

Kapitel 3

Derivierte Kegel im Vergleich mit anderen Ableitungskegeln

3.1 Grundlegende Betrachtungen

Derivierte Mengen, so hatten wir im Kapitel 2 festgestellt, stellen eine Verallgemeinerung des Ableitungsbegriffs dar. Dabei war allerdings noch nichts darüber ausgesagt worden, welche Beziehungen zwischen derivierten Mengen und speziellen Typen von Ableitungen bestehen. Insbesondere stellt sich die Frage, mit Hilfe welcher Ableitungsbegriffe man Punkte konstruieren kann, die sich als Elemente einer K -Ableitungsmenge (vgl. Definition 2.4) erweisen, um aus diesen nach Lemma 2.1 einen K -Ableitungskegel der gegebenen Funktion zu erzeugen. Wir wollen zunächst einige elementare Eigenschaften von K -Ableitungskegeln festhalten.

Aus der Definition eines K -Ableitungskegels folgt sofort, daß jeder Teilkegel eines solchen Kegels wiederum selbst ein K -Ableitungskegel ist. Wir müssen folglich davon ausgehen, daß es zu einer vorgegebenen Funktion mehrere verschiedene derivierte Kegel geben kann.

Berücksichtigt man die Verwendung der derivierten Mengen in notwendigen Optimalitätsbedingungen vom Typ des Theorems 2.2, so erkennt man die Notwendigkeit, zu einer gegebenen Aufgabe einen möglichst großen derivierten Kegel zu finden, um die Optimalitätsbedingung möglichst scharf formulieren zu können. Zwar ist es recht einfach einzusehen, daß, falls $D_1 \in R^m$ und $D_2 \in R^m$ zwei K -Ableitungskegel einer und derselben Funktion sind, auch deren Durchschnitt $D_1 \cap D_2$ ein sol-

cher Kegel ist. Im allgemeinen ist jedoch ihre Vereinigung $D_1 \cup D_2$ keine K -Ableitungsmenge (und ebenso *convcone* ($D_1 \cup D_2$) kein K -Ableitungskegel) mehr, wie Beispiel 3.1 zeigen wird. Auch kann man nicht davon ausgehen, daß in jedem Fall ein maximaler derivierter Kegel existiert, also ein K -Ableitungskegel, der alle anderen K -Ableitungskegel umfaßt.

Die Frage nach der Existenz von Ableitungskegeln kann leicht beantwortet werden: Grundsätzlich ist die Menge $\{0^m\}$ ein K -Ableitungskegel für eine Funktion $f : X \rightarrow R^m$ im Punkt $x_0 \in X$, wie der Ordnungskegel K auch immer beschaffen ist. Mit diesem trivialen Kegel verliert die notwendige Optimalitätsbedingung von Theorem 2.2 allerdings jegliche Aussagekraft. Einen Ableitungskegel mit von Null verschiedenen Elementen findet man durch folgende Aussage.

Lemma 3.1 *Der (konvexe) Kegel $K \subseteq R^m$ ist stets ein K -Ableitungskegel für eine beliebige Funktion $f : X \rightarrow R^m$ im Punkt $x_0 \in X$.*

Beweis. Es sei $\{d^1, d^2, \dots, d^{m+1}\}$ ein $(m+1)$ -Tupel von Punkten aus K . Wir setzen

$$\omega(t) := x_0 \quad \forall t \in R_+^{m+1}$$

und

$$\varrho(t) := 0 \quad \forall t \in R_+^{m+1}.$$

Dann gilt

$$f(\omega(t)) - f(x_0) - \sum_{i=1}^{m+1} t_i d^i - \|t\| \varrho(t) = - \sum_{i=1}^{m+1} t_i d^i \in -K \quad \forall t \in R_+^{m+1}.$$

■

Mit Hilfe des Ordnungskegels K läßt sich ein bereits gefundener derivierter Kegel vergrößern.

Lemma 3.2 *Sei $D \subseteq R^m$ ein K -Ableitungskegel für eine Funktion $f : X \rightarrow R^m$ im Punkt $x_0 \in X$. Dann ist auch die Menge $D + K$ ein K -Ableitungskegel für f in x_0 .*

Beweis. Es sei $\{\bar{d}^1, \bar{d}^2, \dots, \bar{d}^{m+1}\}$ ein $(m+1)$ -Tupel von Punkten aus $D + K$. Dann gibt es Punkte $d^i \in D$ und $k^i \in K$ ($i = 1, \dots, m+1$) mit

$$\bar{d}^i = d^i + k^i \quad \forall (i = 1, \dots, m+1).$$

Für das $(m + 1)$ -Tupel $\{d^1, d^2, \dots, d^{m+1}\} \subset D$ gibt es Größen r, ω und ϱ mit Eigenschaften gemäß Definition 2.5. Dann gilt aber auch

$$\begin{aligned} & f(\omega(t)) - f(x_0) - \sum_{i=1}^{m+1} t_i \bar{d}^i - \|t\| \varrho(t) \\ &= - \sum_{i=1}^{m+1} t_i k^i + \left[f(\omega(t)) - f(x_0) - \sum_{i=1}^{m+1} t_i d^i - \|t\| \varrho(t) \right] \\ &\in - \sum_{i=1}^{m+1} t_i k^i - K \\ &\subseteq -K \quad \forall t \in B_+^{m+1}(r). \end{aligned}$$

