Kapitel 5

Regularitätsbedingungen

5.1 Eine notwendige und hinreichende Regularitätsbedingung

Beim Studium Lagrangescher Multiplikatorenregeln in ihrer Grundform, bestehend aus Stationaritäts– und Komplementaritätsbedingung, — betrachten wir etwa Theorem 4.2 — bemerkt man, daß es zunächst keine Aussage gibt, die sichert, daß in der Lagrange–Funktion

$$L(\lambda, x) = \langle \lambda_1, f_1(x) \rangle + \langle \lambda_2, f_2(x) \rangle + \langle \lambda_3, f_3(x) \rangle \tag{5.1}$$

der zur Zielfunktion gehörige Multiplikator λ_1 nicht verschwindet. Falls dieser gleich Null wäre, bliebe die Aussage der Multiplikatorenregel zwar theoretisch richtig; praktisch würde sie allerdings kaum noch anwendbar sein, weil die Lagrange–Funktion keine Beziehung mehr zur Zielfunktion besitzt. Die entstehende notwendige Optimalitätsbedingung wäre somit viel zu schwach, um die Menge der effizienten Punkte hinreichend gründlich zu beschreiben.

Eine Bedingung, mit deren Hilfe das Verschwinden von λ_1 verhindert werden kann, heißt oft *Regularitätsbedingung*. Für die in Kapitel 1 vorgestellte klassische Lagrange–Regel ist beispielsweise vorauszusetzen, daß die Ableitungen der Funktionen ψ_i $(i = 1, \ldots, k)$, die in (1.20) auftauchen, voneinander linear unabhänig sind, um in (1.21) den Multiplikator vor der Zielfunktion ϕ von Null verschieden (in diesem Fall gleich Eins) wählen zu können.

Für die Brecknersche Multiplikatorenregel (Theorem 2.2) existierte bislang keine solche Regularitätsbedingung. Für den von Hestenes eingeführten Begriff derivierter Mengen (vgl. Definition 2.1) und die damit in [19] hergeleitete Multiplikatorenregel wird allerdings eine derartige Bedingung angegeben (vgl. [19], Corollary im Anschluß an Theorem 10.1).

Basierend auf der Hestenesschen Bedingung habe ich eine Regularitätsaussage für die Multiplikatorenregel von Breckner aufgestellt.

Wir bezeichnen die Eingangsdaten der von Theorem 2.2 betrachteten Aufgabe

- als *regulär*, wenn es einen Multiplikator λ gibt, für den $\lambda_1 \neq 0^{m_1}$ gilt;
- als *irregulär*, wenn für jeden möglichen Multiplikator λ stets $\lambda_1 = 0^{m_1}$ gilt.

Es sei an die Festlegung in (2.21) erinnert. Dann gilt die folgende Aussage:

Theorem 5.1 *Es seien die Voraussetzungen von Theorem 2.2 erfüllt.*

a) Existiert ein Punkt $a \in R^{m_1}$, so daß

$$\begin{pmatrix} a \\ 0^{m_2} \\ 0^{m_3} \end{pmatrix} \notin D + K_1 \times L^* \times K_3, \tag{5.2}$$

so existiert ein Multiplikator $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ gemäß Theorem 2.2 mit $\lambda_1 \neq 0^{m_1}$.

b) Gilt hingegen für alle $a \in R^{m_1}$

$$\begin{pmatrix} a \\ 0^{m_2} \\ 0^{m_3} \end{pmatrix} \in D + K_1 \times L^* \times K_3, \tag{5.3}$$

so gilt für alle Multiplikatoren $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, die die in Theorem 2.2 genannten Eigenschaften besitzen, stets $\lambda_1 = 0^{m_1}$.

