Kapitel 4

Diskussion

4.1 Relevanz für das $U(2)$–Programm

4.1.1 Symmetrie

• Die Eigenschaft, daß die Maxwell–Gleichungen konform invariant sind, spielte im $U(2)$-Programm bisher eine untergeordnete Rolle. Man benötigte sie nur für die Unabhängigkeit von der Ausdehnung (Radius) der Mannigfaltigkeit. Durch die Darstellung der vollständigen $SU(2,2)$–Symmetrie (mit den Operatoren nach Tabelle 2.2) ist es nun möglich, auf alle Symmetrieoperatoren zurückzugreifen. Dabei muß die Interpretation der Differentialoperatoren im $U(2)$-Programm eventuell neu formuliert werden, um den acht zusätzlichen Operatoren eine Bedeutung zuzuordnen. Hier scheint eine Bezugnahme auf die acht (im $U(2)$-Programm fehlenden) Gluonen vielversprechend zu sein. Ich vermute allerdings, daß es Mischungen zwischen den acht 'neuen' und den 'alten', der elektroschwachen Wechselwirkung zugeordneten Operatoren geben wird.

• Zu den nullstellenfreien Vektorfeldern von $S^1 \times S^3$ (Abschnitt 2.1) gehören genau drei einfache Basisfelder: Neben dem trivialen Zeitvektor $\underline{e}_\tau$ sind es die raumartigen Kombinationen $(\underline{e}_{\varphi_1} + \underline{e}_{\varphi_2})$ und $(\underline{e}_{\varphi_1} - \underline{e}_{\varphi_2})$. Letztere sind der Richtung von S^1 äquivalent, die bei der Hopfabbildung $S^3 \to S^2$ als typische Faser entsteht. Die Hopfabbildung wird im $U(2)$–Programm zur Darstellung von magnetischen und elektrischen Radialfeldern im $\mathbb{M}^4$

herangezogen.[1] Es ist jedoch zu beachten, daß die Quantenzahlen, die mit den Heegaard–Tori verknüpft werden (welche auch zur Teilchencharakterisierung im $U(2)$–Programm benutzt werden: m_1 und m_2) und die charakteristischen Zahlen aus der Hopfabbildung ($n_+ = m_1 + m_2$ und $n_- = m_1 - m_2$) nicht identisch sind.

• Durch Vertauschung der S^1-Richtungen untereinander erhält man sechs verschiedene Kopien von $S^1 \times S^3$, die sich durch einen konformen Faktor unterscheiden, aber nicht durch infinitesimale Verschiebungen ineinander überführbar sind (Tabelle 2.3). Dies war bei der Entwicklung des $U(2)$–Programms nicht bekannt und spielt deswegen dort (noch) keine Rolle. In meinen Augen liegt hier jedoch ein Hinweis auf Teilchen – Antiteilchen – Dualität (mit der Parität ρ_0 als Vermittler, die ohne konformen Faktor wirkt) und auf die Existenz von genau drei Generationen (mit der konformen Transformation ρ_1, die eine $\mathbb{Z}_3$–Struktur besitzt) vor. Der erste Punkt stellt nur eine kleine Änderung gegenüber dem $U(2)$–Programm dar (siehe Fußnote 5 auf Seite 19), der keine Auswirkungen auf andere Aussagen des $U(2)$–Programms hat. Der zweite Punkt steht jedoch im Widerspruch zu den Annahmen, die im $U(2)$–Programm bezüglich der Anzahl von Generationen getroffen wurden.