■

Im abschließenden Lemma wird eine Grenze für die Größe von nichttrivialen Ableitungskegeln gegeben. Enthält eine Ableitungsmenge nämlich eine vollständige Gerade in ihrem Inneren, so ist der gesamte Raum ein Ableitungskegel. Oder anders ausgedrückt: Falls sich zeigen läßt, daß nicht der ganze Raum ein Ableitungskegel für die gegebene Funktion sein kann, so darf keine Ableitungsmenge dieser Funktion eine Gerade im Inneren enthalten.

Wir werden diese Aussage später verwenden, um für gewisse Ableitungsmengen nachzuweisen, daß eine weitere Vergrößerung der Menge nicht möglich ist, weil sonst der oben beschriebene Fall eintreten würde.

Lemma 3.3 *Enthält eine K -Ableitungsmenge $D \subseteq R^m$ einer Funktion $f : X \rightarrow R^m$ im Punkt $x_0 \in X$ ein Element d mit $d \in \text{int } D$ und $-d \in D$, so ist der gesamte Raum R^m K -Ableitungskegel für f im Punkt x_0 .*

Beweis. Nach Lemma 2.1 ist $\text{convcone}(D)$ ein K -Ableitungskegel für f im Punkt x_0 . Wegen $d \in \text{int } D$ gibt es eine Nullumgebung $V \in R^m$ mit

$$V = (d + V) + (-d) \in D + D \subseteq \text{convcone}(D).$$

Daraus folgt $\text{convcone}(D) = R^m$. ■

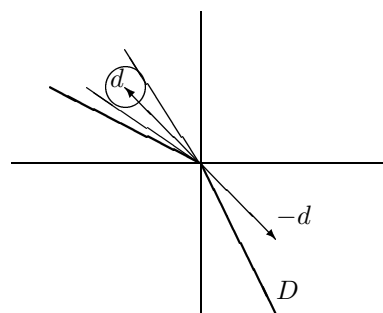


Abbildung 3.1: „überstumpfer“ Ableitungskegel

3.2 Vergleich mit speziellen Ableitungsbegriffen

3.2.1 Ableitungen in Form von Funktionalen

Wir wollen im folgenden untersuchen, ob man für eine Funktion spezielle K -Ableitungsmengen angeben kann, wenn von dieser Funktion gewisse Differenzierbarkeitseigenschaften bekannt sind. In der Tat lassen sich aus der Existenz einiger Ableitungstypen Schlußfolgerungen auf die zugehörigen derivierten Mengen ziehen.

Wir beginnen mit der Untersuchung von Funktionen, für die eine Richtungsableitung existiert.

Satz 3.4 Sei X eine nichtleere Teilmenge eines linearen, topologischen Raumes \mathcal{X} . Die Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$ besitze in $x_0 \in X$ für ein $x \in \mathcal{X}$ die (einseitige) Richtungsableitung

$$f'_+(x_0, x) := \lim_{\tau \downarrow 0} \frac{f(x_0 + \tau x) - f(x_0)}{\tau}.$$

Dann ist die (eielementige) Menge $\{f'_+(x_0, x)\}$ eine K -Ableitungsmenge für f in x_0 und

$$\text{cone}(f'_+(x_0, x)) + K \tag{3.1}$$

ein K -Ableitungskegel für f in x_0 .

Bemerkung 3.1 Wegen der positiven Homogenität der Richtungsableitung läßt sich der konische Abschluß in (3.1) ausdrücken als

$$\text{cone}(f'_+(x_0, x)) = \{f'_+(x_0, \mu x) \mid \mu \geq 0\}.$$

Beweis. Zu zeigen ist, daß das n -Tupel $\{d, d, \dots, d\}$ mit $d := f'_+(x_0, x)$ die Anforderungen von Definition 2.4 erfüllt.

Wir setzen

$$\omega(t) := x_0 + \left(\sum_{i=1}^n t_i \right) x \quad \forall t \in \mathbb{R}_+^n$$

und

$$\varrho(t) := \begin{cases} \frac{\sum_{i=1}^n t_i}{\|t\|} \left(\frac{f(x_0 + \sum_{i=1}^n t_i x) - f(x_0)}{\sum_{i=1}^n t_i} - d \right), & \text{wenn } t \neq 0 \\ 0^m, & \text{wenn } t = 0 \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}_+^n.$$

Offenbar sind ω und ϱ im Punkt $t = 0$ stetig und es gilt

$$f(\omega(t)) - f(x_0) - \sum_{i=1}^n t_i d - \|t\| \varrho(t) = 0^m \quad \forall t \in \mathbb{R}_+^n.$$

Somit sind die Kegel $\text{cone}(f'_+(x_0, x))$ (nach Lemma 2.1) und $\text{cone}(f'_+(x_0, x)) + K$ (nach Lemma 3.2) K -Ableitungskegel für f in x_0 . ■

Beispiel 3.1 In diesem Beispiel werden aus zwei Richtungsableitungen zwei Ableitungskegel erzeugt, von denen keiner den anderen enthält. Wir sehen, daß ihre Vereinigung keine Ableitungsmenge mehr sein kann.