Beweis. a) Falls ein solcher Punkt existiert, so besitzt er eine Darstellung

$$(a, 0^{m_2}, 0^{m_3}) = x - \lambda$$

mit

$$\begin{aligned} x &\in D + K_1 \times L^* \times K_3, \\ -\lambda &\in -[D + K_1 \times L^* \times K_3]^* \end{aligned}$$

und $\langle \lambda, x \rangle = 0$. Es folgt $\lambda \neq 0^m$, denn sonst wäre $(a, 0^{m_2}, 0^{m_3}) = x \in D + K_1 \times L^* \times K_3$, was (5.2) widerspricht.
Wegen $D \subseteq D + K_1 \times L^* \times K_3$ erhalten wir $[D + K_1 \times L^* \times K_3]^* \subseteq D^*$, mithin gilt $\lambda \in D^*$, das heißt

$$\langle \lambda, d \rangle \geq 0 \qquad \forall d \in D.$$

Wegen $K_1 \times L^* \times K_3 \subseteq D + K_1 \times L^* \times K_3$ erhalten wir $[D + K_1 \times L^* \times K_3]^* \subseteq K_1^* \times L \times K_3^*$, mithin gilt

$$\lambda \in K_1^* \times L \times K_3^*.$$

Schließlich haben wir

$$\langle \lambda_1, a \rangle = \langle \lambda, (a, 0^{m_2}, 0^{m_3}) \rangle = \langle \lambda, x \rangle - \langle \lambda, \lambda \rangle = -\|\lambda\|^2 < 0.$$

Also muß gelten $\lambda_1 \neq 0^{m_1}$.
b) Zu beliebigem $a \in R^{m_1}$ gibt es wegen (5.3) einen Vektor $(x_1, x_2, x_3) \in K_1 \times L^* \times K_3$, so daß

$$(a, 0^{m_2}, 0^{m_3}) - (x_1, x_2, x_3) \in D.$$

Sei $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in K_1^* \times L \times K_3^* \setminus \{0^m\}$ ein Multiplikator mit den in Theorem 2.2 genannten Eigenschaften. Dann folgt:

$$\begin{aligned} \langle \lambda, (a, 0^{m_2}, 0^{m_3}) - (x_1, x_2, x_3) \rangle &\geq 0, \\ \langle \lambda_1, a \rangle &\geq \langle \lambda_1, x_1 \rangle + \langle \lambda_2, x_2 \rangle + \langle \lambda_3, x_3 \rangle, \\ \langle \lambda_1, a \rangle &\geq 0. \end{aligned}$$

Man wähle ein spezielles $a \in -int\, K_1$. Für dieses gilt obige Aussage und wegen

$$\langle \lambda_1, y \rangle \geq 0 \qquad \forall y \in K_1$$

sogar $\langle \lambda_1, a \rangle = 0$.
Wir betrachten nun die Abbildung $\langle \lambda_1, . \rangle : R^{m_1} \longrightarrow R$. Diese ist nichtnegativ auf dem Bereich K_1 und verschwindet in einem inneren Punkt dieses Bereiches, nämlich in $-a \in int\, K_1$. Eine lineare Funktion mit einem solchen Verhalten ist zwangsläufig identisch Null. Also folgt $\lambda_1 = 0^{m_1}$. ■

Bemerkung 5.1 *Beim Beweisteil b) wird nur ausgenutzt, daß es ein spezielles $a \in -int\, K_1$ gibt, welches (5.3) erfüllt. Die Forderung, daß (5.3) für alle $a \in R^{m_1}$ gelten soll, erscheint daher unnötig*

scharf zu sein. In der Tat sind jedoch beide Bedingungen äquivalent:
Sei $\tilde{a} \in -int\, K_1$ ein Punkt, für den gilt

$$(\tilde{a}, 0^{m_2}, 0^{m_3}) \in D + K_1 \times L^* \times K_3.$$

Dann gibt es für jeden Punkt $a \in R^{m_1}$ eine Zahl $\kappa > 0$, so daß $\tilde{a} + \kappa a \in -K_1$. Mithin gilt

$$\begin{aligned}\kappa(a, 0^{m_2}, 0^{m_3}) &= (\tilde{a}, 0^{m_2}, 0^{m_3}) - (\tilde{a} + \kappa a, 0^{m_2}, 0^{m_3}) \\ &\in (D + K_1 \times L^* \times K_3) + (K_1 \times L^* \times K_3) \\ &\subseteq D + K_1 \times L^* \times K_3.\end{aligned}$$

Da $D + K_1 \times L^* \times K_3$ ein Kegel ist, folgt hieraus (5.3) für beliebiges $a \in R^{m_1}$.
Die andere Richtung der Äquivalenz ist trivial.

