Anhang A

Das $U(2)$–Programm

Der Status des $U(2)$–Programms, wie er sich vor vier Jahren zu Beginn meiner Beschäftigung mit dem Ansatz vorlag, läßt sich anhand von acht Punkten darstellen (Zitat aus: [8, Stand des $U(2)$–Programms 1994]).

„**U1** Die Elektrodynamik beruht auf zwei Feststellungen: Es gibt Ladungen und es gibt Wellen. Eine Vereinfachung wird darin gesucht: Es gibt Wellen auf einem kompakten Raum; die Kompaktheit steht für die Ladungen.

U2 Wellengleichungen induzieren eine Ausbreitungsgeschwindigkeit. Um die instantane spukhafte Fernwirkung des quantenmechanischen Experimentes zu modellieren, muß der kompakte Raum ∞ groß sein.

U3 Die neben der Gravitation einzig sicher bekannte weitreichende Wechselwirkung ist die elektromagnetische. Die zu dieser am besten passende kompakte Mannigfaltigkeit ist $U(2) = S^3 \times S^1$ (4 Dimensionen als einfachste Realisierungsbasis transversaler Wellen, Möglichkeit einer zweiparametrigen Metrik mit Signatur (3+1), Möglichkeit singularitätsfreie Vektorfelder als Gruppenraum, globale Existenz von 1-Form-Potentialen wegen Trivialität der zweiten Cohomologiegruppe).

U4 Der auch passende Gruppenraum $S^1 \times S^1 \times S^1 \times S^1$ wird ausgeschlossen, um die Ladung mit einer nichttrivialen Topologie zu verbinden: den beiden sich durchdringenden

Heegaard Tori vom Geschlecht 1 auf S^3. Die biharmonischen Koordinaten auf S^3 repräsentieren diese Tori explizit.

U5 Einer Idee Schrödingers folgend werden die Teilchen mit den Eigenlösungen der elektromagnetischen Felder auf $U(2)$ in biharmonischen Koordinaten verbunden. Die verschiedenartigen Ladungen sind Eigenwerte bezüglich der Toruskoordinaten auf $U(2)$.

U6 Die Erzeugung punktförmiger Teilchen und der Parameter des Standardmodells wird dem quantenmechanischen Experiment (Meßprozeß) zugeschrieben. Vakuumlösungen mit sehr großen Eigenwerten seien instabil gegen eine große Zahl von „Vakuumelementen". Diese erzeugen wegen der Kompaktheit einen selbstähnlichen Häufungspunkt, der mit den Teilchen identifiziert wird.

U7 Die Teilchen realisieren sich zunächst in einem Minkowski–Raum $\mathbb{M}^4$, der bilinear aus lokalen Tangentialelementen des $U(2)$ über eine Äquivalenzklassenkonstruktion (den van der Waerden Spinoren) erzeugt wird. Die quantenmechanische Bewegung (Feynman Integrale) wird als Weyl–Verpflanzung der nunmehr „verborgenen"$U(2)$ Tori aufgefaßt.

U8 Die Möglichkeit einer solchen $U(2) \to \mathbb{M}^4$ Abbildung gestattet unmittelbar die Konstruktion des elektroschwachen Lagrangeans in $\mathbb{M}^4$ aus den Killingvektoren in $U(2)$ mit dem verborgenen Massenoperator $\frac{\partial}{\partial \vartheta}$, wobei ϑ die Polarkoordinate zwischen den Heegaard Tori ist. Es wird vermutet, daß die starke Wechselwirkung aus einer Äquivalenz der drei $U(2)$ Tori $(\tau, \varphi_1, \varphi_2)$ resultiert, die Gravitation aus einer Äquivalenz von vier ϑ Quadranten zu einem vollen ϑ Torus.

Bemerkung : Das $U(2)$–Programm ist der Versuch eines <u>globalen</u> Zugangs, der sowohl a priori als auch a posteriori Argumente verwendet. Als Ausgangspunkt wird nicht die Wirkung gesehen, repräsentiert durch die Plancksche Konstante $\hbar$, sondern die Ladung, repräsentiert durch die Elementarladung e."

Anhang B

Allgemeine Raum– und Symmetrieeigenschaften

B.1 Generatoren der Lie–Algebra

B.1.1 Biharmonische Koordinaten

(Bereits in Tabelle 2.2 im Haupttext aufgeführt.) Die folgenden Operatoren bilden eine Basis für eine $su(2,2)$-Algebra. Sie bestehen aus zwei $su(2)$ (K^a und K^b) und vier $su(1,1)$ (K^c bis K^f) Unteralgebren. Von diesen insgesamt achtzehn Differentialoperatoren sind aber nur fünfzehn linear unabhängig: zwölf $K^{\alpha\pm}$ und drei der K^α. Letztere bilden die Cartan–Subalgebra der $su(2,2)$, die isomorph zur Liealgebra A_3 ist und demnach drei *simple roots*, $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} \sim \{\tau, \varphi_1, \varphi_2\}$ besitzt.

$$
\begin{aligned}
K^{a+} &= e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi_1} - \frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi_2} + i\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right)\\
K^{a-} &= e^{-i(\varphi_1+\varphi_2)}\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi_1} - \frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi_2} - i\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right)\\
K^{a} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi_1} + \frac{\partial}{\partial\varphi_2}\right)\\
K^{b+} &= e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi_1} + \frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi_2} + i\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
K^{b-} &= e^{-i(\varphi_1-\varphi_2)}\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi_1}+\frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi_2}-i\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right)\\
K^{b} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi_2}-\frac{\partial}{\partial\varphi_1}\right)\\
K^{c+} &= e^{i(\tau+\varphi_2)}\frac{1}{2}\left(\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\tau}+\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi_2}-i\cos\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right)\\
K^{c-} &= e^{-i(\tau+\varphi_2)}\frac{1}{2}\left(\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\tau}+\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi_2}+i\cos\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right)\\
K^{c} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial\tau}+\frac{\partial}{\partial\varphi_2}\right)\\
K^{d+} &= e^{i(\tau-\varphi_2)}\frac{1}{2}\left(\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\tau}-\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi_2}-i\cos\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right)\\
K^{d-} &= e^{-i(\tau-\varphi_2)}\frac{1}{2}\left(\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\tau}-\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi_2}+i\cos\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right)\\
K^{d} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial\tau}-\frac{\partial}{\partial\varphi_2}\right)\\
K^{e+} &= e^{i(\tau+\varphi_1)}\frac{1}{2}\left(\cos\vartheta\frac{\partial}{\partial\tau}+\frac{1}{\cos\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi_1}+i\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right)\\
K^{e-} &= e^{-i(\tau+\varphi_1)}\frac{1}{2}\left(\cos\vartheta\frac{\partial}{\partial\tau}+\frac{1}{\cos\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi_1}-i\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right)\\
K^{e} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial\tau}+\frac{\partial}{\partial\varphi_1}\right)\\
K^{f+} &= e^{i(\tau-\varphi_1)}\frac{1}{2}\left(\cos\vartheta\frac{\partial}{\partial\tau}-\frac{1}{\cos\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi_1}+i\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right)\\
K^{f-} &= e^{-i(\tau-\varphi_1)}\frac{1}{2}\left(\cos\vartheta\frac{\partial}{\partial\tau}-\frac{1}{\cos\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi_1}-i\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right)\\
K^{f} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial\tau}-\frac{\partial}{\partial\varphi_1}\right)
\end{aligned}$$

Die Vertauschungsrelationen für gleichen Index α sind:

$$\left(K^{\alpha-}\right)=\left(K^{\alpha+}\right)^{*} \quad \text{und} \quad (K^{\alpha})=(K^{\alpha})^{*} \tag{B.1}$$

$$[K^{\alpha+},K^{\alpha-}]=2iK^{\alpha} \quad \text{für} \quad \alpha\in\{a,b\} \tag{B.2}$$

$$[K^{\alpha+},K^{\alpha-}]=-2iK^{\alpha} \quad \text{für} \quad \alpha\in\{c,d,e,f\} \tag{B.3}$$

$$[K^{\alpha},K^{\alpha\pm}]=\pm iK^{\alpha\pm} \quad \text{für} \quad \alpha\in\{a,b,c,d,e,f\} \tag{B.4}$$

Die allgemeinen Vertauschungsrelationen können am einfachsten durch die folgende Matrix ${K_m}^n$ (bereits in Gleichung (2.49) angeführt) ausgedrückt werden:

$$
\begin{aligned}
{K_m}^n \quad &:= \quad i \begin{pmatrix} \partial_\Sigma - \frac{\partial}{\partial\varphi_2} & K^{b+} & iK^{d+} & iK^{e+} \\ K^{b-} & \partial_\Sigma - \frac{\partial}{\partial\varphi_1} & iK^{f+} & iK^{c+} \\ iK^{d-} & iK^{f-} & \partial_\Sigma - \frac{\partial}{\partial\tau} & K^{a+} \\ iK^{e-} & iK^{c-} & K^{a-} & -\partial_\Sigma \end{pmatrix} \\
&\text{mit} \quad \partial_\Sigma := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi_1} + \frac{\partial}{\partial\varphi_2} + \frac{\partial}{\partial\tau}\right) \\
[{K_m}^n, {K_r}^s] \quad &= \quad i \cdot (\delta^n_r {K_m}^s - \delta^s_m {K_r}^n)
\end{aligned}
$$

Die Anordnung innerhalb der Matrix wurde außerdem so gewählt, daß eine Identifizierung mit der Pauli-Dirac-Darstellung möglich sein wird. **Anti-Vertauschungsrelationen**

$$
\begin{aligned}
\left\{K^{a+}, K^{a-}\right\} \quad &:= \quad \left(K^{a+}K^{a-} + K^{a-}K^{a+}\right) && \text{(B.5)} \\
\frac{1}{2}\left\{K^{a+}, K^{a-}\right\} + K^a K^a \quad &= \quad -\Delta/4 = \frac{-1}{4}\Box + \frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial\tau^2} && \text{(B.6)} \\
&= \quad \frac{1}{2}\left\{K^{b+}, K^{b-}\right\} + K^b K^b && \text{(B.7)} \\
-\frac{1}{2}\left\{K^{c+}, K^{c-}\right\} + K^c K^c \quad &= \quad \frac{\cos^2\vartheta}{4}\Box + \frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial{\varphi_1}^2} + \frac{1}{2}\sin\vartheta\cos\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta} && \text{(B.8)} \\
&= \quad -\frac{1}{2}\left\{K^{d+}, K^{d-}\right\} + K^d K^d && \text{(B.9)} \\
-\frac{1}{2}\left\{K^{e+}, K^{e-}\right\} + K^e K^e \quad &= \quad \frac{\sin^2\vartheta}{4}\Box + \frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial{\varphi_2}^2} - \frac{1}{2}\sin\vartheta\cos\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta} && \text{(B.10)} \\
&= \quad -\frac{1}{2}\left\{K^{f+}, K^{f-}\right\} + K^f K^f && \text{(B.11)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\{K^{a+}, K^{a-}\} + \left\{K^{b+}, K^{b-}\right\} \quad &= \quad -\Box + \tfrac{\partial^2}{\partial\tau^2} - \tfrac{\partial^2}{\partial{\varphi_1}^2} - \tfrac{\partial^2}{\partial{\varphi_2}^2} && \text{(B.12)} \\
-\{K^{c+}, K^{c-}\} - \left\{K^{d+}, K^{d-}\right\} \quad &= \quad \cos^2\vartheta\Box + \tfrac{\partial^2}{\partial{\varphi_1}^2} - \tfrac{\partial^2}{\partial{\varphi_2}^2} - \tfrac{\partial^2}{\partial\tau^2} + 2\sin\vartheta\cos\vartheta\tfrac{\partial}{\partial\vartheta} && \text{(B.13)} \\
-\{K^{e+}, K^{e-}\} - \left\{K^{f+}, K^{f-}\right\} \quad &= \quad \sin^2\vartheta\Box + \tfrac{\partial^2}{\partial{\varphi_2}^2} - \tfrac{\partial^2}{\partial{\varphi_1}^2} - \tfrac{\partial^2}{\partial\tau^2} - 2\sin\vartheta\cos\vartheta\tfrac{\partial}{\partial\vartheta} && \text{(B.14)} \\
\{{K_m}^n, {K_n}^m\} \quad &= \quad 0 && \text{(B.15)}
\end{aligned}
$$

Eine reelle Darstellung der Algebra führt zu den Erzeugenden von $so(4,2)$. Sie sind äquivalent der Aufspaltung der komplexen Erzeugenden in Imaginär- und Realteil.

$$\left.\begin{array}{r}
X^1 = \frac{\partial}{\partial\tau} \quad , \qquad X^2 = \frac{\partial}{\partial\varphi_1} \quad , \qquad X^3 = \frac{\partial}{\partial\varphi_2} \\
X^4 = \frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta}\sin\varphi_1\cos\varphi_2\frac{\partial}{\partial\varphi_1} - \frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}\cos\varphi_1\sin\varphi_2\frac{\partial}{\partial\varphi_2} + \cos\varphi_1\cos\varphi_2\frac{\partial}{\partial\vartheta} \\
X^5 = \frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta}\sin\varphi_1\sin\varphi_2\frac{\partial}{\partial\varphi_1} + \frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}\cos\varphi_1\cos\varphi_2\frac{\partial}{\partial\varphi_2} + \cos\varphi_1\sin\varphi_2\frac{\partial}{\partial\vartheta} \\
X^6 = -\frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta}\cos\varphi_1\cos\varphi_2\frac{\partial}{\partial\varphi_1} - \frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}\sin\varphi_1\sin\varphi_2\frac{\partial}{\partial\varphi_2} + \sin\varphi_1\cos\varphi_2\frac{\partial}{\partial\vartheta} \\
X^7 = -\frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta}\cos\varphi_1\sin\varphi_2\frac{\partial}{\partial\varphi_1} + \frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}\sin\varphi_1\cos\varphi_2\frac{\partial}{\partial\varphi_2} + \sin\varphi_1\sin\varphi_2\frac{\partial}{\partial\vartheta} \\
X^8 = \frac{1}{\cos\vartheta}\cos\varphi_1\sin\tau\frac{\partial}{\partial\varphi_1} + \cos\vartheta\sin\varphi_1\cos\tau\frac{\partial}{\partial\tau} - \sin\vartheta\sin\varphi_1\sin\tau\frac{\partial}{\partial\vartheta} \\
X^9 = \frac{-1}{\cos\vartheta}\sin\varphi_1\sin\tau\frac{\partial}{\partial\varphi_1} + \cos\vartheta\cos\varphi_1\cos\tau\frac{\partial}{\partial\tau} - \sin\vartheta\cos\varphi_1\sin\tau\frac{\partial}{\partial\vartheta} \\
X^{10} = \frac{1}{\cos\vartheta}\sin\varphi_1\cos\tau\frac{\partial}{\partial\varphi_1} + \cos\vartheta\cos\varphi_1\sin\tau\frac{\partial}{\partial\tau} + \sin\vartheta\cos\varphi_1\cos\tau\frac{\partial}{\partial\vartheta} \\
X^{11} = \frac{-1}{\cos\vartheta}\cos\varphi_1\cos\tau\frac{\partial}{\partial\varphi_1} + \cos\vartheta\sin\varphi_1\sin\tau\frac{\partial}{\partial\tau} + \sin\vartheta\sin\varphi_1\cos\tau\frac{\partial}{\partial\vartheta} \\
X^{12} = \frac{1}{\sin\vartheta}\cos\varphi_2\sin\tau\frac{\partial}{\partial\varphi_2} + \sin\vartheta\sin\varphi_2\cos\tau\frac{\partial}{\partial\tau} + \cos\vartheta\sin\varphi_2\sin\tau\frac{\partial}{\partial\vartheta} \\
X^{13} = \frac{-1}{\sin\vartheta}\sin\varphi_2\sin\tau\frac{\partial}{\partial\varphi_2} + \sin\vartheta\cos\varphi_2\cos\tau\frac{\partial}{\partial\tau} + \cos\vartheta\cos\varphi_2\sin\tau\frac{\partial}{\partial\vartheta} \\
X^{14} = \frac{1}{\sin\vartheta}\sin\varphi_2\cos\tau\frac{\partial}{\partial\varphi_2} + \sin\vartheta\cos\varphi_2\sin\tau\frac{\partial}{\partial\tau} - \cos\vartheta\cos\varphi_2\cos\tau\frac{\partial}{\partial\vartheta} \\
X^{15} = \frac{-1}{\sin\vartheta}\cos\varphi_2\cos\tau\frac{\partial}{\partial\varphi_2} + \sin\vartheta\sin\varphi_2\sin\tau\frac{\partial}{\partial\tau} - \cos\vartheta\sin\varphi_2\cos\tau\frac{\partial}{\partial\vartheta}
\end{array}\right\} \tag{B.16}$$