4.1.2 Differentialgleichungen

• Im $U(2)$–Programm hat das Klein–Gordon–Feld bisher keine Relevanz gehabt. Mit den Ergebnissen dieser Arbeit läßt sich dies zum Teil verstehen: Zum einen gibt es keine global definierte Lösung der freien Klein–Gordon–Gleichung (außer der trivialen), und die Differentialgleichung ist nicht konform invariant, d.h. die ρ–Transformationen wären nicht zulässig, und der Radius R der Mannigfaltigkeit wäre nicht frei wählbar, was im Widerspruch zum Punkt **U2** steht. Zum anderen würde die Einführung einer konform erweiterten Klein–Gordon–Gleichung über den Krümmungsskalar eine lokal meßbare Skala in das Programm einbringen, die zwar frei wählbar ist, die aber bei jeder Wahl direkt in das Feldverhalten einwirkt. Weiterhin transformiert die Lösung der Klein–Gordon–Gleichung nicht wie ein primäres Feld, was als Indiz dafür gesehen werden kann, daß kein elementares Teilchen vorliegt.

• Im $U(2)$–Programm erscheinen die Vakuumelemente $z = \cos^2 \vartheta$ als quantenartige

[1] Siehe [9] und ergänzend [33].

Objekte. Es erscheint mir jedoch sinnvoller, wenn man stattdessen auf die $D(1/2,1/2)$–Funktionen nach Gleichung (3.29) zurückgreifen würde, die ja über $z = r\bar{r}$ mit den Vakuumelementen verknüpft sind. Dies hat aber weitreichende Konsequenzen für die statistischen Aspekte der Theorie. So stellt z.B. das Polynom $(r - \bar{r} + s + \bar{s})^\omega$ mit den Variablen $r, \bar{r}, s, \bar{s}$ nach Gleichung (3.29), ein Erzeugendenpolynom für bestimmte hypergeometrische Funktionen, sogar für spezielle Eigenlösungen dar. Man erhält

$$(r - \bar{r} + s + \bar{s})^\omega = \sum_a \sum_b \sum_c \binom{\omega}{a, b, c, \omega - a - b - c} r^a (-\bar{r})^b s^c \bar{s}^{\omega-a-b-c} \tag{4.1}$$

$$= \sum_{m_1} \sum_{m_2} r^{m_1} s^{m_2} \sum_\kappa \binom{\omega}{\kappa + m_1, \kappa, \frac{\omega-m_1+m_2}{2} - \kappa, \frac{\omega-m_1-m_2}{2} - \kappa} (-r\bar{r})^\kappa (s\bar{s})^{\frac{\omega-m_1-m_2}{2}-\kappa}, \tag{4.2}$$

wobei m_1 die Differenz zwischen r und $\bar{r}$ Potenzen und m_2 die Differenz zwischen s und $\bar{s}$ Potenzen zählt. Weil die Potenzsumme von $r, \bar{r}, s$ und $\bar{s}$ ω ergeben muß, ist die Zahl $k := (\omega - m_1 - m_2)/2$ ganzzahlig und beschreibt die Summe der Potenzen von $\bar{r}$ und $\bar{s}$.

$$\Rightarrow (r - \bar{r} + s + \bar{s})^\omega = \sum_{m_1} \sum_{m_2} r^{m_1} s^{m_2} \binom{\omega}{k} \sum_\kappa \binom{k}{\kappa} \binom{k + m_1 + m_2}{\kappa + m_1} (-r\bar{r})^\kappa (s\bar{s})^{k-\kappa} \tag{4.3}$$

Für $m_2 = -1$ stimmt der letzte Teil der Gleichung exakt mit den y_{mk} Lösungen nach [14], Gleichung (25c), überein.

Viele Aspekte des $U(2)$–Programms, so z.B. die Berechnung der Feinstrukturkonstante α, beruhen jedoch auf einer anderen Entwicklung der hypergeometrischen Funktion, die zu Produkten von Binomialkoeffizienten führt, welche der Fermi–Dirac– und der Bose–Einstein–Statistik zugeordnet werden können (Gleichung (D.8)). Ob mit der $D(1/2,1/2)$–Darstellung äquivalente Beziehungen aufgestellt werden können, müssen weitergehende Rechnungen zeigen.