Bemerkung 5.2 *Die Bedingung in a) ist notwendig und hinreichend für die Regulärität der Daten des betrachteten Problems. Einerseits sichert das Erfülltsein von a) die Existenz eines Multiplikators für die Brecknersche Regel, dessen erste Komponente nicht verschwindet. Andererseits wird im Falle der Verletzung von a) sofort die Bedingung in b) erfüllt, so daß Irregularität folgt.*

5.2 Diskussion in Spezialfällen

Wir wollen in diesem und im folgenden Abschnitt die Regularitätsbedingung von Theorem 5.1 auf die in Abschnitt 2.2 vorgestellten Anwendungen der Brecknerschen Multiplikatorenregel (Theorem 2.3, Sätze 2.4 und 2.5) übertragen.

Bei diesen Sätzen besitzen die auftretenden derivierten Mengen eine spezielle Struktur. Für solche Strukturen sind allerdings bereits einige andere Regularitätsbedingungen bekannt. Von besonderem Interesse wird daher sein, wie sich die Anwendungen von Theorem 5.1 in Bezug auf die bekannten Bedingungen verhalten.

Auffällig ist zunächst, daß die vorhandenen Regularitätsbedingungen lediglich auf Eigenschaften der Restriktionsmenge S zurückgreifen, während Theorem 5.1 auch die Zielfunktion f_1 mit einbezieht. Zur Abkürzung werden Regularitätsbedingungen, die ausschließlich Anforderungen an S stellen, im folgenden als *constraint qualifications* bezeichnet. (Es gibt leider keine deutsche Entsprechung für diesen Begriff.) Vom informationstheoretischen Standpunkt aus ist zu erwarten, daß die Bedingungen, die auch Eigenschaften der Zielfunktion betrachten, eine gründlichere Charakterisierung der Regulärität erlauben.

Wir beginnen mit einer Anwendung der Regularitätsbedingung in Satz 5.1 auf die Verhältnisse der Multiplikatorenregel von Theorem 2.3.

Satz 5.2 *Es seien die Voraussetzungen von Theorem 2.3 erfüllt.*

a) Existiert ein Punkt $a \in R^{m_1}$, so daß

$$\begin{pmatrix} a \\ 0^{m_2} \\ 0^{m_3} \end{pmatrix} \notin cone\,(F(X_0) + R_+^{m_1} \times L^* \times \{0^{m_3}\}), \tag{5.4}$$

so existiert ein Multiplikator $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ gemäß Theorem 2.3 mit $\lambda_1 \neq 0^{m_1}$.

b) Gilt hingegen für alle $a \in R^{m_1}$

$$\begin{pmatrix} a \\ 0^{m_2} \\ 0^{m_3} \end{pmatrix} \in cone\,(F(X_0) + R_+^{m_1} \times L^* \times \{0^{m_3}\}), \tag{5.5}$$

so gilt für alle Multiplikatoren $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, die die in Theorem 2.3 genannten Eigenschaften besitzen, stets $\lambda_1 = 0^{m_1}$.

Beweis. Theorem 2.3 folgt aus Theorem 2.2 unter Verwendung von $D := convcone\,(F(X_0))$, $K_1 := R_+^{m_1}$, $K_2 := R_+^{m_2}$ und $K_3 := 0^{m_3}$. Man verfahre analog in Theorem 5.1.
Zu zeigen bleibt

$$convcone\,(F(X_0)) + R_+^{m_1} \times L^* \times \{0^{m_3}\} = cone\,(F(X_0) + R_+^{m_1} \times L^* \times \{0^{m_3}\}).$$

Wegen $cone\,(F(X_0)) \subseteq convcone\,(F(X_0))$ folgt sofort

$$\begin{aligned} convcone\,(F(X_0)) + R_+^{m_1} \times L^* \times \{0^{m_3}\} &\supseteq cone\,(F(X_0)) + R_+^{m_1} \times L^* \times \{0^{m_3}\} \\ &= cone\,(F(X_0) + R_+^{m_1} \times L^* \times \{0^{m_3}\}). \end{aligned}$$