Die ersten sieben bilden die Killingfelder von $S^1 \times S^3$. Ihre Vertauschungsrelationen lauten:

$$\left.\begin{array}{llll}
[X^2, X^3] = 0 \quad , & [X^2, X^4] = -X^6, & [X^2, X^5] = -X^7, & [X^2, X^6] = X^4, \\
[X^2, X^6] = X^5, & [X^3, X^4] = -X^5, & [X^3, X^5] = X^4 \quad , & [X^3, X^6] = -X^7, \\
[X^3, X^7] = X^6, & [X^4, X^5] = -X^3, & [X^4, X^6] = -X^2, & [X^4, X^7] = 0, \\
[X^5, X^6] = 0 \quad , & [X^5, X^7] = -X^2, & [X^6, X^7] = -X^3, &
\end{array}\right\} \tag{B.17}$$

Im $U(2)$–Programm wird mit L- und R-Feldern gearbeitet. Sie lassen sich aus den X-Feldern durch die Kombinationen

$$\left.\begin{array}{llll}
L_1 = X^5 + X^6 \quad , & L_2 = X^4 - X^7 \quad , & L_3 = -X^2 - X^3 \quad , & L_4 = X^1 \\
R_1 = X^5 - X^6 \quad , & R_2 = X^4 + X^7 \quad , & R_3 = X^2 - X^3 \quad , & R_4 = X^1
\end{array}\right\} \tag{B.18}$$

gewinnen. Sie lauten im Einzelnen

$$\phi := \varphi_1 + \varphi_2 \quad , \qquad \psi := \varphi_1 - \varphi_2 \tag{B.19}$$

$$L_1 = -\frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta}\cos\phi\frac{\partial}{\partial\varphi_1} + \frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}\cos\phi\frac{\partial}{\partial\varphi_2} + \sin\phi\frac{\partial}{\partial\vartheta} \tag{B.20}$$

$$L_2 = \frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta}\sin\phi\frac{\partial}{\partial\varphi_1} - \frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}\sin\phi\frac{\partial}{\partial\varphi_2} + \cos\phi\frac{\partial}{\partial\vartheta} \tag{B.21}$$

$$L_3 = -\frac{\partial}{\partial\varphi_1} - \frac{\partial}{\partial\varphi_2} \tag{B.22}$$

$$R_1 = \frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta}\cos\psi\frac{\partial}{\partial\varphi_1} + \frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}\cos\psi\frac{\partial}{\partial\varphi_2} - \sin\psi\frac{\partial}{\partial\vartheta} \tag{B.23}$$

$$R_2 = \frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta}\sin\psi\frac{\partial}{\partial\varphi_1} + \frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}\sin\psi\frac{\partial}{\partial\varphi_2} + \cos\psi\frac{\partial}{\partial\vartheta} \tag{B.24}$$

$$R_3 = \frac{\partial}{\partial\varphi_1} - \frac{\partial}{\partial\varphi_2} \tag{B.25}$$

Vertauschungen

$$[L_i, L_j] = -2\epsilon^{ijk}L_k, \qquad [L_i, R_j] = 0, \qquad [R_i, R_j] = -2\epsilon^{ijk}R_k \quad \text{mit} \qquad \epsilon^{123} = 1 \tag{B.26}$$

Verknüpfungen

$$L_1^2 + L_2^2 = \frac{\sin^2\vartheta}{\cos^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial{\varphi_1}^2} + \frac{\cos^2\vartheta}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial{\varphi_2}^2} + \frac{1}{\sin\vartheta\cos\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\sin\vartheta\cos\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta} - 2\frac{\partial}{\partial\varphi_1}\frac{\partial}{\partial\varphi_2} \tag{B.27}$$

$$L_3^2 = \frac{\partial^2}{\partial{\varphi_1}^2} + \frac{\partial^2}{\partial{\varphi_2}^2} + 2\frac{\partial}{\partial\varphi_1}\frac{\partial}{\partial\varphi_2} \tag{B.28}$$

$$\hat{L}^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 = \tfrac{1}{\cos^2\vartheta}\tfrac{\partial^2}{\partial{\varphi_1}^2} + \tfrac{1}{\sin^2\vartheta}\tfrac{\partial^2}{\partial{\varphi_2}^2} + \tfrac{1}{\sin\vartheta\cos\vartheta}\tfrac{\partial}{\partial\vartheta}\sin\vartheta\cos\vartheta\tfrac{\partial}{\partial\vartheta} = \Delta \tag{B.29}$$

$$R_1^2 + R_2^2 = \frac{\sin^2\vartheta}{\cos^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial{\varphi_1}^2} + \frac{\cos^2\vartheta}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial{\varphi_2}^2} + \frac{1}{\sin\vartheta\cos\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\sin\vartheta\cos\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta} + 2\frac{\partial}{\partial\varphi_1}\frac{\partial}{\partial\varphi_2} \tag{B.30}$$

$$R_3^2 = \frac{\partial^2}{\partial{\varphi_1}^2} + \frac{\partial^2}{\partial{\varphi_2}^2} - 2\frac{\partial}{\partial\varphi_1}\frac{\partial}{\partial\varphi_2} \tag{B.31}$$

$$\hat{R}^2 = R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 = \tfrac{1}{\cos^2\vartheta}\tfrac{\partial^2}{\partial{\varphi_1}^2} + \tfrac{1}{\sin^2\vartheta}\tfrac{\partial^2}{\partial{\varphi_2}^2} + \tfrac{1}{\sin\vartheta\cos\vartheta}\tfrac{\partial}{\partial\vartheta}\sin\vartheta\cos\vartheta\tfrac{\partial}{\partial\vartheta} = \Delta \tag{B.32}$$

B.1.2 Reelle Erzeugende für $so(4,2)$ im Minkowskiraum

Die konforme Gruppe wird im Minkowskiraum von den Translationen P_μ, den Lorentztransformationen $M_{\mu\nu}$, der Dilatation D und den speziellen konformen Transformationen K_μ erzeugt. Sie lassen sich als Differentialoperatoren formulieren:

$$\tilde{P}_\mu = \partial_\mu \tag{B.33}$$

$$\tilde{M}_{\mu\nu} = x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu \tag{B.34}$$

$$\tilde{D} = x^\mu\partial_\mu \tag{B.35}$$

$$\tilde{K}_\mu = 2x_\mu x^\nu\partial_\nu - x^2\partial_\mu. \tag{B.36}$$

Ihre Vertauschungsrelationen sind:

$$[P_\mu, P_\nu] = 0 \tag{B.37}$$

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = -\left(g_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} + g_{\nu\sigma}M_{\mu\rho} - g_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} - g_{\mu\sigma}M_{\nu\rho}\right) \tag{B.38}$$

$$[M_{\mu\nu}, P_\sigma] = g_{\nu\sigma}P_\mu - g_{\mu\sigma}P_\nu \tag{B.39}$$

$$[P_\mu, D] = P_\mu \tag{B.40}$$

$$[M_{\mu\nu}, D] = 0 \tag{B.41}$$

$$[P_\mu, K_\nu] = 2(g_{\mu\nu}D - M_{\mu\nu}) \tag{B.42}$$

$$[M_{\mu\nu}, K_\sigma] = g_{\nu\sigma}K_\mu - g_{\mu\sigma}K_\nu \tag{B.43}$$

$$[K_\mu, D] = -K_\mu \tag{B.44}$$

$$[K_\mu, K_\nu] = 0 \tag{B.45}$$

Die Generatoren lassen sich auch als 4×4-Matrizen als Erzeugende der $su(2,2)$–Algebra schreiben. Dabei kann man auf die Gamma–Matrizen γ^μ zurückgreifen ([1]).

$$\left.\begin{aligned} \tilde{P}_\mu &= -\frac{1}{2}\gamma_\mu(1-\gamma_5) \\ \tilde{M}_{\mu\nu} &= \frac{1}{4}[\gamma_\mu, \gamma_\nu] \\ \tilde{D} &= -\frac{1}{2}\gamma_5 \\ \tilde{K}_\mu &= \frac{1}{2}\gamma_\mu(1+\gamma_5) \end{aligned}\right\} \tag{B.46}$$

B.2 Vollständige Transformation

Mit einer Koordinatentransformation im Minkowskiraum

$$x = \frac{\cos\vartheta\cos\varphi_1}{|\cos\tau + \sin\vartheta\sin\varphi_2|}, \tag{B.47}$$

$$y = \frac{\cos\vartheta\sin\varphi_1}{|\cos\tau + \sin\vartheta\sin\varphi_2|}, \tag{B.48}$$

$$z = \frac{\sin\vartheta\cos\varphi_2}{|\cos\tau + \sin\vartheta\sin\varphi_2|}, \tag{B.49}$$

$$t = \frac{\sin\tau}{|\cos\tau + \sin\vartheta\sin\varphi_2|}, \tag{B.50}$$

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{1}{(\cos\tau + \sin\vartheta\sin\varphi_2)^2}\left(\mathrm{d}\tau^2 - \cos^2\vartheta\,\mathrm{d}\varphi_1^2 - \sin^2\vartheta\,\mathrm{d}\varphi_2^2 - \mathrm{d}\vartheta^2\right), \tag{B.51}$$

die im folgenden 'vollständige Transformation' genannt wird, nimmt die Metrik des flachen $I\!\!M^4$ eine zu der Metrik von $S^1 \times S^3$ konform äquivalente Gestalt an. **Dieser Transformation bzw. der hier dargestellten Abbildung auf $I\!\!M^4$ wird im $U(2)$–Programm keine physikalische Bedeutung beigemessen.** Man kann sie aber heranziehen, um bekannte Ergebnisse des $I\!\!M^4$ auf den Raum $S^1 \times S^3$ zu übertragen. Mit ihr lassen sich z.B. die konformen Generatoren des Minkowskiraumes $(P_\mu, M_{\mu\nu}, D, K_\mu)$ auch durch die X–Felder (Gleichung B.16) darstellen. Weiterhin spielt sie bei der Betrachtung konformer Theorien in Abschnitt 4.2 eine wichtige Rolle.

$$\left.\begin{array}{rcl} M_{yx} := y\partial_x - x\partial_y &=& X^2 \\ M_{zy} := z\partial_y - y\partial_z &=& X^6 \\ M_{xz} := x\partial_z - z\partial_x &=& -X^4 \\ P_x := \partial_x &=& X^5 + X^{10} \\ P_y := \partial_y &=& X^7 + X^{11} \\ P_z := \partial_z &=& X^3 + X^{14} \\ P_t := \partial_t &=& X^1 + X^{12} \\ D = x^\mu \partial_\mu &=& X^{15} \end{array} \quad \begin{array}{rcl} M_{tx} := t\partial_x - x\partial_t &=& X^9 \\ M_{ty} := t\partial_y - y\partial_t &=& X^8 \\ M_{tz} := t\partial_z - z\partial_t &=& X^{13} \\ K_x = 2x\ D - r^2 P_x &=& -X^5 + X^{10}, \\ K_y = 2y\ D - r^2 P_y &=& -X^7 + X^{11} \\ K_z = 2z\ D - r^2 P_z &=& -X^3 + X^{14} \\ K_t = 2t\ D - r^2 P_t &=& X^1 - X^{12} \end{array}\right\} \tag{B.52}$$

Unter Benutzung der Paulischen σ-Matrizen und den γ-Matrizen in Pauli-Dirac-Darstellung (mit $m = 1, 2, 3$)

$$\sigma_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{1} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{B.53}$$

$$\gamma^0 := i \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}, \qquad \gamma^m := i \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_m \\ \sigma_m & 0 \end{pmatrix} \tag{B.54}$$

$$S^{\mu\nu} := \frac{i}{2}\left[\gamma^\mu, \gamma^\nu\right], \qquad \gamma^5 := i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3, \tag{B.55}$$

sowie den Generatoren der konformen Gruppe für $su(2,2)$-Vektoren nach Gleichung B.46 läßt sich die Matrix (2.49) rekonstruieren. Eine Transformation X mit z.B. $X = \alpha^{31} M_{31}$ läßt sich umformen in $X = \alpha^{31} M_{31} = \alpha^{31} X^4 = \alpha^{31} \frac{-i}{2}\left(K^{a+} - K^{a-} + K^{b+} - K^{b-}\right)$. Setzt man nun die Vorfaktoren vor den $K^{i\pm}$ in der Matrix (2.49) an den zugehörigen Stellen ein, dann liegt die entsprechende Matrix $\frac{\alpha}{2}S_{31}$ vor.

Den Generatoren können infinitesimale

$$\left.\begin{array}{rcl} a^\mu P_\mu & : & x^\mu \rightarrow x^\mu + a^\mu \\ a^{\mu\nu} M_{\mu\nu} & : & x^\mu \rightarrow x^\mu + a^{\mu\nu} x_\nu \\ a^\mu K_\mu & : & x^\mu \rightarrow x^\mu + 2x^\mu a^\nu x_\nu - a^\mu x^\nu x_\nu \\ a\, D & : & x^\mu \rightarrow x^\mu + a\, x^\mu \end{array}\right\} \tag{B.56}$$

und global definierte Transformationen zugeordnet werden:

$$\left.\begin{array}{rcl} a^\mu P_\mu & : & x^\mu \rightarrow x^\mu + a^\mu \\ a^{\mu\nu} M_{\mu\nu} & : & x^\mu \rightarrow \cos_h(a^{\mu\nu}) x^\mu + \sin_h(a^{\mu\nu}) x^\nu \\ a^\mu K_\mu & : & x^\mu \rightarrow \dfrac{x^\mu - a^\mu x^\nu x_\nu}{1 - 2a^\nu x_\nu + a^\nu a_\nu x^\rho x_\rho} \\ a\, D & : & x^\mu \rightarrow e^a x^\mu \end{array}\right\} \tag{B.57}$$

Beachte: $\cos_h \equiv \cos$ für rein räumliche und $\cos_h \equiv \cosh$ für Raum-Zeit–Drehungen.

Die globalen Versionen lassen sich (im Minkowskiraum leicht) aus der Beziehung

$$x^\mu \rightarrow exp(\alpha X^\alpha) x^\mu \tag{B.58}$$

$$\text{z.B.} \qquad x^\mu \rightarrow exp(\alpha^\sigma \partial_\sigma) x^\mu = (1 + \alpha^\sigma \partial_\sigma + \alpha^\sigma \partial_\sigma \alpha^\sigma \partial_\sigma / 2 + \ldots) x^\mu = x^\mu + \alpha^\mu \tag{B.59}$$

ableiten.