- Die Auswahl der ausgezeichneten Lösungen der Maxwell–Gleichungen war im $U(2)$–Programm ad hoc erfolgt und bedurfte einer genaueren Darstellung. Durch die Wahl der zweiten Eichung $A_\vartheta \equiv 0$ werden alle Lösungen nur entlang der Tori $(\tau, \varphi_1, \varphi_2)$ existieren, die eine fundamentale Rolle im $U(2)$–Programm spielen. Durch die Beschränkung auf die harmonischen 1-Formen werden genau vier Klassen von Lösungen ausgezeichnet. Dies sind die A_1– und A_2–Felder des Programms, die ad hoc eingeführt worden waren, des weiteren ein ähnlich aufgebautes A_0–Feld und die seltsam erscheinende Drittellösung. Letztere scheint die

Ergänzung des $U(2)$–Programms in Hinblick auf Farbladungen und drittelzahlige elektrische Ladungen von Quarks zu sein.

- Durch eine Klassifizierung der Lösungen konnten keine weiteren Erkenntnisse für das $U(2)$–Programm gewonnen werden, eventuell müssen hier noch andere Ansätze probiert werden. Die angegebenen Beispiele (Abschnitt 3.3) von Einteilungen der Lösungen in Klassen dienen nur dem weiteren Verständnis von Zusammenhängen. Falls den ρ–Transformationen konkrete Interpretationen zugeordnet werden, kann sich die Klassifizierung nach der zweiten Eichung als hilfreich erweisen.

4.2 Verbindung zu anderen Theorien

Im Verlaufe der Beschäftigung mit dem $U(2)$–Programm kommt man automatisch zu der Frage, auf welche Weise dieser Ansatz mit den bekannten Theorien oder mit dem Standardmodell der Elementarteilchen in Verbindung gebracht werden kann. Da aber das $U(2)$–Programm auf einen Lagrangean verzichtet, ist ein Vergleich in dieser Richtung nicht möglich. Andererseits spielen die Symmetrien beim $U(2)$–Programm eine so große Rolle, daß über sie eventuell ein Zugang zu anderen Modellen erreicht werden kann. Da nun die dargestellte konforme Gruppe sowohl im $U(2)$–Programm als auch bei konformen Feldtheorien im Minkowskiraum die Basis für die Raum-Zeit-Symmetrien ist, scheint hier eine vielversprechende Querverbindung vorzuliegen. Die konforme Gruppe steht seit dem 1909 erschienenen Artikel von Cunningham [6] als kovariante Gruppe der relativistischen Elektrodynamik im Blickpunkt vieler Untersuchungen. Dabei sind neben der geometrischen Bedeutung auch die zugehörigen Darstellungen zunehmend relevant geworden (siehe z.B. [2, 7, 1, 31]).

4.2.1 Motivation

Zu den Vorzügen, die eine konforme Feldtheorie im Minkowskiraum bietet, zählen z.B. die folgenden Punkte (siehe auch [18, §9.III;Tab. 9.5]):

1. höhere Symmetrie und einheitliche Darstellung von der Poincaré–Gruppe durch die Lie–Algebra von $SO(4,2) \sim su(2,2)$,

2. man arbeitet mit der Symmetriegruppe der Maxwellgleichungen,

3. die Symmetrie der Streuung an einem $1/r$-Potential, z.B. das Kepler–Problem (siehe [1, ch. 12 §1 Ex. 4]) und das Wasserstoffatom (siehe [23, Abschn. 7.2]), ist eine höhere Symmetrie, als durch die Poincaré–Gruppe beschrieben wird, sie wird aber von der konformen Gruppe mit erfaßt und

4. es gibt sehr viele Untersuchungen aus den sechziger und siebziger Jahren über diese Thematik.