Andererseits ist die Menge $F(X_0) + R_+^{m_1} \times L^* \times \{0^{m_3}\}$ wegen der Konvexität der Funktion F und der Menge X_0 konvex und mithin $cone\,(F(X_0) + R_+^{m_1} \times L^* \times \{0^{m_3}\})$ ein konvexer Kegel. Dieser Kegel enthält sicher die Menge $F(X_0)$. Also folgt

$$convcone\,(F(X_0)) \subseteq cone\,(F(X_0) + R_+^{m_1} \times L^* \times \{0^{m_3}\})$$

und somit

$$convcone\,(F(X_0)) + R_+^{m_1} \times L^* \times \{0^{m_3}\} \subseteq cone\,(F(X_0) + R_+^{m_1} \times L^* \times \{0^{m_3}\}).$$

■

Im Fall $K_2 = R_+^{m_2}$ hat der Kegel L^* die Gestalt

$$L^* = \{y = (y_1, \ldots, y_{m_2}) \in R^{m_2} |\ y_k \geq 0\ \forall k \in I_0\}, \tag{5.6}$$

wobei $I_0 := \{k \in \{1, \ldots, m_2\} |\ f_{2k}(x_0) = 0\}$ die Indexmenge der in x_0 aktiven Ungleichungsnebenbedingungen bezeichne. Dann lassen sich (5.4), (5.5) folgendermaßen interpretieren.

Korollar 5.3 *Es seien die Voraussetzungen von Theorem 2.3 erfüllt.*

a) Existiert zu einem Punkt $a = (a_1, \ldots, a_{m_1}) \in R^{m_1}$ kein Paar $(\alpha, x) \in R_+ \times X_0$, welches das System

$$\begin{array}{rcll} \alpha F_{1i}(x) & \leq & a_i & (i = 1, \ldots, m_1) \\ \alpha F_{2k}(x) & \leq & 0 & (k \in I_0) \\ \alpha F_{3l}(x) & = & 0 & (l = 1, \ldots, m_3) \end{array} \tag{5.7}$$

löst, so existiert ein Multiplikator $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ gemäß Theorem 2.3 mit $\lambda_1 \neq 0^{m_1}$.

b) Existiert hingegen für alle $a \in R^{m_1}$ eine Lösung $(\alpha, x) \in R_+ \times X_0$ des obigen Systems, so gilt für alle Multiplikatoren $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, die die in Theorem 2.3 genannten Eigenschaften besitzen, stets $\lambda_1 = 0^{m_1}$.

Bemerkung 5.3 *Wie in Bemerkung 5.1 vorgeführt wird, läßt sich auch hier zeigen, daß die Voraussetzungen von b) genau dann erfüllt sind, wenn das System (5.7) für ein spezielles $a = \tilde{a} \in -int\, R_+^{m_1}$, das heißt $\tilde{a}_i < 0$ $(i = 1, \ldots, m_1)$, eine Lösung $(\alpha, x) \in R_+ \times X_0$ hat.*
Darüberhinaus reicht es aus, anstelle der Lösbarkeit von (5.7) lediglich die Lösbarkeit des Systems

$$\begin{array}{rcll} F_{1i}(x) & \leq & a_i & (i = 1, \ldots, m_1) \\ F_{2k}(x) & \leq & 0 & (k \in I_0) \\ F_{3l}(x) & = & 0 & (l = 1, \ldots, m_3) \end{array} \tag{5.8}$$

für ein $a = \tilde{a} \in -int\, R_+^{m_1}$ zu verlangen. Es gilt nämlich: Das System (5.7) hat genau dann für alle $a \in R^{m_1}$ eine Lösung, wenn (5.8) für wenigstens ein $a = \tilde{a} \in -int\, R_+^{m_1}$ eine Lösung besitzt. Dies sieht man wie folgt:

Sei $\tilde{a} \in -int\, R_+^{m_1}$ und $\tilde{x} \in X_0$ eine Lösung von (5.8) mit $a = \tilde{a}$, das heißt

$$\begin{array}{rcll} F_{1i}(\tilde{x}) & \leq & \tilde{a}_i & (i = 1, \ldots, m_1) \\ F_{2k}(\tilde{x}) & \leq & 0 & (k \in I_0) \\ F_{3l}(\tilde{x}) & = & 0 & (l = 1, \ldots, m_3) \end{array}$$