Die Umkehrtransformationen lautet:

$$\left.\begin{array}{rcl} \varphi_1 & = & \arctan \dfrac{y}{x} \\ \varphi_2 & = & \arctan \dfrac{1 - r^2 + t^2}{2z} \\ \vartheta & = & \arccos \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{1 + 2(r^2 + t^2) + (r^2 - t^2)^2}} \\ \tau & = & \arctan \dfrac{2t}{1 + r^2 - t^2}. \end{array}\right\} \tag{B.60}$$

Zwischen den Koordinatendifferentialen besteht die Verbindung:

$$\left.\begin{aligned}
\mathrm{d}x &= \frac{-\cos\vartheta\sin\varphi_1}{\cos\tau+\sin\vartheta\sin\varphi_2}\mathrm{d}\varphi_1 - \frac{\sin\vartheta\cos\vartheta\cos\varphi_1\cos\varphi_2}{(\cos\tau+\sin\vartheta\sin\varphi_2)^2}\mathrm{d}\varphi_2 \\
&\quad - \frac{\cos\varphi_1(\sin\vartheta\cos\tau+\sin\varphi_2)}{(\cos\tau+\sin\vartheta\sin\varphi_2)^2}\mathrm{d}\vartheta + \frac{\cos\vartheta\cos\varphi_1\sin\tau}{(\cos\tau+\sin\vartheta\sin\varphi_2)^2}\mathrm{d}\tau \\
\mathrm{d}y &= \frac{\cos\vartheta\cos\varphi_1}{\cos\tau+\sin\vartheta\sin\varphi_2}\mathrm{d}\varphi_1 - \frac{\sin\vartheta\cos\vartheta\sin\varphi_1\cos\varphi_2}{(\cos\tau+\sin\vartheta\sin\varphi_2)^2}\mathrm{d}\varphi_2 \\
&\quad - \frac{\sin\varphi_1(\sin\vartheta\cos\tau+\sin\varphi_2)}{(\cos\tau+\sin\vartheta\sin\varphi_2)^2}\mathrm{d}\vartheta + \frac{\cos\vartheta\sin\varphi_1\sin\tau}{(\cos\tau+\sin\vartheta\sin\varphi_2)^2}\mathrm{d}\tau \\
\mathrm{d}z &= \frac{-\sin\vartheta(\sin\vartheta+\sin\varphi_2\cos\tau)}{(\cos\tau+\sin\vartheta\sin\varphi_2)^2}\mathrm{d}\varphi_2 + \frac{\cos\vartheta\cos\varphi_2\cos\tau}{(\cos\tau+\sin\vartheta\sin\varphi_2)^2}\mathrm{d}\vartheta \\
&\quad + \frac{\sin\vartheta\cos\varphi_2\sin\tau}{(\cos\tau+\sin\vartheta\sin\varphi_2)^2}\mathrm{d}\tau \\
\mathrm{d}t &= \frac{-\sin\vartheta\cos\varphi_2\sin\tau}{(\cos\tau+\sin\vartheta\sin\varphi_2)^2}\mathrm{d}\varphi_2 + \frac{-\cos\vartheta\sin\varphi_2\sin\tau}{(\cos\tau+\sin\vartheta\sin\varphi_2)^2}\mathrm{d}\vartheta \\
&\quad + \frac{1+\sin\vartheta\sin\varphi_2\cos\tau}{(\cos\tau+\sin\vartheta\sin\varphi_2)^2}\mathrm{d}\tau.
\end{aligned}\right\} \tag{B.61}$$

Für die vollständige Transformation gelten die Beziehungen:

$$4/(\cos\tau+\sin\vartheta\sin\varphi_2)^2 = 1+2(r^2+t^2)+(r^2-t^2)^2 \tag{B.62}$$

$$= (1+(r+t)^2)(1+(r-t)^2) =: r_t^4 \tag{B.63}$$

$$\cos\vartheta = \frac{2\sqrt{x^2+y^2}}{r_t^2} \tag{B.64}$$

$$\frac{\cos\tau+\sin\vartheta\sin\varphi_2}{\cos\tau} = \frac{2}{1+r^2-t^2} \qquad \text{mit} \tag{B.65}$$

$$r^2 = x^2+y^2+z^2. \tag{B.66}$$

Die Basisvektoren von $S^1 \times S^3$ lassen sich im M^4 (mit der Basis (t,x,y,z)) folgendermaßen darstellen:

$$A_0\underline{e}^\tau = A_0\begin{pmatrix} 1+\sin\vartheta\sin\varphi_2\cos\tau \\ \cos\vartheta\cos\varphi_1\sin\tau \\ \cos\vartheta\sin\varphi_1\sin\tau \\ \sin\vartheta\cos\varphi_2\sin\tau \end{pmatrix} \tag{B.67}$$

$$= A_0 \frac{(\cos\tau + \sin\vartheta \sin\varphi_2)^2}{2} \begin{pmatrix} 1 + t^2 + r^2 \\ 2\ x \cdot t \\ 2\ y \cdot t \\ 2\ z \cdot t \end{pmatrix} = A_0 \frac{2}{r_t^4} \begin{pmatrix} 1 + t^2 + r^2 \\ 2\ x \cdot t \\ 2\ y \cdot t \\ 2\ z \cdot t \end{pmatrix} \tag{B.68}$$

$$A_1 \underline{e}^{\varphi_1} = \frac{A_1}{\cos\vartheta / (\cos\tau + \sin\vartheta \sin\varphi_2)} \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin\varphi_1 \\ \cos\varphi_1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{B.69}$$

$$= \frac{A_1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} 0 \\ -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{A_1}{\cos^2\vartheta} \frac{4}{r_t^4} \begin{pmatrix} 0 \\ -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \tag{B.70}$$

$$A_2 \underline{e}^{\varphi_2} = \frac{A_2}{\sin\vartheta} \begin{pmatrix} \cos\varphi_2 \sin\tau \\ \cos\vartheta \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \\ \cos\vartheta \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 \\ \sin\vartheta + \sin\varphi_2 \cos\tau \end{pmatrix} \tag{B.71}$$

$$= \frac{A_2}{\sin^2\vartheta} \frac{(\cos\tau + \sin\vartheta \sin\varphi_2)^2}{2} \begin{pmatrix} 2\ t \cdot z \\ 2\ x \cdot z \\ 2\ y \cdot z \\ 2\ z^2 + 1 - r^2 + t^2 \end{pmatrix} \tag{B.72}$$

$$= \frac{A_2}{\sin^2\vartheta} \frac{2}{r_t^4} \begin{pmatrix} 2\ t \cdot z \\ 2\ x \cdot z \\ 2\ y \cdot z \\ 2\ z^2 + 1 - r^2 + t^2 \end{pmatrix} \tag{B.73}$$

$$A_3 \underline{e}^{\vartheta} = A_3 \begin{pmatrix} \cos\vartheta \sin\varphi_2 \sin\tau \\ \cos\varphi_1 (\sin\vartheta \cos\tau + \sin\varphi_2) \\ \sin\varphi_1 (\sin\vartheta \cos\tau + \sin\varphi_2) \\ \cos\vartheta \cos\varphi_2 \cos\tau \end{pmatrix} \tag{B.74}$$

$$= \frac{A_3}{\sin\vartheta\cos\vartheta}\frac{(\cos\tau+\sin\vartheta\sin\varphi_2)^5}{4}\begin{pmatrix} t(x^2+y^2)(1+t^2-r^2) \\ x(r_t^2-2(x^2+y^2)(1+r^2-t^2)) \\ y(r_t^2-2(x^2+y^2)(1+r^2-t^2)) \\ z(x^2+y^2)(1+r^2-t^2) \end{pmatrix} \tag{B.75}$$

$$= \frac{A_3}{\sin\vartheta}\frac{2}{r_t^4}\begin{pmatrix} t\cos\vartheta(1+t^2-r^2) \\ x/\sqrt{x^2+y^2}-2x\cos\vartheta(1-t^2+r^2) \\ y/\sqrt{x^2+y^2}-2y\cos\vartheta(1-t^2+r^2) \\ z\cos\vartheta(1-t^2+r^2) \end{pmatrix} \tag{B.76}$$

Bei der vollständigen Transformation überlagert $S^1 \times S^3$ den M^4 **doppelt**. Die Punkte $(\tau, \varphi_1, \varphi_2, \vartheta)$ und $(\tau+\pi, \varphi_1+\pi, \varphi_2+\pi, \vartheta)$ werden auf denselben Punkt (t, x, y, z) abgebildet.

Die z-Achse ($x = y = 0$) liegt immer bei ($\vartheta = \pi/2$,).

Für $\tau = 0$ liegt der Ursprung bei ($\varphi_2 = \pi/2$) und der ∞-Punkt bei ($\varphi_2 = 3\pi/2$). (Und $t = 0$ gilt überall.)

Für $\tau = \pi$ liegt der Ursprung bei ($\varphi_2 = 3\pi/2$) und der ∞-Punkt bei ($\varphi_2 = \pi/2$).(Und $t = 0$ gilt überall.)

Für alle sonstigen Fälle ($\tau \neq 0$ und $\tau \neq \pi$) werden jedem Raumpunkt (R^3) bei der Abbildung zwei t-Punkte zugeordnet: Der Ursprung liegt bei ($\varphi_2 = \pi/2$) mit ($t = \sin(\tau)/(\cos(\tau)+1)$) und bei ($\varphi_2 = 3\pi/2$) mit ($t = \sin(\tau)/(\cos(\tau)-1)$). Der ∞-Punkt der z-Ebene liegt bei ($\varphi_2 = \tau - \pi/2$) und bei ($\varphi_2 = 3\pi/2 - \tau$).

Wenn A_μ in $S^1 \times S^3$ eine Lösung mit dem Betrag $A_\mu A^\mu$ bildet, ist eine Lösung in M^4 durch die vollständige Transformation gegeben: $B_\mu = A_\mu$ und $B_\mu B^\mu = \lambda^{-2} A_\mu A^\mu$ da $g_B^{\mu\nu} = \lambda^{-2} g_A^{\mu\nu}$ gilt.

Transf.	(x^0)	(x^1)	(x^2)	(x^3)	$x^\mu x_\mu$
Id.	t	x	y	z	$t^2 - r^2$
$\hat{\rho}_0$	$\frac{2t}{1+r^2-t^2+2x}$	$\frac{1+t^2-r^2}{1+r^2-t^2+2x}$	$\frac{2z}{1+r^2-t^2+2x}$	$\frac{2y}{1+r^2-t^2+2x}$	$\frac{1+r^2-t^2-2x}{1+r^2-t^2+2x}$
$\hat{\rho}_1$	$\frac{x}{t+y}$	$\frac{i}{2}\frac{1+t^2-r^2}{t+y}$	$i\frac{z}{t+y}$	$\frac{1}{2}\frac{1-t^2+r^2}{t+y}$	$\frac{t-y}{t+y}$
$\hat{\rho}_2$	$\frac{-2ix}{1-r^2+t^2-2iy}$	$\frac{-2it}{1-r^2+t^2-2iy}$	-i$\frac{1+r^2-t^2}{1-r^2+t^2-2iy}$	$\frac{2iz}{1-r^2+t^2-2iy}$	$\frac{1-r^2+t^2+2iy}{1-r^2+t^2-2iy}$
$\hat{\rho}_3$	z	ix	iy	t	$r^2 - t^2$
$\hat{\rho}_4$	$\frac{i}{2}\frac{1+t^2-r^2}{x+iz}$	$i\frac{t}{x+iz}$	$\frac{i}{2}\frac{1-t^2+r^2}{x+iz}$	$\frac{y}{x+iz}$	$\frac{x-iz}{x+iz}$

Tabelle B.1: ρ–Transformationen und $I\!\!M^4$ Koordinaten

Die durch biharmonische Koordinaten (mittels vollständiger Transformation) dargestellten Koordinaten x^μ des flachen $I\!\!M^4$ werden durch die ρ–Transformationen komplex und konform transformiert.

B.2.1 ρ-Transformationen und vollständige Transformation

Die Wirkung von $\hat{\rho}_3$ (siehe Abschnitt 2.3.2: $\vartheta \to \rho_3 = \frac{\pi}{2} + i \ln \tan \frac{\vartheta}{2}, \varphi_2 \to \tilde{\tau} = \varphi_2$ und $\tau \to \tilde{\varphi}_2 = \tau$) auf die vollständige Transformation wirkt sich wie folgt aus:

$$\begin{aligned}
x &= \frac{\cos\vartheta \sin\varphi_1}{\cos\tau + \sin\vartheta \sin\varphi_2} \xrightarrow{\rho_3} \frac{i\cos\rho_3 \sin\varphi_1}{\cos\tilde{\tau} + \sin\rho_3 \sin\tilde{\varphi}_2} = ix \\
y &= \frac{\cos\vartheta \cos\varphi_1}{\cos\tau + \sin\vartheta \sin\varphi_2} \xrightarrow{\rho_3} \frac{i\cos\rho_3 \cos\varphi_1}{\cos\tilde{\tau} + \sin\rho_3 \sin\tilde{\varphi}_2} = iy \\
z &= \frac{\sin\vartheta \cos\varphi_2}{\cos\tau + \sin\vartheta \sin\varphi_2} \xrightarrow{\rho_3} \frac{\sin\tilde{\tau}}{\cos\tilde{\tau} + \sin\rho_3 \sin\tilde{\varphi}_2} = t \\
t &= \frac{\sin\tau}{\cos\tau + \sin\vartheta \sin\varphi_2} \xrightarrow{\rho_3} \frac{\sin\rho_3 \sin\tilde{\varphi}_2}{\cos\tilde{\tau} + \sin\rho_3 \sin\tilde{\varphi}_2} = z
\end{aligned} \tag{B.77}$$

Die Wirkung aller ρ–Transformationen auf die Koordinaten x^μ, die durch die vollständige Transformation mit den biharmonischen Koordinaten verknüpft sind, ist in Tabelle B.1 aufgeführt.

Anhang C

Differentialgleichungen

C.1 Klein–Gordon–Gleichung

Die Klein–Gordon–Gleichung wird in Abschnitt 3.1.1 eingeführt. Die Differentialgleichung $\Box\Phi = 0$ erscheint in Gleichung (3.2).

C.1.1 Verweis auf andere Literatur

Vergleich mit den Lösungen nach Barut [1] und Kalnins [24].

Nach [24] wird die Lösung der inhomogenen Klein-Gordon-Gleichung bezüglich der räumlichen Koordinaten dargestellt durch:

$$\mathcal{F}^F_{pq} = \sqrt{\frac{2F+1}{2\pi^2}}(-1)^{p+F}e^{-i\ p\Phi}d^F_{pq}(\cos 2\vartheta)e^{-i\ p\Psi} \tag{C.1}$$

mit $p := \frac{m_1+m_2}{2}$, $q := \frac{m_1-m_2}{2}$ und dem Matrixelement der $(SO(3))$ Drehgruppe d^F_{pq} sowie den Eigenwertgleichungen

$$C\ \mathcal{F}^F_{pq} = 4F(F+1) \tag{C.2}$$

$$i\,L_3\mathcal{F}^F_{pq} = p\mathcal{F}^F_{pq} \tag{C.3}$$

$$i\,R_3\mathcal{F}^F_{pq} = q\mathcal{F}^F_{pq} \tag{C.4}$$

$$X\mathcal{F}^F_{pq} = -(p+q)^2\mathcal{F}^F_{pq} \tag{C.5}$$

$$Y\mathcal{F}^F_{pq} = -pq\mathcal{F}^F_{pq} \tag{C.6}$$

Der Casimiroperator C ist der Laplacian auf S_3 und somit ein Differentialoperatoren zweiter Ordnung. Es existieren zwei weitere kommutierende Differentialoperatoren zweiter Ordnung (X, Y) in der einhüllenden Algebra von $o(4)$:

$$X = \frac{\partial}{\partial\varphi_1}\frac{\partial}{\partial\varphi_1} \qquad \text{und} \qquad Y = \frac{\partial}{\partial\varphi_1}\frac{\partial}{\partial\varphi_1} - \frac{\partial}{\partial\varphi_2}\frac{\partial}{\partial\varphi_2} \tag{C.7}$$

$$C = \Delta \tag{C.8}$$

Nach [1][ch. 5§8.1.1, S. 158] ergibt sich eine harmonische Funktion in biharmonischen Koordinaten mit dem Eigenwert $\lambda = -l(l+2)$ (für die 3-Sphäre) als

$$Y^l_{m_1,m_2} = N \cdot e^{i(m_1\varphi_1 + m_2\varphi_2)} \tan^{|m_2|}\vartheta \cos^l {}_2F_1\left(\tfrac{|m_2|+m_1-l}{2}, \tfrac{|m_2|-m_1-l}{2}, m_2+1, -\tan^2\vartheta\right) \tag{C.9}$$

$$\begin{aligned} &= N \cdot e^{i(m_1\varphi_1 + m_2\varphi_2)} \sin^{|m_2|}\vartheta \cos^{m_1} \times \\ &\times {}_2F_1\left(\frac{|m_2|+m_1-l}{2}, \frac{m_2+m_1+l+2}{2} + \frac{m_2-|m_2|}{2}, m_2+1, \sin^2\vartheta\right) \end{aligned} \tag{C.10}$$

Sowohl die Eigenwertgleichungen als auch die expliziten Lösungen wurden in dieser Arbeit in gleicher Form gefunden.

C.1.2 Anforderungen an die Lösungen

Eine 0-Form $\Phi_{(0)}$ wird dann als Lösung akzeptiert, wenn neben der Klein-Gordon-Gleichung folgende Bedingungen erfüllt werden:

- lokale Lösung (wenige Einschränkungen):
  1. hinreichende Differenzierbarkeit (in der Regel C^∞-Funktionen)
  2. vollständig separierte Koordinatenfunktionen mit dem Ansatz 3.3
- globale Lösung (starke Einschränkungen):
  1. Ganzzahlige Werte für m_1, m_2 und ω. Dies bedeutet Geschlossenheit auf dem Rand, da nun $\Phi_{(0)}(\tau + 2\pi, \ldots) = \Phi_{(0)}(\tau, \ldots)$ usw. gilt.
  2. Beschränktheit der Lösungen an den singulären Punkten s_ϑ, damit die Lösung auf dem gesamten Raum definiert ist.
  3. Eindeutigkeit erfordert $\partial_{\varphi_1}\Phi_{(0)}\Big|_{\vartheta=\pi/2} = 0$ und $\partial_{\varphi_2}\Phi_{(0)}\Big|_{\vartheta=0} = 0$.

Die globalen Lösungen müssen die Nebenbedingung (3.7) oder (3.13) für die erweiterte Klein–Gordon–Gleichung erfüllen.