$X = \mathbb{R}^2$, $x_0 = (0, 0)$; $m_1 = 1$, $m_2 = 1$, $m_3 = 0$; $K = \mathbb{R}_+^2$;

$$f_1(x) := \begin{cases} x_1^2, & \text{wenn } x_1 \leq 0; \\ -x_1, & \text{wenn } x_1 > 0; \end{cases}$$

$$f_2(x) := x_1 + x_2^2$$

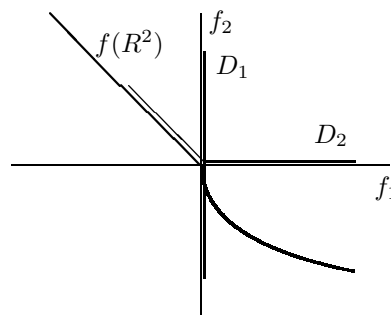


Abbildung 3.2: zu Beispiel 3.1

Es ergeben sich als Richtungsableitungen

$$f'_+((0, 0), (-1, 0)) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$f'_+((0, 0), (1, 0)) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Mithin sind nach Satz 3.4 die Kegel

$$D_1 = \left\{ \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \mid \mu \geq 0 \right\} + \mathbb{R}_+^2$$

und

$$D_2 = \left\{ \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \mu \geq 0 \right\} + \mathbb{R}_+^2,$$

beide für sich genommen, K -Ableitungskegel für f in x_0 . Ihre Vereinigung

$$D_1 \cup D_2 = \left[\left\{ \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \mid \mu \geq 0 \right\} \cup \left\{ \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \mu \geq 0 \right\} \right] + \mathbb{R}_+^2$$

ist allerdings keine K -Ableitungsmenge für f in x_0 . Wäre dies der Fall, so wäre wegen Lemma 3.3 der ganze Raum \mathbb{R}^2 ein Ableitungskegel. Die Annahme, daß beispielsweise der Punkt $(-1, -1)$ Element eines Ableitungskegels für die gegebene Funktion ist, führt zu einem Widerspruch.

Letztes Beispiel zeigt, daß, obwohl die Strahlen $\{\mu(0, -1)\}$ und $\{\mu(-1, 1)\}$ ($\mu \geq 0$) Bilder von Richtungsableitungen und somit derivierte Kegel sind, ihre Vereinigung keine Ableitungsmenge sein muß. Richtungsableitungen, die für unterschiedliche Richtungen berechnet wurden, „passen“ also unter Umständen nicht in ein und dieselbe derivierte Menge.

Damit unterschiedliche Richtungsableitungen in einer gemeinsamen derivierten Menge liegen können, sind zusätzliche Voraussetzungen daran zu stellen, wie der Wert Ableitung von der Richtung abhängt. Das oben beschriebene Phänomen der Unverträglichkeit der einseitigen Richtungsableitungen tritt beispielsweise bei Gâteaux-differenzierbaren Funktionen nicht mehr auf. In diesem Fall ist die Menge $\{f'(x_0, x) \mid x \in \mathcal{X}\}$ aller Punkte, die sich als Bild der Gâteaux-Ableitung ergeben, insgesamt ein derivierter Kegel, wie Satz 3.5 zeigen wird. Dies liegt daran, daß bei der Gâteaux-Ableitung eine lineare Abhängigkeit von der Richtung besteht.

Beispiel 3.2 *Derivierte Kegel können auch existieren, wenn keine Richtungsableitungen vorhanden sind.*

$X = \mathbb{R}^2$, $x_0 = (0, 0)$; $m_1 = 1$, $m_2 = 1$, $m_3 = 0$; $K = \mathbb{R}_+^2$;

$$f_1(x) := x_1;$$

$$f_2(x) := \begin{cases} x_1 \sin\left(\frac{1}{x_1}\right) + x_2^2, & \text{wenn } x_1 \neq 0; \\ x_2^2, & \text{wenn } x_1 = 0. \end{cases}$$

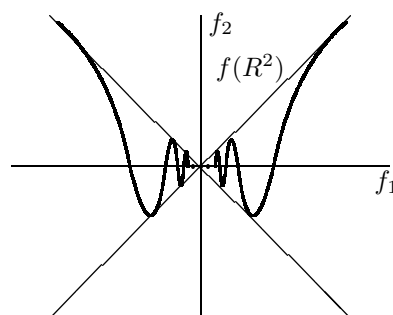


Abbildung 3.3: zu Beispiel 3.2

Für alle Richtungen (x_1, x_2) mit $x_1 \neq 0$ existiert im Punkt $(0, 0)$ keine Richtungsableitung. Es läßt sich lediglich

$$f'_+((0, 0), (0, x_2)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \forall x_2 \in \mathbb{R}$$

berechnen. Mit Hilfe von Satz 3.4 erhält man also nur \mathbb{R}_+^2 als K -Ableitungskegel für f in x_0 .