Für jedes $a \in R^{m_1}$ gibt es eine Zahl $\kappa > 0$, so daß $\tilde{a} + \kappa a \in -R_+^{m_1}$. Mithin gilt

$$F_{1i}(\tilde{x}) \leq \tilde{a}_i \leq \kappa a_i \qquad (i = 1, \ldots, m_1).$$

Somit ist $(\frac{1}{\kappa}, \tilde{x}) \in R_+ \times X_0$ eine Lösung von (5.7), und eine solche Lösung existert für jedes $a \in R^{m_1}$. Nun nehmen wir an, (5.7) sei für jedes $a \in R^{m_1}$ lösbar. Dann gibt es insbesondere für $a = \tilde{a} \in -int R_+^{m_1}$ eine Lösung $(\alpha, x) \in R_+ \times X_0$. Es folgt sofort $\alpha > 0$. Damit ist $x \in X_0$ eine Lösung von (5.8) für $a = \frac{1}{\alpha}\tilde{a} \in -int\, R_+^{m_1}$.

Der Regularitätsbedingung von Korollar 5.3 wollen wir die folgende Aussage in Form von *constraint qualifications* gegenüberstellen. Es ist eine Bedingung über innere Punkte, wie sie üblicherweise verwendet wird, wenn die Eingangsdaten, wie hier, konvex sind. Wir werden zeigen, daß diese *constraint qualifications* lediglich sicherstellen, daß die Bedingung a) in Korollar 5.3 erfüllt wird, aber im Fall ihrer Verletztheit keineswegs Irregularität vorliegen muß.

Satz 5.4 *Zusätzlich zu den Voraussetzungen von Theorem 2.3 gelte:*

- *Es gibt ein $\bar{x} \in int\, X_0$ mit*

$$\begin{array}{rcll} F_{2k}(\bar{x}) & < & 0 & (k \in I_0), \\ F_{3l}(\bar{x}) & = & 0 & (l = 1, \ldots, m_3). \end{array}$$

- *Die (affinen) Funktionen F_{3l} $(l = 1, \ldots, m_3)$ sind linear unabhängig.*

Dann existiert ein Multiplikator $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ gemäß Theorem 2.3 mit $\lambda_1 \neq 0^{m_1}$.

Beweis. Angenommen, in Korollar 5.3 wäre a) verletzt. Dann gibt es für alle $a \in R^{m_1}$ eine Lösung von (5.7). Also existiert insbesondere für ein $\tilde{a} = (\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_{m_1}) \in R^{m_1}$ mit $\tilde{a}_i < 0$ $(i = 1, \ldots, m_1)$ ein

Paar $(\tilde{\alpha}, \tilde{x}) \in R_+ \times X_0$ mit

$$\begin{array}{rcll} \tilde{\alpha} F_{1i}(\tilde{x}) & \leq & \tilde{a}_i & (i = 1, \ldots, m_1), \\ \tilde{\alpha} F_{2k}(\tilde{x}) & \leq & 0 & (k \in I_0), \\ \tilde{\alpha} F_{3l}(\tilde{x}) & = & 0 & (l = 1, \ldots, m_3). \end{array}$$

Nach Theorem 2.4 gibt es einen Multiplikator $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, $\lambda \neq 0^m$ mit $\lambda_{1i} \geq 0$ $(i = 1, \ldots, m_1)$ und $\lambda_{2k} \geq 0$ $(k = 1, \ldots, m_2)$, so daß gilt

$$\begin{array}{rcll} \langle \lambda, F(x) \rangle & \geq & 0 & \forall x \in X_0, \\ \langle \lambda_2, f_2(x_0) \rangle & = & 0. \end{array}$$

Hieraus folgt einerseits $\lambda_{2k} = 0$ $(k \in \{1, \ldots, m_2\} \setminus I_0)$ und andererseits

$$\sum_{i=1}^{m_1} \lambda_{1i} F_{1i}(x) + \sum_{k \in I_0} \lambda_{2k} F_{2k}(x) \sum_{l=1}^{m_3} \lambda_{3l} F_{3l}(x) \geq 0 \qquad \forall x \in X_0. \tag{5.9}$$