C.2 Maxwellgleichung

C.2.1 Aufstellung der Maxwellgleichung

Der Ansatz des Vektorpotentials $\underline{A} = (A_0, A_1, A_2, A_3)$ führt zu dem Feldstärketensor $F_{\mu\nu} = A_{\mu;\nu} - A_{\nu;\mu}$. Die quellfreien Maxwellgleichungen $0 = F^{\mu\nu}{}_{;\nu}$ lassen sich somit explizit darstellen als:

$$0 = F^{mn}{}_{;n} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}^i} \left(\sqrt{-g}\, g^{mk} g^{nl} (A_{k,l} - A_{l,k}) \right) \tag{C.11}$$

$$0 = -\frac{1}{\cos^2\vartheta} \frac{\partial}{\partial\varphi_1} \left(\frac{\partial}{\partial\varphi_1} A_0 - \frac{\partial}{\partial\tau} A_1 \right) - \frac{1}{\sin^2\vartheta} \frac{\partial}{\partial\varphi_2} \left(\frac{\partial}{\partial\varphi_2} A_0 - \frac{\partial}{\partial\tau} A_2 \right) - \frac{1}{\sin\vartheta\cos\vartheta} \frac{\partial}{\partial\vartheta} \left(\sin\vartheta\cos\vartheta \left(\frac{\partial}{\partial\vartheta} A_0 - \frac{\partial}{\partial\tau} A_3 \right) \right) \tag{C.12}$$

$$0 = -\frac{1}{\cos^2\vartheta} \frac{\partial}{\partial\tau} \left(\frac{\partial}{\partial\varphi_1} A_0 - \frac{\partial}{\partial\tau} A_1 \right) + \frac{1}{\cos^2\vartheta} \frac{1}{\sin^2\vartheta} \frac{\partial}{\partial\varphi_2} \left(\frac{\partial}{\partial\varphi_1} A_2 - \frac{\partial}{\partial\varphi_2} A_1 \right) + \frac{1}{\sin\vartheta\cos\vartheta} \frac{\partial}{\partial\vartheta} \left(\frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta} \left(\frac{\partial}{\partial\varphi_1} A_3 - \frac{\partial}{\partial\vartheta} A_1 \right) \right) \tag{C.13}$$

$$0 = -\frac{1}{\sin^2\vartheta} \frac{\partial}{\partial\tau} \left(\frac{\partial}{\partial\varphi_2} A_0 - \frac{\partial}{\partial\tau} A_2 \right) + \frac{1}{\sin^2\vartheta} \frac{1}{\cos^2\vartheta} \frac{\partial}{\partial\varphi_1} \left(\frac{\partial}{\partial\varphi_2} A_1 - \frac{\partial}{\partial\varphi_1} A_2 \right) + \frac{1}{\sin\vartheta\cos\vartheta} \frac{\partial}{\partial\vartheta} \left(\frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta} \left(\frac{\partial}{\partial\varphi_2} A_3 - \frac{\partial}{\partial\vartheta} A_2 \right) \right) \tag{C.14}$$

$$0 = -\frac{\partial}{\partial\tau} \left(\frac{\partial}{\partial\vartheta} A_0 - \frac{\partial}{\partial\tau} A_3 \right) + \frac{1}{\cos^2\vartheta} \frac{\partial}{\partial\varphi_1} \left(\frac{\partial}{\partial\vartheta} A_1 - \frac{\partial}{\partial\varphi_1} A_3 \right) + \frac{1}{\sin^2\vartheta} \frac{\partial}{\partial\varphi_2} \left(\frac{\partial}{\partial\vartheta} A_2 - \frac{\partial}{\partial\varphi_2} A_3 \right) \tag{C.15}$$

C.2.2 Eichansatz

Da die Maxwellgleichungen $0 = F^{mn}{}_{;n}$ durch eine Umeichung des Feldes

$$A_m \quad \to \quad \tilde{A}_m = A_m + \Phi_{,m} \tag{C.16}$$

nicht verändert wird (siehe z.B. [19], S.272f)

$$\begin{aligned} \tilde{F}^{mn}{}_{;n} &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}_n} \left(\sqrt{-g}\, g^{mk} g^{nl} (\tilde{A}_{k,l} - \tilde{A}_{l,k}) \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}_n} \left(\sqrt{-g}\, g^{mk} g^{nl} (A_{k,l} - A_{l,k} + \Phi_{,k,l} - \Phi_{,l,k}) \right) = F^{mn}{}_{;n} \end{aligned} \tag{C.17}$$

steht die Wahl eines skalaren Eichfeldes Φ vollkommen frei. Dabei sollte Φ derart gewählt werden, daß die Gleichungen leichter lösbar werden. Die allgemeine Lösung der Maxwellgleichung besteht dann aus den ermittelten Lösungen mit spezieller Eichung und einem Gradientenfeld:

$$A_{m,Allg.} \quad = \quad A_{m,mitEichung} + \Phi_{,m} \tag{C.18}$$

Zu einer gefundenen Lösung $A_{m,mitEichung}$ kann z.B. durch Additition von $\Phi_{,m}$ mit $\Phi = -\int A_3 \mathrm{d}\vartheta$ die 3. Komponente *weggeeicht* werden, wobei allerdings die vorherige Eichung im allgemeinen verlorengeht.

Die wichtigsten Eichungen im Minkowskiraum sind:

1. Lorentz–Eichung: $\partial_\mu A^\mu = 0$
2. Coulomb–Eichung: $\nabla \vec{A} = 0$
3. temporale Eichung: $A_0 = 0$
4. axiale Eichung: $A_3 = 0$

In dieser Arbeit werden zwei spezielle Eichansätze untersucht:

erste Eichung Die erste Eichung beruht auf dem Ansatz $A_{0;0} \equiv 0$. Hieraus ergeben sich - wenn τ-Abhängigkeit und die geforderte Separierbarkeit vorliegt - automatisch die Coulomb und die Lorentz–Eichung (siehe Gleichung C.19). Ist die Lösung von τ unabhängig, so wird statt $A_0 = 0$ die Coulomb bzw. die Lorentz–Eichung gewählt, die auch hier gleichzeitig erfüllt werden.

zweite Eichung In unserem Fall wird die axiale Eichung durch eine *normale* Eichung ersetzt. Da den Raumflächen mit $\vartheta = const.$ eine besondere Bedeutung zugemessen wird, wird die Eichung untersucht, in der die Komponente in Normalenrichtung A_ϑ verschwindet.

Die zweite Eichung entspricht also der Forderung $A_3 \equiv 0$.

Diese Eichung bleibt, im Gegensatz zur ersten Eichung, bei den ρ-Transformationen (Abschnitt 2.3.2) erhalten.

Unter Verwendung der ersten Eichung ($A_0 = 0$), die bis auf weiteres benutzt wird, folgt bei hinreichender Zeitabhängigkeit (nichtstationär, Fourierentwicklung möglich) aus Gleichung (C.12) die Divergenzfreiheit des Feldes $\underline{A} = (0, A_1, A_2, A_3)$.

$$\begin{aligned}
0 &= (C.13) + (\text{ Eichung } A_0 = 0) \\
&= \frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{1}{\cos^2\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi_1}A_1 + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi_2}A_2 + \frac{1}{\sin\vartheta\cos\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\sin\vartheta\cos\vartheta A_3\right) && \text{(C.19)} \\
\Rightarrow \operatorname{div}\underline{A} &= \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}^i}\left(\frac{\sqrt{-g}}{g_{i\,i}}A_i\right) && \text{(C.20)} \\
&= -\frac{1}{\cos^2\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi_1}A_1 - \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi_2}A_2 - \frac{1}{\sin\vartheta\cos\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\sin\vartheta\cos\vartheta A_3 = 0 && \text{(C.21)}
\end{aligned}$$

So lassen sich die Gleichungen C.13 bis C.21 auch darstellen als:

$$\begin{aligned}
0 &= \cos^2\vartheta\ (C.13) + \frac{\partial}{\partial\varphi_1}(C.21) \\
&= \frac{\partial^2}{\partial\tau^2}A_1 - \frac{1}{\cos^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial{\varphi_1}^2}A_1 - \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial{\varphi_2}^2}A_1 - \frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}A_1 + 2\frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi_1}A_3 \\
&= \Box A_1 + 2\frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi_1}A_3 - \frac{\partial}{\partial\vartheta}A_1\right) && \text{(C.22)} \\
0 &= \sin^2\vartheta\ (C.14) + \frac{\partial}{\partial\varphi_2}(C.21) \\
&= \frac{\partial^2}{\partial\tau^2}A_2 - \frac{1}{\cos^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial{\varphi_1}^2}A_2 - \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial{\varphi_2}^2}A_2 - \frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}A_2 - 2\frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi_2}A_3 \\
&= \Box A_2 - 2\frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi_2}A_3 - \frac{\partial}{\partial\vartheta}A_2\right) && \text{(C.23)} \\
0 &= (C.15) + \sin^{-2}\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\sin^2\vartheta(C.21) \\
&= \frac{\partial^2}{\partial\tau^2}A_3 - \frac{1}{\cos^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial{\varphi_1}^2}A_3 - \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial{\varphi_2}^2}A_3 - \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\sin\vartheta\cos\vartheta A_3 \\
&\qquad - 2\frac{1}{\sin\vartheta\cos^3\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi_1}A_1 \\
&= \frac{1}{\sin\vartheta\cos\vartheta}\left(\Box(\sin\vartheta\cos\vartheta A_3) - 2\frac{1}{\cos^2\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi_1}A_1 - 2\frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\sin\vartheta\cos\vartheta A_3\right) && \text{(C.24)} \\
0 &= (C.15) + \cos^{-2}\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\cos^2\vartheta(C.21) \\
&= \frac{\partial^2}{\partial\tau^2}A_3 - \frac{1}{\cos^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial{\varphi_1}^2}A_3 - \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial{\varphi_2}^2}A_3 - \frac{1}{\cos^2\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\sin\vartheta\cos\vartheta A_3 \\
&\qquad + 2\frac{1}{\sin^3\vartheta\cos\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi_2}A_2 \\
&= \frac{1}{\sin\vartheta\cos\vartheta}\left(\Box(\sin\vartheta\cos\vartheta A_3) + 2\frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi_2}A_2 + 2\frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\sin\vartheta\cos\vartheta A_3\right) && \text{(C.25)}
\end{aligned}$$

Der d'Alembert–Operator ($\Box$) nach Gleichung 3.2 wurde hier als Abkürzung verwendet.

Werden diese vier Gleichungssysteme erfüllt, ist auch die Divergenzfreiheit bestätigt, da die Differenz der beiden letzten mit Gleichung (C.21) identisch ist.

Mit den Substitutionen

$$z = \cos^2\vartheta \qquad \text{und} \qquad \hat{A}_3(z) = \sin\vartheta\cos\vartheta A_3(\vartheta) \tag{C.26}$$

lassen sich die Gleichungen weiter Umformen.

$$\begin{aligned}
0 &= (\Box + 4(1-z)\frac{\partial}{\partial \mathrm{z}})A_1 + \frac{2}{z}\frac{\partial}{\partial\varphi_1}\hat{A}_3 && \text{(C.27)}\\
0 &= (\Box - 4z\frac{\partial}{\partial \mathrm{z}})A_2 - \frac{2}{1-z}\frac{\partial}{\partial\varphi_2}\hat{A}_3 && \text{(C.28)}\\
0 &= (\Box + 4(1-z)\frac{\partial}{\partial \mathrm{z}})\hat{A}_3 - \frac{2}{z}\frac{\partial}{\partial\varphi_1}A_1 && \text{(C.29)}\\
0 &= (\Box - 4z\frac{\partial}{\partial \mathrm{z}})\hat{A}_3 + \frac{2}{1-z}\frac{\partial}{\partial\varphi_2}A_2 && \text{(C.30)}
\end{aligned}$$

Durch Kombination der letzten Gleichungen und der Definition

$$\begin{aligned}
S_1 &= \hat{A}_3 + iA_1 \qquad D_1 = \hat{A}_3 - iA_1\\
S_2 &= \hat{A}_3 + iA_2 \qquad D_2 = \hat{A}_3 - iA_2
\end{aligned} \tag{C.31}$$

lassen sich die Differentialgleichungen entkoppeln.

$$\begin{aligned}
0 &= (\Box - 4z\frac{\partial}{\partial \mathrm{z}})S_2 - \frac{2i}{1-z}\frac{\partial}{\partial\varphi_2}S_2 && \text{(C.32)}\\
0 &= (\Box - 4z\frac{\partial}{\partial \mathrm{z}})D_2 + \frac{2i}{1-z}\frac{\partial}{\partial\varphi_2}D_2 && \text{(C.33)}\\
0 &= (\Box + 4(1-z)\frac{\partial}{\partial \mathrm{z}})S_1 + \frac{2i}{z}\frac{\partial}{\partial\varphi_1}S_1 && \text{(C.34)}\\
0 &= (\Box + 4(1-z)\frac{\partial}{\partial \mathrm{z}})D_1 - \frac{2i}{z}\frac{\partial}{\partial\varphi_1}D_1 && \text{(C.35)}
\end{aligned}$$

Dabei ist aber noch zu beachten, daß die Funktionen eine Nebenbedingung erfüllen müssen. Diese kann jedoch leicht nach der Lösung der Differentialgleichungen überprüft werden.

$$S_1 + D_1 = 2\hat{A}_3 = S_2 + D_2 \tag{C.36}$$

Die Symmetrie der Gleichungen erleichtert das Bestimmen der Lösungen. Die Lösungen S_1 und D_1 sowie S_2 und D_2 sind jeweils einander komplex konjugiert, und eine Substitution von einer Lösung $S_2 = \chi(\tau, \varphi_1, \varphi_2, z)$ der Gleichung (C.32) in $D_1 = \chi(\tau, \varphi_2, \varphi_1, 1-z)$ liefert eine die Lösung der Gleichung (C.35).

Werden die A-Felder als reelle Funktionen gesucht, dann lassen sich die Feldkomponenten berechnen aus

$$A_1 = -\mathrm{Im}(D_1), \qquad A_2 = \mathrm{Im}(S_2), \qquad \hat{A}_3 = \mathrm{Re}(S_2) \overset{!}{=} \mathrm{Re}(D_1) \tag{C.37}$$

Sollen die einzelnen Komponenten denselben komplexen Vorfaktor V aufweisen, dann muß Gleichung C.48 herangezogen werden.

C.2.3 Lösungen

Über den Separationsansatz

$$S_2 = V \cdot S(z) \qquad \text{mit } V \text{ nach E.21} \tag{C.38}$$

läßt sich Gleichung (C.32) auf eine verallgemeinerte hypergeometrische Differentialgleichung (Gleichung C.39) reduzieren.

$$0 \;=\; \frac{\partial^2}{\partial \mathrm{z}^2} S + \frac{1}{z}\frac{\partial}{\partial \mathrm{z}} S - \left(\frac{(m_1/2)^2}{z} + \frac{(m_2/2)(1+m_2/2)}{1-z} - (\omega/2)^2\right)\frac{S}{z(1-z)} \tag{C.39}$$

Mit den Zuordnungen für Gleichung (D.1)

$$\begin{array}{lll} \alpha = -(m_1/2) & \beta = -(\omega/2) & \gamma = -(m_2/2) \\ \alpha' = (m_1/2) & \beta' = (\omega/2) & \gamma' = 1 + (m_2/2) \end{array} \tag{C.40}$$

lassen sich die Lösungen als Riemannsche P–Funktionen darstellen:

$$S_2 \;=\; V \cdot P \left| \begin{array}{cccc} 0 & \infty & 1 & \\ -\frac{m_1}{2} & -\frac{\omega}{2} & -\frac{m_2}{2} & z \\ \frac{m_1}{2} & \frac{\omega}{2} & 1+\frac{m_2}{2} & \end{array} \right| =: V \cdot P_{2A} \tag{C.41}$$

$$D_1 = V \cdot P \left| \begin{matrix} 0 & \infty & 1 & \\ -\frac{m_2}{2} & -\frac{\omega}{2} & -\frac{m_1}{2} & 1-z \\ \frac{m_2}{2} & \frac{\omega}{2} & 1+\frac{m_1}{2} & \end{matrix} \right| \tag{C.42}$$

$$= V \cdot P \left| \begin{matrix} 0 & \infty & 1 & \\ -\frac{m_1}{2} & -\frac{\omega}{2} & -\frac{m_2}{2} & z \\ 1+\frac{m_1}{2} & \frac{\omega}{2} & \frac{m_2}{2} & \end{matrix} \right| =: V \cdot P_{1A} \tag{C.43}$$

$$S_1 = D_1^* \quad , \qquad D_2 = S_2^* \tag{C.44}$$

Für die Betrachtung der Nebenbedingung (C.36) ist zuerst der exponentielle Vorfaktor (V) von Interesse. Sowohl $V = \mathrm{e}^{i(\omega\tau + m_1\varphi_1 + m_2\varphi_2)}$ als auch $V^* = \mathrm{e}^{i(-\omega\tau - m_1\varphi_1 - m_2\varphi_2)}$ liefern denselben Vorfaktor $\cos(\omega\tau + m_1\varphi_1 + m_2\varphi_2)$ für $\hat{A}_3$. Setzt man $\omega \geq 0$ (ohne Beschränkung der Allgemeinheit), erhält man so einen zweiten Satz von Lösungen:

$$S_{2B} = V^* \cdot P \left| \begin{matrix} 0 & \infty & 1 & \\ -\frac{m_1}{2} & -\frac{\omega}{2} & 1-\frac{m_2}{2} & z \\ \frac{m_1}{2} & \frac{\omega}{2} & \frac{m_2}{2} & \end{matrix} \right| =: V^* \cdot P_{2B} \tag{C.45}$$

$$D_{1B} = V^* \cdot P \left| \begin{matrix} 0 & \infty & 1 & \\ 1-\frac{m_1}{2} & -\frac{\omega}{2} & -\frac{m_2}{2} & z \\ \frac{m_1}{2} & \frac{\omega}{2} & \frac{m_2}{2} & \end{matrix} \right| =: V^* \cdot P_{1B} \tag{C.46}$$

$$S_{1B} = D_{1B}^* \quad , \qquad D_{2B} = S_{2B}^* \tag{C.47}$$

Die Feldkomponenten lassen sich also darstellen als:

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= -V\left(c_{1A} \cdot P_{1A} - c_{1B} \cdot P_{1B}\right) \\ A_2 &= V\left(c_{2A} \cdot P_{2A} - c_{2B} \cdot P_{2B}\right) \\ \hat{A}_3 &= iV\left(c_{2A} \cdot P_{2A} + c_{2B} \cdot P_{2B}\right) \\ &\overset{!}{=} iV\left(c_{1A} \cdot P_{1A} + c_{1B} \cdot P_{1B}\right) \end{aligned} \right\} \tag{C.48}$$

Hierbei müssen nun c_{1A}, c_{1B}, c_{2A} und c_{2B} derart bestimmt werden, daß die Gleichungen (C.48) erfüllt werden. Da P_{1A}, P_{1B}, P_{2A} und P_{2B} verwandte P-Funktionen sind, sind sie auch linear abhängig, und es lassen sich immer zwei verschiedene Parametersätze ($\{c_{1A}, c_{1B}, c_{2A}, c_{2B}\}$) finden.