Hingegen ist die Menge $\{\mu(-1, 1) \mid \mu \geq 0\}$ eine K -Ableitungsmenge für diese Funktion und somit

$$\left\{ \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \mu \geq 0 \right\} + \mathbb{R}_+^2$$

ein K -Ableitungskegel für f in x_0 . Dieser Kegel enthält Elemente, die nicht in \mathbb{R}_+^2 enthalten sind.

Satz 3.5 *Sei X eine nichtleere Teilmenge eines linearen, topologischen Raumes \mathcal{X} . Die Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$ besitze in $x_0 \in X$ die Gâteaux-Ableitung*

$$f'(x_0, x) := \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \tau x) - f(x_0)}{\tau} \quad (x \in \mathcal{X}).$$

Dann ist die Menge

$$f'(x_0, \mathcal{X}) + K \tag{3.2}$$

ein K -Ableitungskegel für f in x_0 .

Beweis. Wir zeigen zunächst, daß $f'(x_0, \mathcal{X})$ ein K -Ableitungskegel für f in x_0 ist. Dazu betrachten wir ein n -Tupel $\{d^1, d^2, \dots, d^n\} \subset f'(x_0, \mathcal{X}) + K$ mit

$$d^i = f'(x_0, x^i) \quad (i = 1, \dots, n).$$

Wir setzen

$$\omega(t) := x_0 + \sum_{i=1}^n t_i x^i \quad \forall t \in R_+^n$$

und

$$\varrho(t) := \begin{cases} \frac{f(x_0 + \sum_{i=1}^n t_i x^i) - f(x_0)}{\|t\|} - \frac{\sum_{i=1}^n t_i d^i}{\|t\|}, & \text{wenn } t \neq 0 \\ 0^m, & \text{wenn } t = 0 \end{cases} \quad \forall t \in R_+^n.$$

Die Funktion ω ist im Punkt $t = 0$ stetig. Dasselbe gilt für ϱ : Wegen der Linearität von $f'(x_0, \cdot)$ ist nämlich

$$\frac{1}{\|t\|} \sum_{i=1}^n t_i d^i = f' \left(x_0, \frac{1}{\|t\|} \sum_{i=1}^n t_i x^i \right) \quad \forall t \neq 0.$$

Also folgt

$$\lim_{\tau \downarrow 0} \frac{f(x_0 + \tau \frac{1}{\|t\|} \sum_{i=1}^n t_i x^i) - f(x_0)}{\tau} - \frac{1}{\|t\|} \sum_{i=1}^n t_i d^i = 0^m \quad \text{gleichmäßig für alle } t \in R_+^n \setminus \{0\}.$$

Die Gleichmäßigkeit der Konvergenz folgt aus der Kompaktheit der Menge

$$\left\{ \frac{1}{\|t\|} \sum_{i=1}^n t_i d^i \mid t \in R_+^n \setminus \{0\} \right\} \in R^m.$$

Somit gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein (von t unabhängiges) $\tau_0 > 0$, so daß für alle $\tau \in (0, \tau_0]$ gilt

$$\left\| \frac{f(x_0 + \tau \frac{1}{\|t\|} \sum_{i=1}^n t_i x^i) - f(x_0)}{\tau} - \frac{1}{\|t\|} \sum_{i=1}^n t_i d^i \right\| < \varepsilon \quad \forall t \in R_+^n \setminus \{0\}.$$

Also folgt für alle $t \in R_+^n$ mit $\|t\| \in (0, \tau_0]$

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{f(x_0 + \sum_{i=1}^n t_i x^i) - f(x_0)}{\|t\|} - \frac{1}{\|t\|} \sum_{i=1}^n t_i d^i \right\| \\ &= \left\| \frac{f(x_0 + \|t\| \frac{1}{\|t\|} \sum_{i=1}^n t_i x^i) - f(x_0)}{\|t\|} - \frac{1}{\|t\|} \sum_{i=1}^n t_i d^i \right\| < \varepsilon \quad \forall t \in B_+^n(\tau_0) \setminus \{0\}, \end{aligned}$$

wodurch die Stetigkeit von ϱ in $t = 0$ gezeigt ist. Aufgrund der Konstruktion haben wir

$$f(\omega(t)) - f(x_0) - \sum_{i=1}^n t_i d^i - \|t\| \varrho(t) = 0^m \quad \forall t \in R_+^n.$$

Mit $f'(x_0, \mathcal{X})$ ist nach Lemma 3.2 auch $f'(x_0, \mathcal{X}) + K$ ein K -Ableitungskegel für f in x_0 . ■

Korollar 3.6 Für Gâteaux-differenzierbare Funktionen f ist der Kegel (3.2) der größte K -Ableitungskegel in x_0 , das heißt, jeder K -Ableitungskegel für f in x_0 ist in (3.2) enthalten.

Beweis. Im Fall $f'(x_0, \mathcal{X}) + K = R^m$ ist die Aussage trivial. Anderenfalls enthält der Dualkegel von $f'(x_0, \mathcal{X}) + K$ von Null verschiedene Punkte. Es existiert also ein $y \in [f'(x_0, \mathcal{X}) + K]^*$ mit $y \neq 0^m$.