Für $x = \tilde{x}$ folgt aus (5.9)

$$\sum_{i=1}^{m_1} \lambda_{1i} F_{1i}(\tilde{x}) \geq 0$$

und somit

$$\sum_{i=1}^{m_1} \lambda_{1i} \tilde{a}_i \geq \tilde{\alpha} \sum_{i=1}^{m_1} \lambda_{1i} F_{1i}(\tilde{x}) \geq 0,$$

woraus sich mit $\tilde{a}_i < 0$ $(i = 1, \ldots, m_1)$ sofort $\lambda_{1i} = 0$ $(i = 1, \ldots, m_1)$ ergibt.
Weiterhin liefert $x = \bar{x}$ in (5.9) die Aussage

$$\sum_{k \in I_0} \lambda_{2k} F_{2k}(\bar{x}) \geq 0,$$

was $\lambda_{2k} = 0$ $(k \in I_0)$ bedeutet.
So reduziert sich (5.9) zu

$$\sum_{l=1}^{m_3} \lambda_{3l} F_{3l}(x) \geq 0 \qquad \forall x \in X_0. \tag{5.10}$$

Da die affine Abbildung $\sum_{l=1}^{m_3} \lambda_{3l} F_{3l}(.)$ auf dem Gebiet X_0 nichtnegativ ist und in einem inneren Punkt dieser Menge, nämlich in $\bar{x}$ verschwindet, ist sie identisch Null. Wegen der linearen Unabhängigkeit der Funktionen F_{3l} $(l = 1, \ldots, m_3)$ folgt hieraus $\lambda_{3l} = 0$ $(l = 1, \ldots, m_3)$.
Mithin ergibt sich der Widerspruch $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = 0^m$. ■

Die Anforderungen von Satz 5.4 sind hinreichend, aber nicht notwendig für die Regularität der Daten des betrachteten Problems. Auch wenn diese Voraussetzungen an X_0, F_2 und F_3 nicht erfüllt sind, kann es durchaus vorkommen, daß das gesamte Problem regulär ist, wenn auch nur für bestimmte Zielfunktionen. Man beachte das folgende Beispiel:

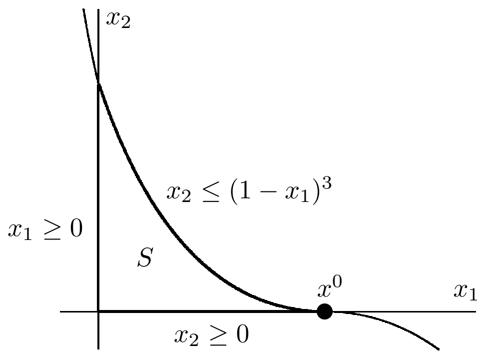
Beispiel 5.1 $\mathcal{X} = R^2$*;* $m_1 = 1$*,* $m_2 = 3$*,* $m_3 = 0$

$$f_1(x) := x_2 \longrightarrow \min_{x \in S}$$

$$S = \left\{ x = (x_1, x_2) \in R^2 \;\middle|\; \begin{array}{lcll} f_{21}(x) & := & -x_1 & \leq & 0 \\ f_{22}(x) & := & -x_2 & \leq & 0 \\ f_{23}(x) & := & -(1-x_1)^3 + x_2 & \leq & 0 \end{array} \right\}$$

Wir betrachten als Optimalpunkt $x^0 = (1,0)$*. Für diesem Punkt ist* $I_0 = \{2,3\}$*.*

Die auftretenden Funktionen sind sämtlich differenzierbar. Für solche Funktionen gilt Theorem 2.3 mit $X_0 = \mathcal{X}$ *und* $F(x) = f'(x_0)(x)$ *(vgl. Beweis von Satz 2.5). Also sei:*



$$\begin{array}{rcl} X_0 & := & R^2; \\ F_1(x) & := & x_2, \\ F_{21}(x) & := & -x_1, \\ F_{22}(x) & := & -x_2, \\ F_{23}(x) & := & x_2. \end{array}$$