Die Lösung der Maxwellgleichungen (3.33) mit der ersten Eichung und dem Separationsansatz (3.34) läßt sich darstellen als:

$$\begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ \hat{A}_3/\sqrt{z(1-z)} \end{pmatrix} = V \begin{pmatrix} 0 \\ -c_{1A}\cdot P_{1A} + c_{1B}\cdot P_{1B} \\ c_{2A}\cdot P_{2A} - c_{2B}\cdot P_{2B} \\ i\hat{A}_3(z)/\sqrt{z(1-z)} \end{pmatrix} \tag{C.49}$$

mit:

$$\hat{A}_3(z) = c_{2A}\cdot P_{2A} + c_{2B}\cdot P_{2B} \stackrel{!}{=} c_{1A}\cdot P_{1A} + c_{1B}\cdot P_{1B} \tag{C.50}$$

Sonderfall: $\omega = 0$

Falls keine τ-Abhängigkeit ($\omega = 0$) vorlag, wurde in der ersten Eichung **nicht** die Bedingung $A_0 = 0$ sondern die Bedingung $\mathrm{div}A = 0$ gefordert. Dies hatte den Vorteil, eine gemeinsame Bearbeitung zu ermöglichen. Da für $\omega = 0$ die A_0-Komponente aus den Gleichungen abkoppelt, kann sie - wie in den vorherigen Abschnitten geschehen - zu Null gesetzt werden. Es gibt aber auch eine nicht verschwindende Lösung für A_0, die man folgendermaßen erhält:

Da $\underline{A}$ von τ unabhängig ist, verschwinden die entsprechenden Ableitungen und man erhält aus Gleichung C.12 die Gleichung:

$$-\frac{1}{\cos^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial{\varphi_1}^2}A_0 - \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial{\varphi_2}^2}A_0 - \frac{1}{\sin\vartheta\cos\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\sin\vartheta\cos\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}A_0 = \Box A_0 = 0. \tag{C.51}$$

Dies ist ein Spezialfall der Klein-Gordon-Gleichung (Abschnitt 3.1.1, Gleichung 3.5). Mit den dortigen Ergebnissen läßt sich die allgemeine Lösung angeben:

$$A_0(z) = P\left|\begin{matrix} 0 & \infty & 1 & \\ -\frac{m_1}{2} & 0 & -\frac{m_2}{2} & z \\ \frac{m_1}{2} & 1 & \frac{m_2}{2} & \end{matrix}\right|. \quad \text{bzw} \tag{C.52}$$

$$A_0(z) = (1-z)^{m_2/2} z^{m_1/2} {}_2F_1\left(\frac{m_1+m_2}{2}, 1+\frac{m_1+m_2}{2}; 1+m_1; z\right) \tag{C.53}$$

$$\underline{A} = e^{i(m_1\varphi_1 + m_2\varphi_2)}(A_0, 0, 0, 0) \tag{C.54}$$

Da die Funktionen A_0 auch Lösungen der Klein-Gordon-Gleichung sind, sind sie auch Eigenlösungen der K-Operatoren aus Abschnitt B.1.

Beispiele für $A_0(\vartheta)$ bei speziellen Werten von m_1 und m_2.

$$A_0(\vartheta) \;=\; \begin{cases} \cot^m \vartheta & : \text{ für } m_1 = m_2 = m \\ \tan^m \vartheta & : \text{ für } m_1 = m_2 = m \\ \cot^m \vartheta / \cos^2 \vartheta & : \text{ für } m_1 - 2 = m_2 = m \\ \tan^m \vartheta / \sin^2 \vartheta & : \text{ für } m_1 = m_2 - 2 = m \end{cases} \tag{C.55}$$

Randbedingungen für globale Lösungen

Für alle auftretenden Funktionen müssen folgende Randbedingung erfüllt sein, damit sie als eigenständige (globale) Lösung akzeptiert werden:

$$\left.\begin{array}{rl} \text{Stetigkeit} & : \; \Psi(\tau, \varphi_1 = 0, \varphi_2, \vartheta) = \Psi(\tau, \varphi_1 = 2\pi, \varphi_2, \vartheta) \quad , \\ & \;\;\, \Psi(\tau, \varphi_1, \varphi_2 = 0, \vartheta) = \Psi(\tau, \varphi_1, \varphi_2 = 2\pi, \vartheta) \quad \text{und} \\ & \;\;\, \Psi(\tau = 0, \varphi_1, \varphi_2, \vartheta) = \Psi(\tau = 2\pi, \varphi_1, \varphi_2, \vartheta). \\ \text{Beschränktheit} & : \; ||\Psi|| \quad \text{beschränkt im abgeschlossenen Definitionsgebiet.} \end{array}\right\} \tag{C.56}$$

Die Stetigkeitsbedingungen sorgen dafür, daß die Lösungen auf den Kreisen der periodischen Koordinaten τ, φ_1 und φ_2 keine Unstetigkeiten aufweisen.

Es bleibt jedoch noch zu klären, welche Norm $(|| \cdot ||)$ auf die Funktionen anzuwenden ist. Es werden hier drei Normen vorgestellt, die jede für sich eine andere physikalische Interpretation zulassen.

- Die erste Norm $_1|| \cdot ||$ sei das klassische Vektorprodukt $_1||\underline{A}|| = A_i A^i = g_{ij} A^i A^j = g^{ij} A_i A_j$. Diese Norm ist angebracht, wenn sowohl der Vektor, die Form (der Kovektor) als auch die Länge der Vektoren von Interesse ist. Sie ist bei konformen Transformationen jedoch nicht invariant.

- Die zweite Norm $_2|| \cdot ||$ wirkt nur auf die einzelnen Komponenten der Vektoren, indem deren Beträge addiert werden: $_2||\underline{A}_{\{\mu\}}|| = \sum |A_\mu|$. Diese Art der Norm unterscheidet zwischen ko– und kontravarianten Vektoren. Sie ist dann angebracht, wenn einzig die betrachteten Vektoren relevant sind und nicht deren (klassische) Länge oder der andere, zugehörige (Ko-)Vektor. Dies trifft z.B. bei konformen Transformationen zu.

- Die dritte Norm $_3||\cdot||$ ist eine Integralnorm, die auf skalare Größen (Skalare, Vektorkomponenten usw.) wirken soll. Bei Anwendung auf einen Vektor ist sie nur als Ergänzung zu einer der ersten beiden Normen zu verstehen. $_3||\Psi|| = \int \Psi f(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta$

Die Eindeutigkeit eines Vektorfeldes auf $S^3 \times R^1$ erfordert die nachfolgenden Randbedingungen.

$$\text{Breitenkreis am Pol, Wirbel}\ :\ A_1|_{\vartheta=\pi/2} = 0 \quad , \qquad A_2|_{\vartheta=0} = 0 \tag{C.57}$$

$$\text{Längenkreis am Pol, Quelle}\ :\ A_3|_{\vartheta=0} = 0 \quad , \qquad A_3|_{\vartheta=\pi/2} = 0 \tag{C.58}$$

$$\text{Achsen am Pol}\ :\ \left.\left(\frac{\partial}{\partial\varphi_2}A_1\right)\right|_{\vartheta=0} = 0 \quad , \qquad \left.\left(\frac{\partial}{\partial\varphi_2}A_0\right)\right|_{\vartheta=0} = 0$$
$$\left.\left(\frac{\partial}{\partial\varphi_1}A_2\right)\right|_{\vartheta=\pi/2} = 0 \quad , \qquad \left.\left(\frac{\partial}{\partial\varphi_1}A_0\right)\right|_{\vartheta=\pi/2} = 0 \tag{C.59}$$

Längenkreis am Pol: Damit ein Vektor, der auf der Polkappe sitzt und in Richtung der Längenkreise zeigt, am Pol eindeutig definiert ist, muß er dort die Länge Null haben. Einer *Quelle* von Feldlinien läßt sich an ihrem Ursprung kein eindeutiger Vektor zuordnen, da keine Richtung ausgezeichnet ist.

Achsen am Pol: Ein Vektor, der auf einer Polkappe sitzt und in Richtung der Achse zeigt, darf sich mit einer Drehung um die eigene Achse nicht verändern. Wenn die Kugel von ϑ und φ_1 aufgespannt wird, liegt der dargestellte Pol bei $\vartheta = \pi/2$. In Achsenrichtung zeigen dann die φ_2 und die τ-Komponente. Die Drehung um die Achse kann durch die Ableitung nach φ_1 ausgedrückt werden. D.h. $\left.\frac{\partial}{\partial\varphi_1}A_2\right|_{\vartheta=\pi/2} = 0$ und $\left.\frac{\partial}{\partial\varphi_1}A_0\right|_{\vartheta=\pi/2} = 0$ müssen erfüllt werden.

C.2.4 Globale und andere ausgewählte Lösungen

Die Geschlossenheit der Lösungen (stetiger Übergang $2\pi \leftrightarrow 0$ in den periodischen Koordinaten) auf allen Perioden von $S^1 \times S^3$ nach Gleichung (C.56) führt zu folgenden Einschränkungen der Lösungsvielfalt:

- Für ganzahlige Werte von m_1, m_2 und ω sind die Lösungen (nach Gleichung 3.35) (und ihre Ableitungen) in φ_1, φ_2 und τ geschlossen.

- Für gebrochene Werte von m_1, m_2 oder ω stellt Gleichung (3.35) keine geschlossene Lösung dar, kann aber als mehrfache Überdeckung des Raumes interpretiert werden.

Für die Überprüfung der Randbedingungen (C.56)-(C.59) ist es notwendig, konkrete Darstellungen der P-Funktion, wie in den Gleichungen D.3 (bzw. D.7), zu wählen. Da die Parameter α, α', γ und γ' der P-Funktion (D.2) die Polstärken (d.h. die niedrigsten, auch negativen Exponenten einer Potenzreihenentwicklung (Laurententwicklung)) an den zugehörigen Stellen beschreiben, dürfen wegen der Beschränktheit (nach der zweiten Norm) nur die Entwicklungen der P-Funktion mit nichtnegativen Polstärken genommen werden. Die Bedingungen (C.57) und (C.58) erlauben vereinzelt sogar nur positive Polstärken. Die eindeutigen Lösungen ergeben sich als Untermenge der beschränkten Lösungen.

Ausgewählte Lösungen

Eine Auswahl von Lösungen der Maxwell–Gleichungen für bestimmte Werte von m_1 und m_2. Die Entwicklungen der P–Funktion ergeben sich als hypergeometrische Funktionen $F \equiv {}_2F_1$.

$m_1 = m_2 = 0$ Durch eine geeignete Wahl der Phasenfaktoren in Gleichung (3.35) lassen sich einkomponentige Lösungen in A_1, A_2 und A_3 erzeugen. Bei den zugehörigen P-Funktionen existiert für jede immer eine logarithmisch divergente Entwicklung und eine, die im gesamten z-Intervall beschränkt ist. Letztere haben die Form

$$P^{\alpha}_{2A} = P^{\alpha}_{2B} = F(-k, k; 1; z) \tag{C.60}$$

$$P^{\gamma}_{1A} = P^{\gamma}_{1B} = F(-k, k; 1; 1-z) \tag{C.61}$$

und sie werden nur für $k = 0$ linear abhängig, wo sie konstant sind. Man erhält demnach für $\omega = m_1 = m_2 = 0$ alle trivialen konstanten Vektoren

$$(A_1, A_2, \hat{A}_3) = (c_1, c_2, c_3) \tag{C.62}$$

und für $\omega \in I\!R^+, m_1 = m_2 = 0$ die Lösungen

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \hat{A}_3 \end{pmatrix} = \sin(\omega\tau) \begin{pmatrix} c_1 F(-\omega/2, \omega/2; 1; 1-z) \\ c_2 F(-\omega/2, \omega/2; 1; z) \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{C.63}$$

Für ein nicht ganzzahliges k sind allerdings die Randbedingungen (C.58) verletzt, da die Komponenten nicht am zugehörigen Rand verschwinden.

Für $\omega = 1$ (d.h. $k = 1/2$) sind die Funktionen Elliptische Integrale.

$m_1 = 0, m_2 > 0$ Als Lösungen mit der Bedingung $m_1 = 0$ und $m_2 > 0$ kommen in Frage:

- Ein Feld $\underline{A} = c \cdot (0, A_1, 0, 0)$ für $\omega \in I\!R$(bzw. $k \geq -m_2/2$) mit

$$A_1 = \sin(\omega\tau)\cos(m_2\varphi_2)(1-z)^{m_2/2}F(-k, \omega - k; m_2+1; 1-z) \quad \text{(C.64)}$$

  Für nicht ganzzahlige m_2 und k sind allerdings die Randbedingungen (C.58) verletzt, da die Komponenten nicht am zugehörigen Rand verschwinden.

- Ein Feld $\underline{A} = c \cdot (0, 0, A_2, \hat{A}_3)$ mit

$$\begin{aligned} \hat{A}_3 &= \sin(\omega\tau)\cos(m_2\varphi_2)(1-z)^{m_2/2}F(-k, \omega - k; m_2+1; 1-z) && \text{(C.65)} \\ A_2 &= \sin(\omega\tau)\sin(m_2\varphi_2)(1-z)^{m_2/2}(c_{2a}(1-z)F(1-k, 1+\omega-k; 1; z) \\ &\quad -c_{2b}F(-k, \omega-k; 1; z)) && \text{(C.66)} \end{aligned}$$

Da die Konstanten c_{2a} und c_{2b} so gewählt werden müssen, daß die Addition der Funktionen die $\hat{A}_3$-Komponente liefert, ist es für die Beschränktheit der Lösung zwingend notwendig, daß die beiden kombinierten Funktionen ebenfalls beschränkt sind, sofern nicht eine bis auf einen konstanten Faktor mit der $\hat{A}_3$-Komponente identisch ist. Daher ergeben sich die Bedingungen:

- Für $k = 0$:$c_{2a} = 0$ und $c_{2b} = 1$.
- Für $k \in I\!N^+$: $c_{2a} = 1/c_a - c_b$ und $c_{2b} = c_b$ (siehe Gleichung (3.41)). Diese Werte ergeben sich aus der Betrachtung an den Punkten $(z = 1)$ und $(z = 0)$.

$m_2 = 0, m_1 > 0$ Als Lösungen mit der Bedingung $m_2 = 0$ und $m_1 > 0$ kommen in Frage:

- Ein Feld $\underline{A} = c \cdot (0, 0, A_2, 0)$ für $\omega \in I\!R$(bzw. $k \geq -m_1/2$) mit

$$A_2 = \sin(\omega\tau)\sin(m_1\varphi_1)z^{m_1/2}F(-k, \omega - k; m_1+1; z) \quad \text{(C.67)}$$

  Für ein nicht ganzzahliges k sind allerdings die Randbedingungen (C.58) verletzt, da die Komponenten nicht am zugehörigen Rand verschwinden.