Angenommen, es gäbe einen K -Ableitungskegel für f an der Stelle x_0 , der den Kegel $f'(x_0, \mathcal{X}) + K$ umfaßt und darüberhinaus ein Element $d \notin f'(x_0, \mathcal{X}) + K$ enthält. Dann gilt $\langle y, d \rangle < 0$.

Für das n -Tupel $\{d, d, \dots, d\}$ existieren Größen $r > 0$, $\omega : B_+^n(r) \rightarrow X$ und $\varrho : B_+^n(r) \rightarrow R^m$, die die in Definition 2.5 genannten Eigenschaften besitzen.

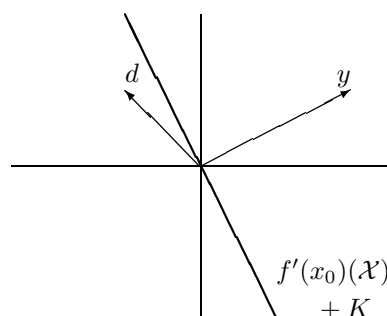


Abbildung 3.4: $d \notin f'(x_0, \mathcal{X}) + K$

Insbesondere gilt für hinreichend kleine $t \in R_+^n$

$$f(\omega(t)) - f(x_0) \in \sum_{i=1}^n t_i d + \bar{o}(\|t\|) - K,$$

wobei $\frac{\bar{o}(\|t\|)}{\|t\|} \rightarrow 0^m$, wenn $t \downarrow 0$. Daraus folgt

$$\langle y, f(\omega(t)) - f(x_0) \rangle \leq \sum_{i=1}^n t_i \langle y, d \rangle + o(\|t\|),$$

wobei $\frac{o(\|t\|)}{\|t\|} \rightarrow 0$, wenn $t \downarrow 0$. Also gilt für $t \neq 0$

$$\frac{\langle y, f(\omega(t)) - f(x_0) \rangle}{\|t\|} \leq \frac{\sum_{i=1}^n t_i}{\|t\|} \langle y, d \rangle + \frac{o(\|t\|)}{\|t\|}.$$

Weil $\frac{\sum_{i=1}^n t_i}{\|t\|}$ für $t \in R_+^n \setminus \{0\}$ beschränkt ist und $\langle y, d \rangle < 0$ gilt, gibt es eine Konstante $c > 0$ mit $\frac{\sum_{i=1}^n t_i}{\|t\|} \langle y, d \rangle \leq -c \forall t \in R_+^n \setminus \{0\}$. Es folgt

$$\frac{\langle y, f(\omega(t)) - f(x_0) \rangle}{\|t\|} \leq -c + \frac{o(\|t\|)}{\|t\|}.$$

Also finden wir eine Zahl $r_1 > 0$, so daß

$$\frac{\langle y, f(\omega(t)) - f(x_0) \rangle}{\|t\|} \leq -\frac{2}{3}c \quad \forall t \in B_+^n(r_1) \setminus \{0\}. \quad (3.3)$$

Wegen der Gâteaux-Differenzierbarkeit von f gilt aber andererseits

$$f(\omega(t)) - f(x_0) = f'(x_0, \omega(t) - x_0) + \bar{o}(\|t\|)$$

oder, unter Beachtung von $\langle y, f'(x_0, \mathcal{X}) \rangle \geq 0$,

$$\langle y, f(\omega(t)) - f(x_0) \rangle \geq o(\|t\|).$$

Das heißt, es gibt eine Zahl $r_2 > 0$, so daß

$$\frac{\langle y, f(\omega(t)) - f(x_0) \rangle}{\|t\|} \geq -\frac{1}{3}c \quad \forall t \in B_+^n(r_2) \setminus \{0\}. \quad (3.4)$$

Dies ist ein Widerspruch zu Aussage (3.3). Es gibt also keinen K -Ableitungskegel für f an der Stelle x_0 , der ein Element enthält, das nicht in $f'(x_0, \mathcal{X}) + K$ liegt. ■

Bemerkung 3.2 In [5] befindet sich eine weitere Aussage über einen Ableitungstyp, der zur Konstruktion von Ableitungskegeln verwendet werden kann. Das entsprechende Resultat ist in der vorliegenden Arbeit als Theorem 2.3 aufgeführt. Es werden hierbei (rechtsseitige obere) Dini-Ableitungen betrachtet. Die Abhängigkeit der Ableitung von der Richtung wird dadurch realisiert, daß die Dini-Ableitungen von oben durch eine konvexe Funktion der Richtung beschränkt sein müssen.

3.2.2 Geometrisch konstruierte Ableitungsmengen

Das lokale Verhalten einer Funktion $f : X \rightarrow R^m$ ($X \subseteq \mathcal{X}$) läßt sich außer durch Ableitungsfunktionale auch durch gewisse Tangentialmengen beschreiben, die am Graphen der Funktion im Produktraum $\mathcal{X} \times R^m$ konstruiert werden. Bei der Konstruktion solcher Tangentialmengen stützte man sich zunächst auf die geometrische Vorstellung von der Tangente, die an einen Punkt der Menge, die den Graphen der Funktion repräsentiert, angelegt wird. Wir wollen untersuchen, welche Zusammenhänge zwischen derivierten Mengen und derartigen Tangentialmengen oder auch -kegeln, bestehen.