Offenbar sind die constraint qualifications *von Satz 5.4 hier nicht erfüllt:*

$$\text{Es gibt kein } \bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in R^2 \text{ mit } \begin{array}{lcll} F_{22}(\bar{x}) & = & -\bar{x}_2 & < & 0, \\ F_{23}(\bar{x}) & = & \bar{x}_2 & < & 0. \end{array}$$

Wohl aber sind die Voraussetzungen für a) in Korollar 5.3 gegeben, wenn $a = -1$ *gewählt wird:*

$$\text{Es gibt kein } (\alpha, x) \in R_+ \times R^2 \text{ mit } \begin{array}{lcll} \alpha F_1(x) & = & \alpha x_2 & \leq & -1, \\ \alpha F_{22}(x) & = & -\alpha x_2 & \leq & 0, \\ \alpha F_{23}(x) & = & \alpha x_2 & \leq & 0. \end{array}$$

Das hat zur Folge, daß das betrachtete Beispiel tatsächlich regulär ist. Beispielsweise erfüllt der Multiplikator $\lambda = (1, 0, 1, 0)$ (beachte: $\lambda_1 \neq 0$) die Anforderungen von Theorem 2.3.

Es gibt jedoch Zielfunktionen über S, so daß das Beispiel irregulär ist. Man betrachte etwa

$$\dot{f}_1(x) := x_1 + x_2 \text{ bzw. } \dot{F}_1(x) := x_1 + x_2.$$

Dann tritt der Fall b) von Korollar 5.3 ein:

Für jedes $a \in R^{m_1}$ löst das Paar (α, x) mit $\alpha = 1$ und $x = (a, 0)$ das System

$$\begin{array}{rcll} \alpha\dot{F}_1(x) & = & \alpha(x_1 + x_2) & \leq & a, \\ \alpha F_{22}(x) & = & -\alpha x_2 & \leq & 0, \\ \alpha F_{23}(x) & = & \alpha x_2 & \leq & 0. \end{array}$$

Hier zeigt sich auch der generelle Unterschied zwischen Regularitätsbedingungen nach der Hestenesschen Idee, wie der in Theorem 5.1 verwendeten, und den so häufig vorkommenden *constraint qualifications*. Letztere sind stets so angelegt, daß sie die Regularität der Aufgabe sichern, welche Gestalt die Zielfunktion auch immer besitzt. Eine tiefgründigere Aussage ist auch nicht zu erwarten, da in die *constraint qualifications* keine Information über die Zielfunktion einfließt. Selbstverständlich ist es möglich, die in Satz 5.4 gestellten Bedingungen weiter abzuschwächen und dennoch die Regularität zu sichern. Welche Bedingungen wir aber auch an die Größen X_0, F_2 und F_3 stellen, es wird permanent Fälle geben, in denen diese *constraint qualifications* verletzt sind, obwohl das Problem für die vorliegende Zielfunktion regulär ist.

Beispiel 5.2 *Gegeben sei eine — wie immer geartete — Regularitätsbedingung für das Problem vom Theorem 2.3, bei der nur die Eigenschaften von X_0, F_2 und F_3 Verwendung finden. Sei S eine zulässige Menge entsprechend dieser Aufgabenstellung, zu der man Größen X_0, F_2 und F_3 finden kann, die die gegebene Regularitätsbedingung verletzen. Auf dieser Menge S betrachte man eine triviale Zielfunktion f_1 mit $F_1 \equiv 0^{m_1}$. Dann ist jedes $\lambda = (\lambda_1, 0^{m_2}, 0^{m_3})$ mit $\lambda_1 \in R_+^{m_1} \setminus \{0^{m_1}\}$ ein Multiplikator, der die in Theorem 2.3 genannten Eigenschaften besitzt; die Gesamtdaten sind mithin regulär.*

Aus diesen Überlegungen kann man den folgenden Schluß ziehen:
Ein grundlegendes Merkmal aller *constraint qualifications* ist, daß sie regelmäßig zu harte Anforderungen an die Nebenbedingungen stellen. Dies ist typisch für solche Regularitätsbedingungen, die die Gestalt der Zielfunktion ignorieren.
Derartige Bedingungen sichern hinlänglich die Regularität der Aufgabe. Im Falle ihrer Verletzheit sind die Daten keineswegs notwendig irregulär.