- Ein Feld $\underline{A} = c \cdot (0, A_1, 0, \hat{A}_3)$ mit

$$\begin{aligned} \hat{A}_3 &= \sin(\omega\tau)\cos(m_1\varphi_1)z^{m_1/2}F(-k, \omega - k; m_1+1; z) && \text{(C.68)} \\ A_1 &= \sin(\omega\tau)\sin(m_1\varphi_1)z^{m_1/2}(c_{1a}z \cdot F(1-k, 1+\omega-k; 1; 1-z) \\ &\quad -c_{1b}F(-k, \omega-k; 1; 1-z)) && \text{(C.69)} \end{aligned}$$

Es ergeben sich analog die Bedingungen:

- Für $k = 0$:$c_{1a} = 0$ und $c_{1b} = 1$.
- Für $k \in I\!N^+$: $c_{1a} = 1/c_b - c_a$ und $c_{1b} = c_a$ (siehe Gleichung (3.41)).

$m_2 = 2$ **oder** $m_1 = 2$ **und** $k = -1$ Diese Fälle führen auf die trivialen Lösungen

$$(A_1, A_2, \hat{A}_3) \quad = \quad (c_1 A_1(\phi_1), c_2 A_2(\phi_2), 0) \tag{C.70}$$

die auf ein Gradientenfeld zurückgeführt werden können.

$m_1, m_2 > 0$ **und** $k = 0$ Die Lösung ergibt sich zu:

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \hat{A}_3 \end{pmatrix} = \sin((m_1 + m_2)\tau) z^{m_1/2} (1 - z)^{m_2/2} \begin{pmatrix} \cos(m_1\varphi_1)\cos(m_2\varphi_2) \\ \sin(m_1\varphi_1)\sin(m_2\varphi_2) \\ -\sin(m_1\varphi_1)\cos(m_2\varphi_2) \end{pmatrix} \tag{C.71}$$

$m_1, m_2 > 0$ **und** $k \in I\!N^+$ (Bereits im Hauptteil, Abschnitt 3.2.3, beschrieben.) Es gibt zwei linear unabhängige Lösungen, die dargestellt werden können als:

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \hat{A}_3 \end{pmatrix} \quad = \quad V \cdot z^{m_1/2} (1 - z)^{m_2/2} \begin{pmatrix} -A_1(z) \\ A_2(z) \\ i\hat{A}_3(z) \end{pmatrix}$$

mit

- Erste Lösung (L_1)

$$\begin{aligned} A_1 &= -F(-k, \omega - k; 1 + m_2; 1 - z) \\ A_2 &= c_{2a}(1 - z)F(1 - k, 1 + \omega - k; 1 + m_1; z) - c_{2b}F(-k, \omega - k; 1 + m_1; z) \\ \hat{A}_3 &= F(-k, \omega - k; 1 + m_2; 1 - z) \\ & \quad c_{2a} = 1/c_a - c_b \quad , \qquad c_{2b} = c_b \end{aligned}$$

- Zweite Lösung (L_2)

$$\begin{aligned} A_1 &= c_{1a} z \cdot F(1 - k, 1 + \omega - k; 1 + m_2; 1 - z) - c_{1b}F(-k, \omega - k; 1 + m_2; 1 - z)) \\ A_2 &= -F(-k, \omega - k; m_1 + 1; z) \\ \hat{A}_3 &= F(-k, \omega - k; m_1 + 1; z) \\ & \quad c_{1a} = 1/c_b - c_a \quad , \qquad c_{1b} = c_a \end{aligned}$$

Mit c_a und c_b nach Gleichung (3.41).

C.2.5 Explizite Maxwellgleichungen in 2. Eichung

Die Einführung einer anderen, zweiten Eichung, bei der das Vektorpotential $\underline{A}$ die Bedingung $A_3 = 0$ erfüllen soll, führt zu folgenden Beziehungen:

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{1}{\cos^2\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi_1}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi_1}A_0 - \frac{\partial}{\partial\tau}A_1\right) - \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi_2}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi_2}A_0 - \frac{\partial}{\partial\tau}A_2\right) \\ &\quad - \frac{1}{\sin\vartheta\cos\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\cos\vartheta\left(\frac{\partial}{\partial\vartheta}A_0\right)\right) \qquad (C.72) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{1}{\cos^2\vartheta}\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi_1}A_0 - \frac{\partial}{\partial\tau}A_1\right) + \frac{1}{\cos^2\vartheta}\frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi_2}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi_1}A_2 - \frac{\partial}{\partial\varphi_2}A_1\right) \\ &\quad - \frac{1}{\sin\vartheta\cos\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta}\left(\frac{\partial}{\partial\vartheta}A_1\right)\right) \qquad (C.73) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi_2}A_0 - \frac{\partial}{\partial\tau}A_2\right) + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{1}{\cos^2\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi_1}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi_2}A_1 - \frac{\partial}{\partial\varphi_1}A_2\right) \\ &\quad - \frac{1}{\sin\vartheta\cos\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}\left(\frac{\partial}{\partial\vartheta}A_2\right)\right) \qquad (C.74) \end{aligned}$$

$$0 = -\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\partial}{\partial\vartheta}A_0\right) + \frac{1}{\cos^2\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi_1}\left(\frac{\partial}{\partial\vartheta}A_1\right) + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi_2}\left(\frac{\partial}{\partial\vartheta}A_2\right) \qquad (C.75)$$

und

$$\operatorname{div} A = \frac{\partial}{\partial\tau}A_0 - \frac{1}{\cos^2\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi_1}A_1 - \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi_2}A_2 \qquad (C.76)$$

Die Gleichungen entkoppeln erst, wenn zusätzlich

$$\operatorname{div} A = 0 \qquad (C.77)$$

gefordert wird. Da generell alle Lösungen mit der Bedingung $A_3 = 0$ durch Umeichung der allgemeinen Lösung 3.35 zu gewinnen sind, stellt sich die Frage, bei welchen Lösungen die Divergenzfreiheit erhalten bleibt.

Durch Umformung der Gleichungen (C.72) bis (C.76) erhält man:

$$\frac{\partial}{\partial\varphi_1}\frac{A_1}{(\cos\vartheta)^4} = \frac{\partial}{\partial\varphi_2}\frac{A_2}{(\sin\vartheta)^4} \qquad \text{(aus C.75, C.76 und C.77)} \qquad (C.78)$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau}A_0 = \frac{\partial}{\partial\varphi_1}\frac{A_1}{(\cos\vartheta)^4} \qquad \text{(mit C.76 und C.77)}^1 \qquad (C.79)$$

$$A_0(\vartheta) = (\sin\vartheta\cos\vartheta)^{-4/3} \qquad \text{(mit C.72 und C.73)} \qquad (C.80)$$

$$\omega^2 = m_1^2 = m_2^2 = 16/9 \qquad \text{(mit C.72)} \qquad (C.81)$$

[1] Die Variante $\frac{\partial}{\partial\tau}A_0 = \frac{\partial}{\partial\varphi_1}A_1 = \frac{\partial}{\partial\varphi_2}A_2 = 0$ liefert die drei bekannten einkomponentigen Lösungen (Abschnitte 3.52,3.54,3.56 und C.2.4). Diese Lösungen erfüllen sowohl die erste als auch die zweite Eichung. Daher wird $\frac{\partial}{\partial\tau}A_0 \neq 0$ angesetzt und man erhält aus obigen Gleichungen mit $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2 \in \{-1, 1\}$ einen weiteren Lösungssatz (siehe Gleichung 3.57:

$$\begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = c\frac{e^{i(\sigma_0\tau+\sigma_1\varphi_1+\sigma_2\varphi_2)\frac{4}{3}}}{(\sin\vartheta\cos\vartheta)^{\frac{4}{3}}} \begin{pmatrix} \sigma_0 \\ \sigma_1(\cos\vartheta)^4 \\ \sigma_2(\sin\vartheta)^4 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{C.82}$$

Unter Betrachtung aller Vorzeichenwechsel (d.h. die Wahl aller Kombinationen der σ_i) erhält man so 8 verschiedene Einzellösungen. Die Zahlen $\omega = 0$ und $\omega = 4/3$, die diese beiden Lösungssysteme charakterisieren, sind Lösungen der Gleichung

$$2\omega = 1 \pm \sqrt{1+\omega^2} \qquad \rightarrow \qquad 0 = \omega(\frac{4}{3} - q). \tag{C.83}$$

Diese Gleichung tritt bei der Eichfunktion in Erscheinung, die die Lösung von der ersten Eichung zur zweiten Eichung transformiert.

C.2.6 Verweis auf andere Literatur

In seiner Arbeit über die Maxwell– und Diracgleichung im expandierenden Universum [34] behandelt Schrödinger das elektromagnetische Feld auf dem gekrümmten, 4-dimensionalen Raum $S^1 \times S^3$ mit der Metrik

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}\omega^2 - \sin^2\omega\mathrm{d}\phi_1^2 - \cos^2\omega\mathrm{d}\phi_2^2 + \mathrm{d}\tau^2 \tag{C.84}$$

Ab hier werden alle Angaben aus obiger Arbeit, sofern nicht anderes vermerkt wird, bezüglich der Basis

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\tau^2 - \cos^2\vartheta\mathrm{d}\varphi_1^2 - \sin^2\vartheta\mathrm{d}\varphi_2^2 - \mathrm{d}\vartheta^2 \tag{C.85}$$

angegeben. (Die Indizes $(1, 2, 3, 4)$ werden ersetzt durch $(3, 2, 1, 0)$.)

In diesem Raum sucht er eine Lösung für den Feldstärketensor F_{ik}. Durch die Erweiterung auf die komplexe Zahlenebene führt Schrödinger eine spezielle Nebenbedingung ein, indem er den Realteil von F_{ik} mit dem *klassischen* Feldtensor und den Imaginärteil mit dem *dualen* Feldtensor identifiziert. (Gleichung (2,4) in der Originalarbeit.)

Durch den Vergleich der beiden reellen Feldtensoren reduzieren sich die ursprünglich 6 komplexen Komponenten von F_{ik} auf 3. Die zusätzlichen Gleichungen, d.h. die neben den Maxwellgleichungen zu erfüllenden Nebenbedingungen lauten (nach [34, Glg.(2,10)]):

$$F_{21} = i \sin\vartheta \cos\vartheta F_{30}, \qquad F_{13} = i \cot\vartheta_3 F_{20} \qquad F_{32} = i \tan\vartheta_3 F_{10} \tag{C.86}$$

Überträgt man diese Gleichungen auf die Potentiale, so ergibt sich, mit der Strahlungseichung ($A_0 = 0$), das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\varphi_2}A_3 - \frac{\partial}{\partial\vartheta}A_2 &= i\frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta}\frac{\partial}{\partial\tau}A_1 && \text{(C.87)}\\
\frac{\partial}{\partial\vartheta}A_1 - \frac{\partial}{\partial\varphi_1}A_3 &= i\frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\tau}A_2 && \text{(C.88)}\\
\frac{\partial}{\partial\varphi_1}A_2 - \frac{\partial}{\partial\varphi_2}A_1 &= i\sin\vartheta\cos\vartheta\frac{\partial}{\partial\tau}A_3 && \text{(C.89)}
\end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen kann sofort geschlossen werden, daß Potentiale mit nur einer, nichtverschwindenden Komponente (wie es z.B. das Feld $\underline{A} = (0, A_1, 0, 0)$ ist), bis auf triviale Fälle die Nebenbedingung nicht erfüllen können. Unter Berücksichtigung der Divergenzfreiheit von $\underline{A}$ muß ein solches Feld sogar konstant sein. Ebenso folgt sofort, daß rein reelle Lösungen nicht existieren. Dies hat zur Konsequenz, daß die komplex konjugierte einer gefundenen Lösung das Differentialgleichungssystem nicht erfüllt! Diese Einschränkung beruht nur auf der Nebenbedingung, d.h. der Verknüpfung von Real- und Imaginärteil, während die eigentlichen Maxwellgleichungen, als reellen Differentialgleichungen, auch von der komplex konjugierten gelöst werden.

Die auftretenden Parameter (ν, m, n) bei Schrödinger lassen sich mit demselben Tripel (ω, m_1, m_2) in dieser Arbeit identifizieren.

Auf S. 29/30 bzw. mit (II,7) reduziert Schrödinger die Parametermenge auf $k \in \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Die Schrödingerschen Lösungen lassen sich darstellen als:

- mit $\quad n_1 = 1/2(\omega - m_2 - m_1 - 2) = k - 1 \qquad p = m_1 + m_2 + 1 \qquad q = m_1 + 1$

$$F_{30} \sim A_3 = \frac{ie^{i(\omega\tau + m_1\varphi_1 + m_2\varphi_2)}}{\sin\vartheta\cos\vartheta}\left[\frac{m_2 - m_1}{\omega}f + \frac{m_1 + m_2}{\omega}g\right] \tag{C.90}$$

$$
\begin{aligned}
F_{20} &\sim A_2 = e^{i(\omega\tau+m_1\varphi_1+m_2\varphi_2)}(f-g) && \text{(C.91)}\\
F_{10} &\sim A_1 = e^{i(\omega\tau+m_1\varphi_1+m_2\varphi_2)}(f+g) && \text{(C.92)}\\
f &= -\frac{\omega-m_1-m_2}{\omega+m_1-m_2} z^{m_1/2}(1-z)^{m_2/2} F(1-k,k+m_1+m_2;m_1+1;z) && \text{(C.93)}\\
g &= z^{m_1/2}(1-z)^{m_2/2} F(1+k+m_1+m_2,-k;m_1+1;z) && \text{(C.94)}
\end{aligned}
$$

Die Verknüpfung der beiden Lösungen L_1 und L_2 aus Abschnitt 3.2.3 zu

$$
L_S = -\frac{k}{(k+m_1)c_{2a}} L_1 + \left(1+\frac{c_{2b}}{c_{2a}}\right)\frac{k}{k+m_1} L_2 \qquad \text{(C.95)}
$$

ergibt nach weiteren Umformungen (Formeln z.B. in [3, Vol.I,Kap. 2.8]) die Schrödinger-Lösung L_S.

Anhang D

P-Funktion und Hypergeometrische Funktion

D.1 Riemannsche P-Funktion

Die Lösungen der verallgemeinerten hypergeometrischen Differentialgleichung

$$0 = \frac{\partial^2}{\partial \mathrm{z}^2}S + \left[\frac{1-\alpha-\alpha'}{z} - \frac{1-\gamma-\gamma'}{1-z}\right]\frac{\partial}{\partial \mathrm{z}}S - \left[-\frac{\alpha\alpha'}{z} - \frac{\gamma\gamma'}{1-z} + \beta\beta'\right]\frac{S}{z(1-z)} \tag{D.1}$$

können mittels der Riemannschen P–Funktion dargestellt werden:

$$S = P\left|\begin{array}{cccc} 0 & \infty & 1 & \\ \alpha & \beta & \gamma & z \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{array}\right| \tag{D.2}$$

Hierbei steht die P–Funktion für zwei linear unabhängige Lösungen, die um die jeweiligen Polstellen (die in der ersten Zeile stehen) entwickelt werden können. Die Entwicklung um $z = 0$ liefert die beiden Lösungen ($F \equiv {}_2F_1$)

$$\left.\begin{array}{rcl} S = P^{\alpha} & = & z^{\alpha}(1-z)^{\gamma}F(\alpha+\beta+\gamma, \alpha+\beta'+\gamma; 1+\alpha-\alpha'; z) \\ & = & z^{\alpha}(1-z)^{\gamma'}F(\alpha+\beta+\gamma', \alpha+\beta'+\gamma'; 1+\alpha-\alpha'; z) \\ S' = P^{\alpha'} & = & z^{\alpha'}(1-z)^{\gamma}F(\alpha'+\beta+\gamma, \alpha'+\beta'+\gamma; 1+\alpha'-\alpha; z) \\ & = & z^{\alpha'}(1-z)^{\gamma'}F(\alpha'+\beta+\gamma', \alpha'+\beta'+\gamma'; 1+\alpha'-\alpha; z) \end{array}\right\} \tag{D.3}$$

Sonderfälle: Bei der Darstellung der P-Funktion mittels hypergeometrischer Funktionen wie in Gleichung (D.3) müssen einzelne Sonderfälle untersucht werden, da $F(a, b; c; z)$ für ein ganzzahliges, nichtpositives c nicht definiert ist. Die folgende Unterteilung entstammt aus [25]:

1. *Es ist* $\alpha - \alpha' = -m_1$ *keine ganze Zahl.* Die Lösungen S und S' sind verschieden und wohldefiniert.

2. *Es ist* $\alpha - \alpha' = -m_1 = 0$. Es liegt ein *Ausnahmefall erster Ordnung* vor.