Der wohl bekannteste Tangentialkegel ist der von Bouligand um 1930 eingeführte Kontingentskegel. Wir benutzen die folgende Definition aus [41].

Definition 3.1 Der Kontingentskegel $K_C(x_0)$ an eine nichtleere Teilmenge C eines linearen topologischen Raums \mathcal{X} im Punkt $x_0 \in C$ ist definiert durch

$$K_C(x_0) := \bigcap_{\substack{V \in \mathcal{N}(0) \\ \tau_0 > 0}} \bigcup_{\tau \in (0, \tau_0]} \left[\frac{C - x_0}{\tau} + V \right]. \quad (3.5)$$

(Hierbei beschreibt $\mathcal{N}(0)$ eine Umgebungsbasis des Punktes $0 \in \mathcal{X}$.)

Vertrauter ist die Charakterisierung der Elemente des Kontingentkegels durch Folgen. Die Äquivalenz beider Definitionen in endlichdimensionalen Räumen liefert die folgende Aussage (vgl. [42]):

Lemma 3.7 *Ein Punkt $x \in R^n$ ist genau dann ein Element des Kontingentkegels $K_C(x_0)$ an die Menge $C \subseteq R^n$ im Punkt $x_0 \in C$, wenn es Folgen $\{\tau^k\} \subset R_+ \setminus \{0\}$ und $\{x^k\} \subset R^n$ ($k = 1, 2, \dots$) gibt mit $\tau^k \downarrow 0$ und $x^k \rightarrow x$ ($k \rightarrow \infty$), für die gilt*

$$x_0 + \tau^k x^k \in C \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Um Aussagen über Ableitungseigenschaften von Funktionen $f : X \rightarrow R^m$ ($X \subseteq \mathcal{X}$) in einem Punkt $x_0 \in X$ treffen zu können, betrachtet man üblicherweise den Tangentialkegel an den Graphen der Funktion

$$\text{graph } f := \{(x, f(x)) \in \mathcal{X} \times R^m \mid x \in X\} \quad (3.6)$$

in Punkte $(x_0, f(x_0)) \in \text{graph } f$. Nach dieser Vorgehensweise ist der Tangentialkegel für eine Funktion eine Teilmenge des Raumes $\mathcal{X} \times R^m$, in dem der Graph von f liegt. Derivierte Mengen gehören hingegen dem Bildraum R^m der Funktion f an. Um Vergleiche anstellen zu können, sollten wir uns daher auf den Bildraumanteil des Tangentialkegels konzentrieren.

Hierzu vereinbaren wir folgende Schreibweise für die Projektion des Kontingentkegels in den Bildraum R^m der Funktion f :

$$PK_{\text{graph } f}(x_0, f(x_0)) := \{y \in R^m \mid \exists x \in X : (x, y) \in K_{\text{graph } f}(x_0, f(x_0))\} \quad (3.7)$$

Bekanntlich ist in vielen Fällen der Bouligandsche Kontingentkegel $K_{\text{graph } f}(x_0, f(x_0))$ kein konvexer Kegel (vgl. etwa [8]). Dies trifft dann natürlich auch auf den Bildraumanteil $PK_{\text{graph } f}(x_0, f(x_0))$ dieses Kegels zu.

Ein K -Ableitungskegel ist nach Definition 2.5 jedoch stets konvex. Wir können daher nicht erwarten, daß ohne weitere Voraussetzungen der gesamte Kontingentkegel ein Ableitungskegel ist. Beispiel 3.3 bestätigt dies. Dieses Beispiel liefert uns allerdings eine Vermutung, die in Satz 3.8 festgehalten ist.

Beispiel 3.3 Der gesamte Kegel $PK_{\text{graph } f}(x_0, f(x_0))$ ist kein Ableitungskegel, wohl aber gewisse konvexe Teilkegel davon.

$X = \mathbb{R}^2$, $x_0 = (0, 0)$; $m_1 = 1$, $m_2 = 1$, $m_3 = 0$; $K = \mathbb{R}_+^2$;

$$f_1(x) := \begin{cases} x_1^2, & \text{wenn } x_1 \leq 0; \\ -\sqrt{x_1}, & \text{wenn } x_1 > 0; \end{cases}$$

$$f_2(x) := x_1 + x_2^2$$

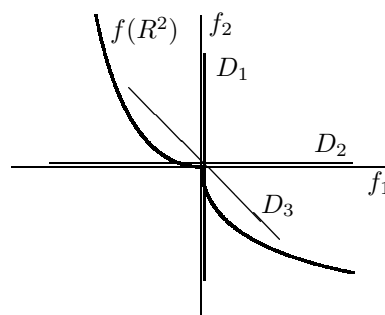


Abbildung 3.5: zu Beispiel 3.3

Man berechnet als Kontingentskegel

$$PK_{\text{graph } f}(x_0, f(x_0)) = \left[\left\{ \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \mid \mu \geq 0 \right\} \cup \left\{ \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid \mu \geq 0 \right\} \right] + \mathbb{R}_+^2.$$