Der Nachteil einer konformen Feldtheorie liegt darin begründet, daß man aus der Invarianz unter Dilatation auf ein skaleninvariantes Verhalten schließt, welches aber in der Natur, allein schon wegen des Auftretens vieler verschiedener Massen, nicht vorhanden ist. — Dieser Schluß ist für einen Dirac–Spinor nur dann richtig, wenn dieser nur mit einem konformen Faktor transformiert. Nimmt man aber einen $SU(2,2)$-Spinor, genauer gesagt ein vierelementiges Objekt, das in der Spinordarstellung von $SO(4,2)$ oder in der fundamentalen Darstellung der $SU(2,2)$ liegt, dann koppelt die Dilatation mit γ^5 an den Spinor an; dadurch werden wieder Massenterme möglich (s.u.).—

Aus dem Bereich der Kosmologie gibt es ebenfalls viele Ansätze, die auf eine konform invariante Theorie zurückgehen. In dem Buch *Mathematical Cosmology and Extragalactic Astronomy* von I. E. Segal [35] werden einige Aspekte, so zum Beispiel die Kausalität, sehr ausführlich behandelt. Im Hinblick auf Elementarteilchen beschränkt sich Segal jedoch nur auf den Ansatz: *„. . . but a corresponding treatment of very small distances (i.e., elementary particles) will require much further exploration.“[35, S. viii]*

Segal geht von fünf Annahmen (*assumptions 1-5*) aus, die er ausführlich kommentiert. Sie lauten (sinngemäß)

Annahme 1 : Die Raum-Zeit ist eine vier-dimensionale Mannigfaltigkeit.

Annahme 2 : Die Raum-Zeit besitzt eine kausale Struktur.

Annahme 3 : Die Raum-Zeit ermöglicht stationäre Zustände.

Annahme 4 : Der Raum ist homogen und isotrop.

Annahme 5 : Die Raum-Zeit kann lokal immer als direktes Produkt von Raum und Zeit dargestellt werden.

Nach einer Arbeit von Tits [37] existieren nun genau drei 4-dimensionale pseudoriemannsche Mannigfaltigkeiten mit der Signatur $(1,3)$, die diesen Annahmen genügen. Es sind der Minkowski–Raum $\mathbb{M}^4$, eine offene Untermannigfaltigkeit der doppelten Überlagerung von $\mathbb{M}^4$: $S^1 \times S^3$ sowie die unendlichfache Überlagerung $R^1 \times S^3$.

Der von Segal eingeschlagene Weg führt zu einer konform–invarianten Theorie. Während bei der Betrachtung von kosmologischen Objekten, wie z.B. *schwarzen Löchern*, in vielen Theorien die konforme Invarianz eine Rolle spielt, erwartet man in bezug auf die Elementarteilchen, daß diese Symmetrie nicht auftritt. Im folgenden soll kurz dargelegt werden, womit diese Auffassung begründet wird und weshalb sie für die weiteren Abschnitte dieses Kapitels nicht zutreffend ist. Hierbei wird auf den flachen Minkowskiraum Bezug genommen, damit die Begriffe wie 'Impuls' oder 'spezielle konforme Transformationen' eindeutig sind.

4.2.2 Klassisch: konforme = Skalen–Invarianz

Betrachten wir zuerst den Lagrangean eines massiven Dirac–Teilchens:

$$\mathcal{L} \;=\; \Psi^\dagger(\gamma^\mu\partial_\mu + m)\Psi. \tag{4.4}$$

Da unter einer Streckung (Dilatation) des Raumes der metrische Faktor $\sqrt{-g}$ mit einem Faktor λ^4 gestreckt wird, muß der Lagrangean dies mit einem λ^{-4}-Faktor wieder ausgleichen. Die Gammamatrix liefert über die Vierbein–Konstruktion einen Faktor λ^{-1}, daher muß der Spinor Ψ und sein adjungiertes zu dem fehlenden λ^{-3}–Faktor beitragen. Nun erwartet man, daß sich der Spinor unter Dilatationen wie ein quasiprimäres Teilchen verhält. Das heißt, das Transformationsverhalten bei einer Streckung entspricht der Multiplikation mit $\lambda^{-d(\Psi)}$, wobei $d(\Psi)$ die Skalendimension des Spinors ist. Für einen Dirac–Spinor ergibt sich also eine Skalendimension von $d(\Psi) = 3/2$ aus dem kinetischen Term. Daraus folgt aber, daß der Massenterm nur dann konform invariant ist, wenn auch die Masse m transformiert. Dann würde aber die Masse selbst keine invariante Größe mehr sein, was der Erfahrung widerspricht. Die Massen der an den Wechselwirkungen beteiligten Teilchen bestimmen die Skala bzw. die Reichweite der Wechselwirkung.