3. *Es ist* $\alpha - \alpha' = -m_1$ *eine von Null verschiedene ganze Zahl.* Eine Lösung ist immer korrekt (z.B. S' für $m_1 > 0$), die andere nur für den Fall, daß

$$(\alpha' - \alpha) \pm (\beta' - \beta) \pm (\gamma' - \gamma) = m_1 \pm \omega \pm (1 + m_2)$$

für eine geeignete Vorzeichenkombination eine positive ganze, ungerade Zahl und kleiner als $2m$ ist (*Ausnahmefall zweiter Ordnung*). Setzt man $\omega = 2k + m_1 + m_2$, erhält man die Bedingungen

$$k \in \{0, -1, \ldots, -m_1\} \qquad \text{oder} \qquad k \in \{-m_2, -m_2 - 1, \ldots, -m_2 - m_1\} \tag{D.4}$$

$$\text{bzw} \qquad \omega \in m_2 - m_1, m_2 - m_1 + 2, \ldots, m_2 + m_1 \tag{D.5}$$

$$\text{oder} \qquad \omega \in -m_2 - m_1, -m_2 - m_1 + 2, \ldots, -m_2 + m_1 \tag{D.6}$$

In allen anderen Fällen liegt wieder ein Ausnahmefall erster Ordnung vor.

Ausnahmefall erster Ordnung: In den Ausnahmefällen erster Ordnung muß die linear unabhängige zweite Lösung erst bestimmt werden. Sie ergibt sich aus einer Grenzbetrachtung und weist immer einen logarithmischen Term auf.

Ist z.B. S' die reguläre Lösung, so weist die Reihenentwicklung von der hypergeometrischen Funktion F in S erstmalig beim m_1-ten Element eine Unbestimmtheit auf; der zugehörige Koeffizient a_m ist

$$a_m = [(\alpha + \beta + \gamma)_m (\alpha + \beta' + \gamma)_m] \,/\, [(1 + \alpha - \alpha')_m m!]$$

Ersetzt man nun α durch $\alpha + \epsilon$ und bildet den Grenzwert von

$$S'' \;=\; \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon} \left[S/a_m - S' \right], \tag{D.7}$$

so hat man die zweite Lösung vorliegen.

Im Fall $m_1 = 0$ läßt sich die Lösung S'' auch darstellen als:

$$S'' = \log(z)S' + z^{\alpha'}(1-z)^\gamma \frac{\partial}{\partial\epsilon} F(\beta+\gamma+\epsilon, \beta'+\gamma+\epsilon; 1+2\epsilon; z)|_{\epsilon=0}$$

D.2 hypergeometrische Funktion

Literatur: [25, 26, 30, 29, 5, 20] Die hypergeometrische Funktion $F(a,b,c;z)$ ist (für positive c) dann und nur dann bei $z=1$ beschränkt, wenn

1. a oder b null oder eine negative ganze Zahl ist, oder
2. $c > a+b$ gilt.

Es gilt ($k, m, n \in I\!N$):

$$F(-k, m+n+1, m+1, x) = \binom{m+n}{m}^{-1} \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} \binom{m+n+r}{n} (-1)^r x^r \qquad \text{(D.8)}$$

$$F(a,b;c;x) = (1-x)^{c-a-b} F(c-a, c-b; c; x) \qquad \text{(D.9)}$$

$$F(a,b;c;1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} \qquad \text{(D.10)}$$

- Legendre-Funktionen $P_n(z)$ [5]

$$P_n(z) = F(n+1, -n, 1, (1-x)/2) \qquad \text{(D.11)}$$

- adjungierte Legendre-Funktionen [20]

$$P_n^m(z) = (z+1)^{m/2}(z-1)^{-m/2}/\Gamma(1-m)\, F(n+1, -n, 1-m, (1-x)/2) \qquad \text{(D.12)}$$

- Jacobi-Polynome $P_n^{(a,b)}(z)$ [20]

$$P_n^{(a,b)}(z) = (a+1)_n/n!\, F(-n, a+b+n+1; a+1, (1-z)/2) \qquad \text{(D.13)}$$

- Jacobi-Funktion $\Phi_n^{(a,b)}(z)$ [20]

$$\Phi_n^{(a,b)}(z) = F((a+b+1-i\,n)/2, (a+b+1+i\,n)/2; a+1, -\sinh^2 z) \qquad \text{(D.14)}$$

- Elliptische Integrale $E(z)$ und $K(z)$[20]

$$E(z) = \pi/2\, F(-1/2, 1/2, 1, z^2) \tag{D.15}$$

$$K(z) = \pi/2\, F(1/2, 1/2, 1, z^2) \tag{D.16}$$

- Chebyshev-Polynome $T_n(z)$[20]

$$T_n(z) = F(-n, n, 1/2, (1-z)/2) = \cos(n \arccos z) \tag{D.17}$$

- ultrasphärische Polynome $C_n^{(a)}(z)$ [20]

$$C_n^{(a)}(z) = (2a)_n/n!\, F(-n, n+2a; a+1/2; (1-z)/2) \tag{D.18}$$

- allgemeine Beziehungen 1 [5]

$$F(a, n; a, x) = (1-x)^{-n} \tag{D.19}$$

$$F(1, 1; 2; x) = -\ln(1-x)\,/x \tag{D.20}$$

$$F(1/2, 1/2; 3/2; x^2) = \arcsin(x)/x \tag{D.21}$$

- allgemeine Beziehungen 2 [20]

$$\lim_{b\to\infty} F(1, b; 1, z/b) = e^z \tag{D.22}$$

$$F(1/2, 1; 3/2; z^2) = \ln((1+z)/(1-z))\,/(2z) \tag{D.23}$$

$$F(1/2, 1; 3/2; -z^2) = \arctan(z)/z \tag{D.24}$$

$$F(n/2, -n/2; 1/2; \sin^2 z) = \cos(n\, z) \tag{D.25}$$

$$F((1+n)/2, (1-n)/2; 3/2; \sin^2 z) = \sin(n\, z)/(n \sin z) \tag{D.26}$$

Die hypergeometrische Funktione läßt sich in Integraldarstellung und als Summe schreiben. Sie erfüllt die hypergeometrische Differentialgleichung.

- Differentialgleichung

$$0 = \left(z(1-z)\frac{\partial^2}{\partial \mathrm{z}^2} + (c - (1+a+b)z)\frac{\partial}{\partial \mathrm{z}} - ab \right) F(a, b; c; z) \tag{D.27}$$

- Reihenentwicklung

$$ {}_2F_1(a,b;c;z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k(b)_k z^k}{(c)_k k!} \tag{D.28} $$

- Integraldarstellung

$$ {}_2F_1(a,b;c;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}(1-z\,t)^{-b}\mathrm{d}t \tag{D.29} $$

Es treten explizit folgende Lösungen auf.

Elliptische Integrale: E in Gleichung (C.63)

$$ m_1 = m_2 = 0 \qquad \text{und} \qquad \omega = 1 \tag{D.30} $$

$$ \underline{A} = (0, A_1, 0, 0) \quad \text{mit} \quad A_1 = \sin\tau\, F(-1/2, 1/2, 1, \sin^2\vartheta) \tag{D.31} $$

$$ \underline{A} = (0, 0, A_2, 0) \quad \text{mit} \quad A_2 = \sin\tau\, F(-1/2, 1/2, 1, \cos^2\vartheta) \tag{D.32} $$

Chebyshev-Polynome: Diese Polynome treten recht häufig auf (Lösungen L_1 und L_2 nach Abschnitt 3.2.3 sowie die Lösungen nach Schroedinger, Abschnitt C.2.6). Bei den hypergeometrischen Funktionen gibt es vier Typen, die hier relevant sind (Beachte Ersetzung $m_2 \leftrightarrow m_1$ und gleichzeitig $\vartheta \leftrightarrow \pi/2 - \vartheta$):

1. $F(-k, \omega - k, 1 + m_2, \sin^2\vartheta)$

$$ m_1 = m_2 = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad F(\ldots) = \frac{\sin\omega\vartheta}{\omega\sin\vartheta} \tag{D.33} $$

$$ m_1 = \frac{1}{2} \wedge m_2 = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad F(\ldots) = \cos\omega\vartheta \tag{D.34} $$

2. $F(1-k, \omega - k, 1 + m_2, \sin^2\vartheta)$

$$ m_1 = m_2 = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad F(\ldots) = \cos(\omega-1)\vartheta \tag{D.35} $$

$$ m_1 = -\frac{1}{2} \wedge m_2 = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad F(\ldots) = \frac{\sin(\omega-1)\vartheta}{(\omega-1)\sin\vartheta} \tag{D.36} $$

3. $F(-k, 1 + \omega - k, 1 + m_2, \sin^2\vartheta)$

$$ m_1 = m_2 = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad F(\ldots) = \cos(\omega+1)\vartheta \tag{D.37} $$

$$ m_1 = -\frac{1}{2} \wedge m_2 = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad F(\ldots) = \frac{\sin(\omega+1)\vartheta}{(\omega+1)\sin\vartheta} \tag{D.38} $$

4. $F(1-k, 1+\omega-k, 1+m_2, \sin^2\vartheta)$

$$m_1 = -\frac{3}{2} \wedge m_2 = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad F(\ldots) = \frac{\sin\omega\vartheta}{\omega\sin\vartheta} \tag{D.39}$$

$$m_1 = -\frac{3}{2} \wedge m_2 = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad F(\ldots) = \cos\omega\vartheta \tag{D.40}$$

D.3 Entwicklungen der P-Funktion durch Mathematica

Die Angabe der beiden Lösungen der P-Funktion für alle möglichen Parameter erfordert einen größeren Aufwand. Die Einbindung in *Mathematica* erfolgt über das Paket `hypvoll.ma`, das im folgenden Abschnitt erläutert wird.

Definition der Pochhammer und Ψ-Funktionen:

Pochhammer[e,f]= $(e)_f = e(e+1)(e+2)\cdot\cdot(e+f-1) = \Gamma(e+f)/\Gamma(e)$

PolyGamma[a]= $-\sum_{k=0}^{\infty}(a+k)^{-1}$

```
ph[e_,f_]:=Pochhammer[e,f]
psii[a_,b_,c_,i_]:=PolyGamma[a+i]-PolyGamma[a] +
   PolyGamma[b+i]-PolyGamma[b] - PolyGamma[c+i]+PolyGamma[c] -
   PolyGamma[1+i]+PolyGamma[1]
psia[a_,b_,c_,i_]:=-PolyGamma[1-a]+PolyGamma[-a-i+1] +
   PolyGamma[b+i]-PolyGamma[b] - PolyGamma[c+i]+PolyGamma[c] -
   PolyGamma[1+i]+PolyGamma[1]
psib[a_,b_,c_,i_]:=-PolyGamma[1-b]+PolyGamma[-b-i+1] +
   PolyGamma[a+i]-PolyGamma[a] - PolyGamma[c+i]+PolyGamma[c] -
   PolyGamma[1+i]+PolyGamma[1]
psiab[a_,b_,c_,i_]:=-PolyGamma[1-a]+PolyGamma[-a-i+1] +
   PolyGamma[-b-i+1]-PolyGamma[1-b] - PolyGamma[c+i]+PolyGamma[c] -
   PolyGamma[1+i]+PolyGamma[1]
psi[a_,b_,c_,i_]:=psii[a,b,c,i]/;(a>=0 && b>=0)
psi[a_,b_,c_,i_]:=psia[a,b,c,i]/;(a<0 && b>=0)
psi[a_,b_,c_,i_]:=psib[a,b,c,i]/;(a>=0 && b<0)
```

```
psi[a_,b_,c_,i_]:=psiab[a,b,c,i]/;(a<0 && b<0)
```

Mit dieser Definiton sind auch alle negativen Werte für a und b zugelassen. Die Ψ-Funktion (psi[..]) tritt bei der Entwicklung der divergenten ${}_2F_1$ -Funktion auf.

```
hfa[a_,b_,c_,d_]:=Hypergeometric2F1[a,b,c,d]
hfb[a_,b_,c_,d_]:=Sum[ph[a,i]ph[b,i]/ph[c,i]/i! d^(i),{i,0,-c}]
hfc[a_,b_,c_,d_]:=Sum[(-1)^(i-1)(i-1)!
   ph[a,-i]ph[b,-i]/ph[c,-i] d^(-i),{i,1,c-1}]+
   Log[d] hfa[a,b,c,d] +
   Sum[ph[a,i]ph[b,i]/ph[c,i]/i! psi[a,b,c,i] d^(i),{i,0,Infinity}]
hfd[b_,c_,d_]:=-Sum[ph[b,-i]/ph[c,-i]/i d^(-i),{i,1,c-1}]+Log[d] +
   Sum[ph[b,i]/ph[c,i]/i d^(i),{i,1,Infinity}]
hfe[a_,b_,c_,d_]:=-Sum[(-a)!ph[b,-i]/ph[c,-i]/ph[i,-a+1] d^(-i),{i,1,c-1}]+
   Log[d] hfa[a,b,c,d] +
   Sum[ph[a,i]ph[b,i]/ph[c,i]/i! psia[a,b,c,i] d^(i),{i,1,-a}]+
   (-1)^(-a)(-a)!Sum[ph[b,i]/ph[c,i]/ph[i+a,1-a] d^(i),{i,1-a,Infinity}]
```

- Die Funktion hfa ist die normale hypergeometrische Funktion ${}_2F_1$.

- Die Funktion hfb ist die hypergeometrische Funktion ${}_2F_1$ mit Abbruchbedingung (c ist ganzzahlig negativ sowie a oder b ganzzahlig negativ und größer als c)

- Die Funktion hfc ist die divergente hypergeometrische Funktion G[a,b,c,d] für $(c) \in \{1, 2, 3, ...\}$ und weder a noch b sind Elemente von $\{..., -1, 0, 1, ..., c - 1\}$.

- Die Funktion hfd ist die divergente hypergeometrische Funktion G[a,b,c,d] für $(c) \in \{1, 2, 3, ...\}$ und $a = 0$.

- Die Funktion hfe ist die divergente hypergeometrische Funktion G[a,b,c,d] für $(c) \in \{1, 2, 3, ...\}$ und $(a) \in \{-1, -2, ...\}$ und $b \notin \{a + 1, ..., -1, 0, 1, ..., c - 1\}$.

hfa : ${}_2F_1(a,b;c;d)$ für $c \notin \{0,-1,-2,...\}$

hfb : ${}_2F_1(a,b,c,d)$ für $c \in \{0,-1,-2,...\} \wedge (a \vee b) \in \{0,-1,...,c\}$

hfc : $G(a,b,c,d)$ für $c \in \{1,2,3,...\} \wedge (a \wedge b) \notin \{...,-1,0,1,...,c-1\}$

hfd : $G(0,b,c,d)$ für $c \in \{1,2,3,...\} \wedge (a=0 \vee b=0)$

hfe : $G(a,b,c,d)$ für $c \in \{1,2,3,...\} \wedge a \in \{-1,-2,...\} \wedge b \notin \{a+1,...,-1,0,1,...,c-1\}$

Mit diesen Definitionen lassen sich nun alle Lösungspaare der hypergeometrischen Funktion erzeugen:

Die erste Lösung:

```
fa[a_,b_,c_,d_]:=hfa[a,b,c,d]/;(Round[c]!=c)
fa[a_,b_,c_,d_]:=hfb[a,b,c,d]/;(Round[c]==c && c<1 && (
   (Round[a]==a && a<=0 && a>=c)||(Round[b]==b && b<=0 && b>=c)))
fa[a_,b_,c_,d_]:=hfa[a,b,c,d]/;(Round[c]==c && c>1 && (
   (Round[a]==a && a>0 && a<c)||(Round[b]==b && b>0 && b<c)))
fa[a_,b_,c_,d_]:=hfa[a,b,c,d]/;(Round[c]==c && c>0 &&
   (Round[a]!=a || a>=c) && (Round[b]!=b || b>=c))
fa[a_,b_,c_,d_]:=d^(1-c)hfa[1+a-c,1+b-c,2-c,d]/;(Round[c]==c && c<1 &&
   (Round[a]!=a || a<0 || a>c)&&(Round[b]!=b || b<0 || b>c))
fa[a_,b_,c_,d_]:=1/;(Round[c]==c && c>0 && a==0 &&
   (Round[b]!=b || b<=0 || b>=c))
fa[a_,b_,c_,d_]:=1/;(Round[c]==c && c>0 && b==0 &&
    (Round[a]!=a || a<=0 || a>=c))
fa[a_,b_,c_,d_]:=hfa[a,b,c,d]/;(Round[c]==c && c>0 &&
   Round[a]==a && a<0 && (Round[b]!=b || b<=a || b>=c))
fa[a_,b_,c_,d_]:=hfa[a,b,c,d]/;(Round[c]==c && c>0 &&
   Round[b]==b && b<0 && (Round[a]!=a || a<b || a>=c))
```

Die zweite Lösung:

```
fb[a_,b_,c_,d_]:=d^(1-c) hfa[1+a-c,1+b-c,2-c,d]/;(Round[c]!=c)
fb[a_,b_,c_,d_]:=d^(1-c) hfa[1+a-c,1+b-c,2-c,d]/;(Round[c]==c && c<1 && (
   (Round[a]==a && a<=0 && a>=c)||(Round[b]==b && b<=0 && b>=c)))
```

```
fb[a_,b_,c_,d_]:=d^(1-c) hfb[1+a-c,1+b-c,2-c,d]/;(Round[c]==c && c>1 && (
   (Round[a]==a && a>0 && a<c)||(Round[b]==b && b>0 && b<c)))
fb[a_,b_,c_,d_]:=hfc[a,b,c,d]/;(Round[c]==c && c>0 &&
   (Round[a]!=a || a>=c) && (Round[b]!=b || b>=c))
fb[a_,b_,c_,d_]:=d^(1-c)hfc[1+a-c,1+b-c,2-c,d]/;(Round[c]==c && c<1 &&
   (Round[a]!=a || a<0 || a>c)&&(Round[b]!=b || b<0 || b>c))
fb[a_,b_,c_,d_]:=hfd[b,c,d]/;(Round[c]==c && c>0 && a==0 &&
    (Round[b]!=b || b<=0 || b>=c))
fb[a_,b_,c_,d_]:=hfd[a,c,d]/;(Round[c]==c && c>0 && b==0 &&
    (Round[a]!=a || a<=0 || a>=c))
fb[a_,b_,c_,d_]:=hfe[a,b,c,d]/;(Round[c]==c && c>0 &&
   Round[a]==a && a<0 && (Round[b]!=b || b<=a || b>=c))
fb[a_,b_,c_,d_]:=hfe[b,a,c,d]/;(Round[c]==c && c>0 &&
   Round[b]==b && b<0 && (Round[a]!=a || a<b || a>=c))
```

Die Nebenbedingungen sind in übersichtlicher Form in Tabelle D.1 zusammengefaßt.