Dieser ist allerdings keine K -Ableitungsmenge für f in x_0 . Ansonsten wäre wegen Lemma 3.3 der ganze Raum \mathbb{R}^2 ein Ableitungskegel. Die Annahme, daß beispielsweise der Punkt $(-1, -1)$ Element eines Ableitungskegels für die gegebene Funktion wäre, führt zu einem Widerspruch. Hingegen erweisen sich die (konvexen) Teilkegel

$$D_1 := \left\{ \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \mu \in \mathbb{R} \right\} + \mathbb{R}_+^2,$$

$$D_2 := \left\{ \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid \mu \in \mathbb{R} \right\} + \mathbb{R}_+^2,$$

$$D_3 := \left\{ \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mid \mu \in \mathbb{R} \right\} + \mathbb{R}_+^2$$

von $PK_{\text{graph } f}(x_0, f(x_0))$ sämtlich als K -Ableitungskegel für f in x_0 . Wie der folgende Satz zeigt, ist dieses Phänomen von allgemeiner Natur.

Satz 3.8 Sei $G \subseteq K_{\text{graph } f}(x_0, f(x_0))$ ein konvexer Teilkegel des Kontingentskegels an den Graphen einer gegebenen Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$ im Punkt $(x_0, f(x_0))$.

Dann ist die Bildraumprojektion von G

$$D := \{y \in \mathbb{R}^m \mid \exists x \in X : (x, y) \in G\}$$

ein K -Ableitungskegel für f in x_0 .

Beweis. Offenbar ist D als Projektion eines konvexen Kegels wiederum ein konvexer Kegel. Wir betrachten ein n -Tupel $\{d^1, d^2, \dots, d^n\} \subset D$. Dann gibt es Punkte $x^1, x^2, \dots, x^n \in X$, so daß

$$\{(x^1, d^1), (x^2, d^2), \dots, (x^n, d^n)\} \subset G.$$

Wegen der Konvexität von G ist dann auch

$$\frac{1}{\|t\|} \sum_{i=1}^n t_i(x^i, d^i) \in G \quad t \in R_+^n \setminus \{0\}.$$

Weil G eine Teilmenge von

$$K_{\text{graph } f}(x_0, f(x_0)) = \bigcap_{\substack{(U,V) \in \mathcal{N}_{\mathcal{X}}(0) \times \mathcal{N}_{R^m}(0) \\ \tau_0 > 0}} \bigcup_{\tau \in (0, \tau_0]} \left[\frac{\text{graph } f - (x_0, f(x_0))}{\tau} + U \times V \right]$$

ist, existiert zu allen $\tau_0 > 0$ sowie zu allen Nullumgebungen $U \subset \mathcal{X}$, $V \subset R^m$ ein $\tau \in (0, \tau_0]$ mit

$$\tau \frac{1}{\|t\|} \sum_{i=1}^n t_i(x^i, d^i) \in \text{graph } f - (x_0, f(x_0)) + \tau(U \times V).$$

Das heißt, für zu jedem τ_0 , U und V gibt es ein $(\tilde{x}, f(\tilde{x})) \in \text{graph } f$ mit

$$\begin{aligned} \tilde{x} - x_0 &\in \tau \left(\frac{1}{\|t\|} \sum_{i=1}^n t_i x^i - U \right) \subseteq \tau_0 \left(\frac{1}{\|t\|} \sum_{i=1}^n t_i x^i - U \right), \\ f(\tilde{x}) - f(x_0) &\in \tau \left(\frac{1}{\|t\|} \sum_{i=1}^n t_i d^i - V \right) \subseteq \tau_0 \left(\frac{1}{\|t\|} \sum_{i=1}^n t_i d^i - V \right). \end{aligned}$$

Speziell mit $\tau_0 = \|t\|$ und $V = B^m(\|t\|)$ folgt für jedes $t \in R_+^n \setminus \{0\}$ die Existenz eines $x_t \in X$ mit

$$\begin{aligned} x_t - x_0 &\in \sum_{i=1}^n t_i x^i - \|t\|U, \\ \left\| f(x_t) - f(x_0) - \sum_{i=1}^n t_i d^i \right\| &\leq \|t\|^2. \end{aligned}$$

Setzen wir

$$\omega(t) := \begin{cases} x_t, & \text{wenn } t \neq 0 \\ x_0, & \text{wenn } t = 0 \end{cases} \quad \forall t \in R_+^n$$

und

$$\varrho(t) := \begin{cases} \frac{1}{\|t\|} (f(x_t) - f(x_0) - \sum_{i=1}^n t_i d^i), & \text{wenn } t \neq 0 \\ 0^m, & \text{wenn } t = 0 \end{cases} \quad \forall t \in R_+^n,$$

so sind ω und ϱ im Punkt $t = 0$ stetig und es gilt

$$f(\omega(t)) - f(x_0) - \sum_{i=1}^n t_i d^i - \|t\|\varrho(t) = 0^m \quad \forall t \in R_+^n.$$

■

Um der oben festgestellten und oft auftretenden Nichtkonvexität des Kontingentkegels zu entgehen, wurde in den letzten vierzig Jahren viel Anstrengung in die Suche nach konvexen Ersatzkegeln des Kontingentkegels investiert. Dabei stand natürlich das Bestreben im Vordergrund, möglichst viele der Tangentialeigenschaften des Bouligandschen Kegels zu bewahren. Viele dieser neuen Konstruktionen sind konvexe Teilkegel des Kontingentkegels, wie etwa der Tangentenkegel von Clarke (1975).

