_1, m_2$  und  $k$  bestimmte Intervalle.

(d) **nichtganze Quantenzahlen, unbeschränkt:** Menge  $\mathcal{U}_3$ .

2. **Zweikomponentige Lösungen:** Dies sind die dualen Felder zu den einkomponentigen Lösungen. Man erhält eine ähnliche Struktur, die Lösungen besitzen aber keine Relevanz im  $U(2)$ -Programm.

(a) **beschränkte und eindeutige Lösungen:**  $\subset \mathcal{U}_5$ . (Ein Teil dieser Lösungen sind in Kombination mit einem Teil der Lösungen aus  $\mathcal{U}_1$  in Schrödingers Lösungen mit enthalten.)

- (b) **nicht beschränkte, aber eindeutige Lösungen:**  $\subset \mathcal{U}_6$ .
- (c) **nichtganze Quantenzahlen, beschränkt:**  $\subset \mathcal{U}_8$ .
- (d) **nichtganze Quantenzahlen, unbeschränkt:**  $\subset \mathcal{U}_7$ .

### 3. Dreikomponentige Lösungen

- (a) **beschränkte und eindeutige Lösungen:**  $\subset \mathcal{U}_5$  (Hier sind die Lösungen Schrödingers mit enthalten).
- (b) **nicht beschränkte, aber eindeutige Lösungen:**  $\subset \mathcal{U}_6$ .
- (c) **nichtganze Quantenzahlen, beschränkt:**  $\subset \mathcal{U}_8$ .
- (d) **nichtganze Quantenzahlen, unbeschränkt:**  $\subset \mathcal{U}_7$ .

- i. umgeeichte Drittellösung (8\*) (Dargestellt in der zweiten Eichung bildet sie die Menge  $\mathcal{G}_3$ .)

#### 3.3.2 Nach der zweiten Eichung

Die Klassifizierung der Lösungen, die der zweiten Eichung genügen ( $A_\vartheta \equiv 0$ ), erfolgt nach ihrem Transformationsverhalten unter der Dihedralen Gruppe  $D_3$ , die durch die  $\rho$ -Transformationen erzeugt wird. Hierbei genügt es, das Transformationsverhalten für  $\rho_0$  und  $\rho_3$  zu kennen, da die anderen Transformationen aus ihnen gebildet werden können. Die einfachsten Darstellungen setzen sich aus Singulett (1), Dubletts (2), Triplett (3) und Sextupeln (6) zusammen. Die Singulett-Lösungen sind unter allen  $\rho$ -Transformationen invariant, die Dublett-Lösungen transformieren unter einem  $\hat{\rho}$  mit  $\mathbb{Z}_2$ -Struktur u.s.f. Wie diese Darstellungen aussehen können, zeigen die folgenden Beispiele für die in Abschnitt 3.2.4 ausgezeichneten Lösungen.

1. Die Drittellösung besteht aus 8 Einzellösungen, die sich durch die Vorzeichen im Phasenfaktor  $V$  und der Komponenten unterscheiden. Unter den  $\rho$ -Transformationen zerfallen diese in vier Darstellungen:  $1, \bar{1}, 3, \bar{3}$ .

(a) 1

$$\begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \frac{e^{i(\tau+\varphi_1+\varphi_2)\frac{4}{3}}}{(\sin \vartheta \cos \vartheta)^{\frac{4}{3}}} \begin{pmatrix} 1 \\ \cos^4 \vartheta \\ \sin^4 \vartheta \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.62)$$

(b)  $\bar{1}$ 

$$\begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \frac{e^{-i(\tau+\varphi_1+\varphi_2)\frac{4}{3}}}{(\sin \vartheta \cos \vartheta)^{\frac{4}{3}}} \begin{pmatrix} 1 \\ \cos^4 \vartheta \\ \sin^4 \vartheta \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.63)$$