4.2.3 $SU(2,2)$: konforme $\neq$ Skalen–Invarianz

Betrachten wir wieder den Lagrangean eines massiven Dirac–Teilchens:

$$\mathcal{L} \;=\; \Psi^\dagger(\gamma^\mu\partial_\mu + m)\Psi \qquad \text{(vorläufig).} \tag{4.5}$$

Nun soll der Spinor Ψ aber in der fundamentalen Darstellung der $SU(2,2)$ liegen, der Lie-gruppe der konformen Transformationen. Damit folgt der Faktor γ^0 des adjungierten Spinors $\Psi^\dagger = \Psi^*_a = \eta_{ab}\Psi^{b*} = \gamma^0\Psi^{b*}$ einfach aus der Lie–Gruppe. Weiterhin transformiert Ψ unter Dilatationen als Spinor mit $\exp(-\epsilon/2\gamma^5) = \cosh(-\epsilon/2) + \sinh(-\epsilon/2)\gamma^5$.

Unter allen $SU(2,2)$–Transformationen bleibt $\Psi^\dagger m\Psi$ invariant, wenn Ψ die konforme Skalendimension $d(\Psi) = 2$ besitzt.

Eine Gamma–Matrix soll entsprechend ihrer Indexstruktur transformieren:

$$(\gamma^\mu)^b_a \;\;\rightarrow\;\; (\hat{\gamma}^\nu)^d_c = S^d_b(\gamma^\mu)^b_a(S^{-1})^a_c\Lambda^\nu_\mu \tag{4.6}$$

Dann erfüllen die transformierten Matrizen wieder die Relation

$$\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\}^b_a = g^{\mu\nu}\delta^b_a \;\;\rightarrow\;\; \{\hat{\gamma}^\mu,\hat{\gamma}^\nu\}^b_a = \hat{g}^{\mu\nu}\delta^b_a = g^{\rho\sigma}\Lambda^\mu_\rho\Lambda^\nu_\sigma \tag{4.7}$$

Betrachtet man wieder nur die Dilatationen, dann erhält man bereits mit dem vorläufigen Lagrangean erlaubte Massenterme:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\rightarrow\mathcal{L}' &= \Psi'^\dagger(\gamma'^\mu\partial_\mu + m)\Psi' && (4.8)\\
&= \Psi'^\dagger\left(\cosh(\epsilon/2) - \sinh(\epsilon/2)\gamma^5\right)\left(e^{-\epsilon}\gamma^\mu\partial_\mu + m\right)\left(\cosh(\epsilon/2) + \sinh(\epsilon/2)\gamma^5\right)\Psi' && (4.9)\\
&= \Psi'^\dagger m\Psi' + \Psi'^\dagger\gamma^\mu\partial_\mu\frac{1-\gamma^5}{2}\Psi' + e^{2\epsilon}\Psi'^\dagger\gamma^\mu\partial_\mu\frac{1+\gamma^5}{2}\Psi'. && (4.10)
\end{aligned}$$

Da die partielle Ableitung ∂_μ wie die Komponenten k_μ einer 1-Form ($k_\mu \mathrm{d}x^\mu$) transformiert und nicht wie die Komponenten p^μ eines Vektors ($p^\mu\underline{e}_\mu$), hat man das Problem, daß die Ersetzung des Impulsoperators $P^\mu \rightarrow \partial_\mu$ nicht mehr gerechtfertigt ist. Man muß die Indexstruktur genauer berücksichtigen. Die bekannte Gleichung $P^\mu P_\mu = P^2 = m^2$ ist in dieser Form nicht konform invariant, sie muß durch $P^\mu k_\mu = m^2$ ersetzt werden, wobei der Impulsvektor $P^\mu\underline{e}_\mu$ und der 'Wellenvektor' $k_\mu \mathrm{d}x^\mu$ invariante Größen sind.