Die unten angegebene Definition des Clarkeschen Kegels stammt aus [41]. Clarkes eigentliche Formulierung, die zu dieser äquivalent ist, findet man in [8] und [9].

Definition 3.2 *Der Clarkesche Tangentenkegel $T_C(x_0)$ an eine nichtleere Teilmenge C eines linearen topologischen Raums \mathcal{X} im Punkt $x_0 \in C$ ist definiert durch*

$$T_C(x_0) := \bigcap_{V \in \mathcal{N}(0)} \bigcup_{\substack{U \in \mathcal{N}(x_0) \\ \tau_0 > 0}} \bigcap_{\substack{x' \in C \cap U \\ \tau \in (0, \tau_0]}} \left[\frac{C - x'}{\tau} + V \right]. \quad (3.8)$$

(Hierbei beschreibt $\mathcal{N}(0)$ eine Umgebungsbasis des Punktes $0 \in \mathcal{X}$ und $\mathcal{N}(x_0)$ eine Umgebungsbasis des Punktes $x_0 \in \mathcal{X}$.)

Auch diese Definition kann mit Hilfe von Folgen interpretiert werden (vgl. [42]).

Lemma 3.9 *Ein Punkt $x \in R^n$ ist genau dann ein Element des Clarkeschen Tangentenkegels $T_C(x_0)$ an die Menge $C \subseteq R^n$ im Punkt $x_0 \in C$, wenn es für alle Folgen $\{\tau^k\} \subset R_+ \setminus \{0\}$ und $\{x'^k\} \subset C$ ($k = 1, 2, \dots$) mit $\tau^k \downarrow 0$ und $x'^k \rightarrow x_0$ ($k \rightarrow \infty$) stets Punkte $x^k \in R^n$ mit $x^k \rightarrow x$ und*

$$x'^k + \tau^k x^k \in C \quad (k = 1, 2, \dots)$$

gibt.

Auch beim Clarkeschen Tangentenkegel an den Graphen einer Funktion $f : X \rightarrow R^m$ ist es sinnvoll, die Projektion in den Bildraum R^m der Funktion f zu betrachten.

$$PT_{\text{graph } f}(x_0, f(x_0)) := \{y \in R^m \mid \exists x \in X : (x, y) \in T_{\text{graph } f}(x_0, f(x_0))\} \quad (3.9)$$

Dann läßt sich zeigen:

Satz 3.10 *Die Bildraumprojektion $PT_{\text{graph } f}(x_0, f(x_0))$ des Clarkeschen Tangentenkegels an den Graphen einer gegebenen Funktion $f : X \rightarrow R^m$ im Punkt $(x_0, f(x_0))$ ist ein K -Ableitungskegel für f in x_0 .*

Beweis. Dies folgt sofort aus Satz 3.8, wenn man beachtet, daß $T_{\text{graph } f}(x_0, f(x_0))$ ein konvexer Teilkegel von $K_{\text{graph } f}(x_0, f(x_0))$ ist. ■

Bemerkung 3.3 *Ein Analogon zu Satz 3.10 gilt für jeden Tangentialkegel, der ein konvexer Teilkegel des Kontingentkegels ist.*

Da es unter den konvexen Teilkegeln eines nichtkonvexen Kegels für gewöhnlich keinen größten gibt, bestätigt sich auch hier, daß zu einer gegebenen Funktion im allgemeinen kein größter Ableitungskegel existiert. Insbesondere ist die Bildraumprojektion des Clarkeschen Kegels kein maximaler Ableitungskegel, wie Beispiel 3.4 zeigt. Eine Aussage in Form von Korollar 3.6 gilt hier also nicht.

Beispiel 3.4 *Wir betrachten noch einmal die Daten von Beispiel 3.3. In diesem Beispiel ist der Clarkesche Tangentenkegel ein echter Teilkegel des Kontingentkegels. Es gibt derivierte Kegel, die sowohl echte Teilkegel des Kontingentkegels als auch echte Oberkegel des Clarkeschen Tangentenkegels sind.*

Man berechnet als Clarkeschen Tangentenkegel

$$PT_{\text{graph } f}(x_0, f(x_0)) = R_+^2.$$

Als K -Ableitungskegel hatten wir in Beispiel 3.3 den Kegel

$$D_3 = \left\{ \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mid \mu \in R \right\} + R_+^2$$

bestimmt. Es gilt

$$PK_{\text{graph } f}(x_0, f(x_0)) \supsetneq D_3 \supsetneq PT_{\text{graph } f}(x_0, f(x_0)).$$