Darstellung der Lösungen von S_2

$$\begin{aligned}
szaa &:= x^{(ma/2)}(1-x)^{(1+mb/2)} fa[1-k, 1+k+ma+mb, 1+ma, x] \\
szab &:= x^{(ma/2)}(1-x)^{(1+mb/2)} fb[1-k, 1+k+ma+mb, 1+ma, x] \\
szac &:= x^{(ma/2)}(1-x)^{(1+mb/2)} fa[1-k, 1+k+ma+mb, 2+mb, 1-x] \\
szad &:= x^{(ma/2)}(1-x)^{(1+mb/2)} fb[1-k, 1+k+ma+mb, 2+mb, 1-x]
\end{aligned}$$

Darstellung der Lösungen von D_2

$$\begin{aligned}
dzaa &:= x^{(ma/2)}(1-x)^{(mb/2)} fa[-k, k+ma+mb, 1+ma, x] \\
dzab &:= x^{(ma/2)}(1-x)^{(mb/2)} fb[-k, k+ma+mb, 1+ma, x] \\
dzac &:= x^{(ma/2)}(1-x)^{(mb/2)} fa[-k, k+ma+mb, 2+mb, 1-x] \\
dzad &:= x^{(ma/2)}(1-x)^{(mb/2)} fb[-k, k+ma+mb, 2+mb, 1-x]
\end{aligned}$$

Darstellung der Lösungen von D_1

$$daaa := x^{(1+ma/2)}(1-x)^{(mb/2)} fa[1-k, 1+k+ma+mb, 1+mb, 1-x]$$

$c \notin \{\ldots, -1, 0, 1, \ldots\}$	$hfa[a, b, c, x]$	$x^{(1-c)} hfa[1 + a - c, 1 + b - c, 2 - c, x]$
$c \in \{0, -1, -2, ...\} \wedge (a \vee b) \in \{0, -1, ..., c\}$	$hfb[a, b, c, x]$	$x^{(1-c)} hfa[1 + a - c, 1 + b - c, 2 - c, x]$
$c \in \{2, 3, 4, ...\} \wedge (a \vee b) \in \{1, 2, ..., c - 1\}$	$hfa[a, b, c, x]$	$x^{(1-c)} hfb[1 + a - c, 1 + b - c, 2 - c, x]$
$c \in \{1, 2, 3, 4, ...\} \wedge (a \wedge b) \notin \{..., -1, 0, 1, ..., c - 1\}$	$hfa[a, b, c, x]$	$hfc[a, b, c, x]$
$c \in \{0, -1, -2, ...\} \wedge (a \wedge b) \notin \{0, -1, ..., c\}$	$x^{(1-c)} hfa[1 + a - c, 1 + b - c, 2 - c, x]$	$x^{(1-c)} hfc[1 + a - c, 1 + b - c, 2 - c, x]$
$c \in \{1, 2, 3, 4, ...\} \wedge b \notin \{1, ..., c - 1\} \wedge a = 0$	$hfa[0, b, c, x] = 1$	$hfd[b, c, x]$
$c \in \{1, 2, 3, 4, ...\} \wedge a \notin \{1, ..., c - 1\} \wedge b = 0$	$hfa[0, a, c, x] = 1$	$hfd[a, c, x]$
$c \in \{1, 2, 3, 4, ...\} \wedge b \notin \{a + 1, .., -1, 0, 1, ..., c - 1\} \wedge a \in \{-1, -2, ...\}$	$hfa[a, b, c, x]$	$hfe[a, b, c, x]$
$c \in \{1, 2, 3, 4, ...\} \wedge a \notin \{b, .., -1, 0, 1, ..., c - 1\} \wedge b \in \{-1, -2, ...\}$	$hfa[a, b, c, x]$	$hfe[b, a, c, x]$

Tabelle D.1: Zusammenstellung der hypergeometrischen Funktionen $F(a, b, c, x)$, die bei der Entwicklung der P-Funktion nach Gleichung (D.3) auftreten. Für jeden Parameterbereich von a, b und c gibt es zwei Lösungen (linke und rechte Spalte).

$$\begin{aligned}
daab &:= x^{(1+ma/2)}(1-x)^{(mb/2)} fb[1-k, 1+k+ma+mb, 1+mb, 1-x] \\
daac &:= x^{(1+ma/2)}(1-x)^{(mb/2)} fa[1-k, 1+k+ma+mb, 2+ma, x] \\
daad &:= x^{(1+ma/2)}(1-x)^{(mb/2)} fb[1-k, 1+k+ma+mb, 2+ma, x]
\end{aligned}$$

Darstellung der Lösungen von S_1

$$\begin{aligned}
saaa &:= x^{(ma/2)}(1-x)^{(mb/2)} fa[-k, k+ma+mb, 1+mb, 1-x] \\
saab &:= x^{(ma/2)}(1-x)^{(mb/2)} fb[-k, k+ma+mb, 1+mb, 1-x] \\
saac &:= x^{(ma/2)}(1-x)^{(mb/2)} fa[-k, k+ma+mb, 2+ma, x] \\
saad &:= x^{(ma/2)}(1-x)^{(mb/2)} fb[-k, k+ma+mb, 2+ma, x]
\end{aligned}$$

Darstellung der Lösung mit der Nebenbedingung $adreia \overset{!}{=} adreiz$

$$\begin{aligned}
adreiz &:= czaa \cdot szaa + czab \cdot szab + czba \cdot dzaa + czbb \cdot dzab \\
adreia &:= caaa \cdot saaa + caab \cdot saab + caba \cdot daaa + cabb \cdot daab \\
aeins &:= caaa \cdot saaa + caab \cdot saab - caba \cdot daaa - cabb \cdot daab \\
azwei &:= czaa \cdot szaa + czab \cdot szab - czba \cdot dzaa - czbb \cdot dzab
\end{aligned}$$

Ein paar Beispiele für die Lösungen der Maxwellgleichung mit $m_1 = m_2 = 2(1)$, $\omega = 2k + m_1 + m_2 =$ und $k = -1(0)$.

1. $(m_1 = m_2 = 2, k = -1)$:

$\begin{pmatrix} A_1(z) \\ A_2(z) \\ \widehat{A}_3(z) \end{pmatrix}$	$\frac{1-x}{x}\begin{pmatrix} 1+x \\ x \\ -1 \end{pmatrix}$	$\frac{1-x}{x}\begin{pmatrix} x \\ -1 \\ x \end{pmatrix}$	$\frac{x}{1-x}\begin{pmatrix} 1-x \\ 2-x \\ 1 \end{pmatrix}$	$\frac{x}{1-x}\begin{pmatrix} 1 \\ -(1-x) \\ (1-x) \end{pmatrix}$

Geprüft auf Divergenzfreiheit und Erzeugung.

2. $(m_1 = m_2 = 1, k = -1)$:

$\begin{pmatrix} A_1(z) \\ A_2(z) \\ \widehat{A}_3(z) \end{pmatrix}$	$\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\frac{\sqrt{1-x}\ln(1-x)}{\sqrt{x}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
	$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\frac{\sqrt{x}\ln x}{\sqrt{1-x}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

3. $(m_1 = m_2 = 2, k = 0)$:

$\begin{pmatrix} A_1(z) \\ A_2(z) \\ \widehat{A}_3(z) \end{pmatrix}$	$x\,(1-x)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\frac{1-x}{x}\begin{pmatrix} 1+2x+9x^2 \\ (1-x)(1+3x) \\ (1-x)(1+3x) \end{pmatrix}$
	∞-Summe?	$\frac{x}{1-x}\begin{pmatrix} 6-16x+9x^2 \\ 6-8x+3x^2 \\ 6-8x+3x^2 \end{pmatrix}$

Kapitel E

Abkürzungen und Definitionen

Hier werden die wichtigsten der in dieser Arbeit benutzten Abkürzungen Formelzeichen und Begriffe erläutert.

$I\!N^0$	:	alle natürlichen Zahlen ($\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$)	(E.1)
$I\!N^+$	:	alle positiven natürlichen Zahlen ($\{1, 2, 3, \ldots\}$)	(E.2)
$Z\!\!\!Z$	:	alle ganzen Zahlen	(E.3)
$I\!R$	:	alle reellen Zahlen	(E.4)
$I\!R^+$	:	alle positiven reellen Zahlen	(E.5)
$\mathbb{C}$	:	alle komplexen Zahlen	(E.6)
$\Phi_{(0)}$	:	0-Form, Klein–Gordon–Feld	(E.7)
$A_{(1)}$	:	1-Form	(E.8)
R	:	Krümmungsskalar	(E.9)
R_{S3}	:	Radius der Sphäre S^3	(E.10)
$\underline{*}$	:	Hodge-Dual-Operator	(E.11)
$\mathrm{diag}(a, b, \ldots, c)$	:	Matrix mit Werten $a, b, \ldots, c$ auf Hauptdiagonalen, sonst Null	(E.12)
X^i	:	Generator einer konf. Transformation als Differentialoperator	(E.13)
$\widetilde{X^i}$	:	Generator einer konformen Transformation als $su(2,2)$–Matrix	(E.14)
Δ	:=	$\frac{1}{\cos^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial{\varphi_1}^2} + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial{\varphi_2}^2} + \frac{1}{\sin\vartheta\cos\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\sin\vartheta\cos\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}$ (Laplace-Operator von S^3 für skalares Feld)	(E.15)

$$\Box \quad := \quad \frac{\partial^2}{\partial\tau^2} - \Delta = \frac{\partial^2}{\partial\tau^2} - \frac{1}{\cos^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial{\varphi_1}^2} - \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial{\varphi_2}^2} - \frac{1}{\sin\vartheta\cos\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\sin\vartheta\cos\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta} \tag{E.16}$$

(d'Alembert-Operator von $S^1 \times S^3$ für skalares Feld)

obere Indizes

$(\cdot)^*$: komplex-konjugiert (E.17)

$(\cdot)^T$: transponiert (E.18)

$(\cdot)^*$: transponiert (Matrix) und komplex-konjugiert (E.19)

$(\cdot)^\dagger$: $\eta_{(2,2)}$ – transponiert (Spinor) und komplex-konjugiert (E.20)

spezielle Definitionen

V : exponentieller Vorfaktor, resultiert aus Separationsansatz

$$V = e^{i(\omega\tau + m_1\varphi_1 + m_2\varphi_2)} \tag{E.21}$$

$\eta \;=\; \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$ $\quad I\!\!M^4$ –Metrik (E.22)

$\eta_{(2,2)} \;=\; \mathrm{diag}(1,1,-1,-1)$ $\quad SU(2,2)$ – Metrik (E.23)

$F(a,b,c;x) \;=\; {}_2F_1(a,b,c;x)$ $\quad$ hypergeometrische Funktion (E.24)

$z \;=\; \cos^2\vartheta$ (E.25)

singuläre Punkte : Die singulären Punkte sind diejenigen Werte s_ϑ, an denen die Determinante der Metrik $g_{\mu\nu}$ verschwindet. So hat man z.B. an dem Punkt $\vartheta = 0$ ein verschwindendes Maß für φ_2, und das φ_1–Maß wird maximal. Analog zu den gewöhnlichen Kugelkoordinaten ist dieser Punkt also ein *Pol* für φ_2 und ein *Äquator* für φ_1. Im $U(2)$–Programm entspricht der Äquator der *Seele* des Torus.

harmonische Funktion : Eine (skalare) Funktion Φ ist dann harmonisch, wenn $\Box\Phi = -(d\delta + \delta d)\Phi = 0$ gilt. Eine 1-Form $A_{(1)}$ ist dann harmonisch, wenn $(d\delta + \delta d)A_{(1)} = 0$ gilt.

P–Funktionen, verwandte : Zwei P–Funktionen sind dann verwandt, wenn vier der Koeffizienten $(\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma')$ in beiden Funktionen dieselben Werte annehmen und die beiden übrigen Koeffizienten sich genau um ± 1 unterscheiden.

Eichung, erste : Eichung der Maxwellgleichung mit

$$A_\tau \equiv 0 \quad \text{für} \quad \omega \neq 0 \qquad \text{und} \tag{E.26}$$

$$\mathrm{div} A \equiv 0 \quad \text{für} \quad \omega = 0 \tag{E.27}$$

Eichung, zweite : Eichung der Maxwellgleichung mit

$$A_\vartheta \equiv 0 \tag{E.28}$$

(quasi-)primäre Felder : Ein primäres (quasiprimäres) Feld ($T_{a..\mu..}{}^{b..\nu..}$) besitzt die Skalendimension $d(T) = 0$ ($\neq 0$). Ob ein Feld primär, quasiprimär oder keines von beiden ist, läßt sich erst nach Angabe des Lagrangeans entscheiden. Die kinetischen Terme für ein skalares Feld ($\partial_\mu \Phi_{(0)} \partial^\mu \Phi_{(0)}$), einen Dirac–Spinor ($\Psi^\dagger \gamma^\mu \partial_\mu \Psi$) und ein Eichfeld ($F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$, $F = d\,A$) führen zu den Skalendimensionen $d(\Phi_{(0)}) = 1$, $d(\Psi) = 3/2$ und $d(A) = 0$. Ein $SU(2,2)$–Spinor $\Psi_{(2,2)}$ besitzt die Skalendimension $d(\Psi_{(2,2)}) = 2$.

ausgezeichnetes Koordinatensystem : Es ist möglich, eine Parametrisierung von $S^1 \times S^3$ zu wählen, bei der Funktionen (Lösungen der Feldgleichungen) existieren, die zu allen drei $U(1)$ Untergruppen (Cartan-Subalgebra) der $SU(2,2)$ gleichzeitig Eigenlösungen sind. Nach [24] gibt es für S^3 genau eine derartige Wahl für separierbare Koordinatensysteme.

Spinoren Unter einem Spinor wird in dieser Arbeit ein vierelementiges Objekt verstanden, daß in der fundamentalen Darstellung der $SU(2,2)$–Gruppe liegt. Er liegt gleichzeitig in der Spinordarstellung von $SO(4,2)$, der reellen konformen Gruppe des Minkowskiraumes. Wenn Spinoreigenschaften untersucht werden, dann soll der zugehörige Spinor im $\mathbb{M}^4$ definiert sein, da die Angabe einer Transformation von Spinoren bei der Abbildung von $S^1 \times S^3$ nach $\mathbb{M}^4$ (noch) nicht möglich ist. Im $U(2)$–Programm wird das Urbild eines $\mathbb{M}^4$–Spinors nicht mit einem Spinor in $S^1 \times S^3$ identifiziert. Der 'klassische' Spinor wird Dirac–Spinor genannt. Er entspricht einem $SU(2,2)$–Spinor, solange nur die Lorentz–Transformationen betrachtet werden.