Ein Lagrangean, der unter Dilatationen invariant bleibt, läßt sich mit obigen Ergebnissen nun formulieren. Mit einem invarianten Skalar m, einem invarianten Wellenvektor k_μ (z.B.

∂_μ) und einem invarianten Vektor p^μ (der auch eine Ableitung durch $l^{\mu\nu}\partial_\nu$ enthalten kann, wenn $l^{\mu\nu}$ invariant ist) erhält man:

$$\mathcal{L}_k = \Psi^\dagger \left(m + \gamma^\mu k_\mu \frac{1-\gamma^5}{2} + \gamma_\mu p^\mu \frac{1+\gamma^5}{2} \right) \Psi. \tag{4.11}$$

Da der Spinor das konforme Gewicht $d(\Psi) = 2$ besitzt, erhält er bei den speziellen konformen Transformationen einen ortsabhängigen Vorfaktor. Nur bei dieser Transformation tritt als störender Term der Gradient des Vorfaktors auf, der durch ein Eichfeld aufgefangen werden kann. Die zugehörige Symmetrietransformation K_μ koppelt, wie aus Gleichung (B.46) zu entnehmen ist, nur an die linkshändigen Teile des Spinors. Der Ansatz eines $SU(2,2)$–Spinors führt demnach automatisch zu einer Chiralität; mehr noch, eine spezielle konforme Transformation im $\mathbb{M}^4$ wirkt genau wie die schwache Wechselwirkung nur auf linkshändige Spinoranteile. Hier scheint eine Möglichkeit zur Erklärung der chiralen Symmetriebrechung durch die schwache Wechselwirkung gegeben zu sein.

Führt man die biharmonischen Koordinaten im $\mathbb{M}^4$ ein (Abschnitt B.2), die ja durch die Cartan–Subalgebra der $SU(2,2)$–Symmetrie ausgezeichnet sind, können alle konform invarianten Größen des $U(2)$ direkt übernommen werden, die keinen Spinorindex tragen: insbesondere die Lösungen der konform erweiterten Klein–Gordon–Gleichung und die Lösungen der Maxwell–Gleichungen. Da zwischen $S^1 \times S^3$ und $\mathbb{M}^4$ durch eine Weyl–Transformation vermittelt wird, benötigt man für Spinoren erst das korrekte Transformationsgesetz.[2]

Weiterhin sind die Vertauschungen durch die ρ–Transformationen genauso relevant, da sie direkt die Eigenzustände der Cartan–Subalgebra vertauschen. Dadurch erhält man genauso eine $\mathbb{Z}_2$–Struktur der Raumparität und eine $\mathbb{Z}_3$–Struktur durch ρ_1. Diese Struktur hängt eventuell sowohl mit den Generationen als auch mit der Farbladung zusammen. Hier können auch die zulässigen, diskreten 'Massen' ϵ_0 eine Rolle spielen, wie sie auf Seite 27 ermittelt wurden.

Interessanterweise wird die Raum–Zeit–Parität durch die doppelte Überlagerung von $\mathbb{M}^4$ durch $S^1 \times S^3$ abgedeckt. Dies ist ein Effekt der Betragsstriche in den Gleichungen (B.47)-(B.50). Ohne diese Betragsstriche wäre die Abbildung nicht mehr stetig.

Die Lösungen der Maxwellgleichung werden als primäre Felder (ohne Vorfaktor) auf den

[2]Siehe auch S.13.

$\mathbb{M}^4$ abgebildet. Dabei werden aus den Wellen in $S^1 \times S^3$ Wellenpakete in $\mathbb{M}^4$, die lokalisiert sind [34, 36].

Erweitert man die $SU(2,2)$ zur $U(2,2)$, was ja ohne Probleme möglich ist, dann hat man eine überzählige $U(1)$–Symmetrie, die bei lokaler Formulierung der $U(1)$ der elektroschwachen Theorie entspricht.