(c) 3

$$\begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} \in \left\{ \frac{e^{i(-\tau+\varphi_1+\varphi_2)\frac{4}{3}}}{(\sin \vartheta \cos \vartheta)^{\frac{4}{3}}} \begin{pmatrix} -1 \\ \cos^4 \vartheta \\ \sin^4 \vartheta \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{e^{i(\tau-\varphi_1+\varphi_2)\frac{4}{3}}}{(\sin \vartheta \cos \vartheta)^{\frac{4}{3}}} \begin{pmatrix} 1 \\ -\cos^4 \vartheta \\ \sin^4 \vartheta \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{e^{i(\tau+\varphi_1-\varphi_2)\frac{4}{3}}}{(\sin \vartheta \cos \vartheta)^{\frac{4}{3}}} \begin{pmatrix} 1 \\ \cos^4 \vartheta \\ -\sin^4 \vartheta \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad (3.64)$$

(d)  $\bar{3}$ 

$$\begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} \in \left\{ \frac{e^{-i(-\tau+\varphi_1+\varphi_2)\frac{4}{3}}}{(\sin \vartheta \cos \vartheta)^{\frac{4}{3}}} \begin{pmatrix} -1 \\ \cos^4 \vartheta \\ \sin^4 \vartheta \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{e^{-i(\tau-\varphi_1+\varphi_2)\frac{4}{3}}}{(\sin \vartheta \cos \vartheta)^{\frac{4}{3}}} \begin{pmatrix} 1 \\ -\cos^4 \vartheta \\ \sin^4 \vartheta \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{e^{-i(\tau+\varphi_1-\varphi_2)\frac{4}{3}}}{(\sin \vartheta \cos \vartheta)^{\frac{4}{3}}} \begin{pmatrix} 1 \\ \cos^4 \vartheta \\ -\sin^4 \vartheta \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad (3.65)$$

Die Invarianz unter  $\hat{\rho}_0$  ist offensichtlich:

$$\hat{\rho}_0 : \varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2 \quad A_1 \leftrightarrow A_2 \quad \cos \vartheta \leftrightarrow \sin \vartheta$$

Mit der  $\hat{\rho}_3$  Transformation

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_3 : \tau \leftrightarrow \varphi_2 \quad A_0 \leftrightarrow A_2 \quad \sin \vartheta \rightarrow 1/\sin \vartheta \quad \cos \vartheta \rightarrow -i \cos \vartheta / \sin \vartheta \\ (\sin \vartheta \cos \vartheta)^{-4/3} \rightarrow \sin^4 \vartheta (\sin \vartheta \cos \vartheta)^{-4/3} \end{aligned}$$

erhält man die Invarianzeigenschaft. (Beachte  $(-i)^{-4/3} = e^{\frac{3\pi}{2}i \frac{-4}{3}} = e^{-2\pi i} = 1$ )

2. Drei einkomponentige Lösung mit  $m_1 = m_2 = \omega = 1$ : Durch Kombination der Einzellösungen

$$\begin{aligned} A_0 &= e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} \left( c_1 \frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta} + c_2 \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} \right) \sim e^{i(\varphi_1 + \varphi_2) \pm t_l} \\ A_1 &= e^{i(\tau + \varphi_2)} \left( c_3 \sin \vartheta + c_4 \frac{1}{\sin \vartheta} \right) \sim e^{i(\tau + \varphi_2) \pm s_l} \\ A_2 &= e^{i(\tau + \varphi_1)} \left( c_5 \cos \vartheta + c_6 \frac{1}{\cos \vartheta} \right) \sim e^{i(\tau + \varphi_1) \pm c_l} \\ &\text{mit } t_l := \ln \tan \vartheta, \quad s_l := \ln \sin \vartheta, \quad c_l := \ln \cos \vartheta \end{aligned} \quad (3.66)$$

läßt sich keine kleinere Untergruppe erzeugen. Für eine geschlossene Darstellung der Lösungen unter den  $\rho$ -Transformationen benötigt man den kompletten Satz (6-Darstellung).

3. Drei einkomponentige Lösung mit  $m_1 = m_2 = \omega = 4n$ : Die sechs unabhängigen Einzellösungen lassen sich in zwei Untergruppen der Dimension  $3 + 3$  aufteilen, wobei jede Dreiergruppe eine weitere eindimensionale Untergruppe enthält.