4.3 Zusammenfassung

In dieser Arbeit werden die Lösungen der quellenfreien Maxwellgleichungen in dem kompakten Raum $S^1 \times S^3$ mit pseudoriemannscher Signatur ermittelt. Durch die Wahl biharmonischer Koordinaten werden durch einen Separationsansatz und Fourierentwicklung genau die Lösungen der Maxwellgleichung (und der ebenfalls untersuchten Klein–Gordon–Gleichung) gefunden, die zu den Erzeugenden der Cartan–Unteralgebra von $SU(2,2)$ Eigenlösungen sind. Dabei entspricht die Cartan–Unteralgebra topologisch einem (maximalen) Torus, der durch die S^1–Richtung und die zwei Heegaard–Tori der S^3 aufgespannt wird.

Bei den Lösungen der quellenfreien Maxwell–Gleichungen existieren für jeden Satz von Eigenwerten ω, m_1 und m_2 aus $\mathbb{Z}$, die die Quantenzahlen bezüglich der Cartan–Unteralgebra beschreiben, bis zu vier linear unabhängige Lösungen, von denen maximal zwei beschränkt sind. Die Komponenten der Lösungen lassen sich mit verwandten Riemannschen P–Funktionen darstellen. Die Lösung der Proca–Gleichungen wird durch die Kenntnis der allgemeinen Lösung der Maxwellgleichungen erhalten.

Durch die (zweite) Eichung werden die Lösungen der Maxwellgleichungen an die drei ausgezeichneten Tori gebunden, so daß keine normalen, d.h. senkrecht auf dem maximalen Torus stehenden Richtungen in den Vektorpotentialen (genauer: 1–Formen) vorhanden sind. Unter diesen Lösungen gibt es genau vier Klassen, die auf $S^1 \times S^3$ harmonisch sind. Während drei von ihnen unendlich viele Lösungen enthalten, besitzt die vierte genau acht Lösungen.

Die Lösungen der Klein–Gordon–Gleichung sind für diese Parametrisierung bekannt. Sie können als Darstellung der räumlichen Symmetriegruppe $SU(2) \times SU(2)$ herangezogen werden. In dieser Arbeit wird die Beschränktheit der Lösungen in Anwesenheit von Massen näher untersucht. Es ergibt sich ein diskretes Massenspektrum, daß auch von den jeweiligen

Gewichten, die durch den Laplace–Operator von S^3 festgelegt werden, beeinflußt wird. Unter Berücksichtigung eines Krümmungsterms sind nur die ganzzahligen Werte erlaubt, die sich als Differenz zweier Quadratzahlen darstellen lassen; d.h. alle Werte ϵ_0 mit $\epsilon_0 = 2$ Mod 4 sind verboten.

Es lassen sich metrisch-konforme Transformationen erzeugen, die die drei S^1–Tori des maximalen Torus gegeneinander vertauschen. Wegen der konformen Invarianz der Maxwellgleichungen stellen diese Transformationen, zusammen mit der Paritätsoperation, eine invariante Operation für die Lösungsmenge dar. Diese Transformationen bilden eine diskrete D_3–Gruppe (Dihedrale Gruppe), mit der sich die Lösungen als Darstellungen klassifizieren lassen.

Die Symmetrie des Raumes ermöglicht sieben Killingfelder, die zu einer fünfzehnelementigen konformen Symmetriegruppe $SU(2,2)$ erweitert werden können. Diese Arbeit führt mit der konformen Gruppe $SU(2,2)$ und ihrer $D(1/2,1/2)$–Darstellung Ansatzpunkte ein, die interessante Erweiterungen des Programms ermöglichen können.

Durch die Ausnutzung der Symmetriegruppe $SU(2,2)$ läßt sich ferner ein Bezug zu konformen Feldtheorien herstellen, die auch Massenterme beinhalten dürfen, deren ursprüngliches Manko einer Skaleninvarianz also beseitigt ist.