(a)  $3_S$  mit Untergruppe  $1_S$

$$\begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} \in c \left\{ \begin{pmatrix} -e^{i4n(\varphi_1 + \varphi_2)} \cosh(4n t_l) \\ e^{i4n(\tau + \varphi_2)} \cosh(4n s_l) \\ e^{i4n(\tau + \varphi_1)} \cosh(4n c_l) \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{i4n(\varphi_1 + \varphi_2)} \cosh(4n t_l) \\ -e^{i4n(\tau + \varphi_2)} \cosh(4n s_l) \\ e^{i4n(\tau + \varphi_1)} \cosh(4n c_l) \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\left( \begin{array}{c} e^{i4n(\varphi_1+\varphi_2)} \cosh(4n t_l) \\ e^{i4n(\tau+\varphi_2)} \cosh(4n s_l) \\ -e^{i4n(\tau+\varphi_1)} \cosh(4n c_l) \\ 0 \end{array} \right) \quad (3.67)$$

(b)  $1_S$  Symmetrische Lösung, konstruierbar aus  $3_S$

$$\left( \begin{array}{c} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} e^{i4n(\varphi_1+\varphi_2)} \cosh(4n t_l) \\ e^{i4n(\tau+\varphi_2)} \cosh(4n s_l) \\ e^{i4n(\tau+\varphi_1)} \cosh(4n c_l) \\ 0 \end{array} \right) \quad (3.68)$$

Diese Lösung bleibt unter allen erweiterten  $\rho$ -Transformationen ohne Phasenveränderung erhalten.

(c)  $3_A$  mit Untergruppe  $1_A$

$$\left( \begin{array}{c} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} \right) \in \left\{ \left( \begin{array}{c} e^{i4n(\varphi_1+\varphi_2)} \sinh(4n t_l) \\ e^{i4n(\tau+\varphi_2)} \sinh(4n s_l) \\ e^{i4n(\tau+\varphi_1)} \sinh(4n c_l) \\ 0 \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} -e^{i4n(\varphi_1+\varphi_2)} \sinh(4n t_l) \\ e^{i4n(\tau+\varphi_2)} \sinh(4n s_l) \\ e^{i4n(\tau+\varphi_1)} \sinh(4n c_l) \\ 0 \end{array} \right), \right. \\ \left. \left( \begin{array}{c} e^{i4n(\varphi_1+\varphi_2)} \sinh(4n t_l) \\ e^{i4n(\tau+\varphi_2)} \sinh(4n s_l) \\ -e^{i4n(\tau+\varphi_1)} \sinh(4n c_l) \\ 0 \end{array} \right) \right\} \quad (3.69)$$

(d)  $1_A$  Antisymmetrische Lösung, konstruierbar aus  $3_A$

$$\left( \begin{array}{c} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} e^{i4n(\varphi_1+\varphi_2)} \sinh(4n t_l) \\ -e^{i4n(\tau+\varphi_2)} \sinh(4n s_l) \\ e^{i4n(\tau+\varphi_1)} \sinh(4n c_l) \\ 0 \end{array} \right) \quad (3.70)$$

Diese Lösung erhält mit jeder  $\rho$ -Transformation einen Phasenfaktor  $(-1)$ .

4. Drei einkomponentige Lösung mit  $m_1 = m_2 = \omega = 4n + 2$ : Die Lösungen verteilen sich wie im vorhergehenden Fall auf zwei Dreiergruppen. Der Unterschied besteht einzig



in einem anderen Vorzeichen der  $A_0$ -Komponente. So lautet z.B. die symmetrische Lösung  $1_S$  (die ebenfalls aus einem  $3_S$  konstruierbar ist):

$$\begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{i(4n+2)(\varphi_1+\varphi_2)} \cosh((4n+2)t_l) \\ e^{i(4n+2)(\tau+\varphi_2)} \cosh((4n+2)s_l) \\ e^{i(4n+2)(\tau+\varphi_1)} \cosh((4n+2)c_l) \end{pmatrix} \quad (3.71)$$

5. Unter Berücksichtigung aller (64) Vorzeichenkombinationen im Vorfaktor  $V$  ergeben sich aus jeder der vorhergehenden 1-Darstellungen folgende Untermengen:  $1 + \bar{1} + 2 + 3 \cdot (3 + \bar{3}) + 2 \cdot (6 + \bar{6}) + 3 \cdot (6)$ . Mengen, die ohne ihr komplex Konjugiertes auftreten, zerfallen beim Übergang in reelle Funktionen in symmetrische und antisymmetrische Teile:  $2 = 1_S + 1_A$ .