Eine möglichst schwache *constraint qualification* liegt dann vor, wenn man zeigen kann, daß es bei Verletzung dieser mindestens eine Zielfunktion gibt, für die auch die Gesamtdaten irregulär sind. Eine weitere Abschwächung der Voraussetzungen ist bei Regularitätsbedingungen dieses Typs generell nicht möglich.

5.3 Weitere Spezialisierungen

Abschließend werden wir beide Typen von Regularitätsbedingungen auf die Verhältnisse im konvexen und im differenzierbaren Fall übertragen.

Wir beginnen mit dem konvexen Fall. Das Analogon zu Korollar 5.3 lautet hier:

Satz 5.5 *Es seien die Voraussetzungen von Satz 2.4 erfüllt.*

a) Existiert zu einem Punkt $a = (a_1, \ldots, a_{m_1}) \in R^{m_1}$ kein Paar $(\alpha, x) \in R_+ \times X$, welches das System

$$\begin{aligned} \alpha(f_{1i}(x) - f_{1i}(x_0)) &\leq a_i \qquad (i = 1, \ldots, m_1) \\ \alpha f_{2k}(x) &\leq 0 \qquad (k \in I_0) \\ \alpha f_{3l}(x) &= 0 \qquad (l = 1, \ldots, m_3) \end{aligned} \tag{5.11}$$

löst, so existiert ein Multiplikator $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ gemäß Satz 2.4 mit $\lambda_1 \neq 0^{m_1}$.

b) Existiert hingegen für alle $a \in R^{m_1}$ eine Lösung $(\alpha, x) \in R_+ \times X$ des obigen Systems, so gilt für alle Multiplikatoren $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, die die in Satz 2.4 genannten Eigenschaften besitzen, stets $\lambda_1 = 0^{m_1}$.

Beweis. Satz 2.4 folgt aus Theorem 2.3 unter Verwendung von $X_0 := X - x_0$ und $F(x) := f(x + x_0) - f(x_0)$. Damit spezialisiert sich (5.7) zu (5.11), wenn man beachtet, daß $f_{2k}(x_0) = 0$ $(k \in I_0)$ und $f_{3l}(x_0) = 0$ $(l = 1, \ldots, m_3)$. ■

Bemerkung 5.4 *Als Spezialisierung von Bemerkung 5.3 ergibt sich hier:*
Das System (5.11) hat genau dann für alle $a \in R^{m_1}$ eine Lösung $(\alpha, x) \in R_+ \times X$, wenn das System

$$\begin{aligned} f_{1i}(x) &\leq a_i \qquad (i = 1, \ldots, m_1) \\ f_{2k}(x) &\leq 0 \qquad (k \in I_0) \\ f_{3l}(x) &= 0 \qquad (l = 1, \ldots, m_3) \end{aligned} \tag{5.12}$$

für wenigstens ein $a = \tilde{a} \in f_1(x_0) - int\ R_+^{m_1}$, *das heißt* $\tilde{a}_i < f_{1i}(x_0)$ $(i = 1, \ldots, m_1)$, *eine Lösung* $x \in X$ *besitzt.*

Die entsprechenden *constraint qualifications* lauten im konvexen Fall:

Satz 5.6 *Zusätzlich zu den Voraussetzungen von Satz 2.4 gelte:*

- *Es gibt ein* $\bar{x} \in int\ X$ *mit*

$$\begin{aligned} f_{2k}(\bar{x}) &< 0 \qquad (k \in I_0), \\ f_{3l}(\bar{x}) &= 0 \qquad (l = 1, \ldots, m_3). \end{aligned}$$

- *Die Funktionen* f_{3l} $(l = 1, \ldots, m_3)$ *sind linear unabhängig.*

Dann existiert ein Multiplikator $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ *gemäß Satz 2.4 mit* $\lambda_1 \neq 0^{m_1}$.

Beweis. Die Behauptung folgt unter Verwendung von $X_0 := X - x_0$ und $F(x) := f(x + x_0) - f(x_0)$ sofort aus Satz 5.4. ■

Im Fall differenzierbarer Funktionen ergibt sich aus Korollar 5.3:

Satz 5.7 *Es seien die Voraussetzungen von Satz 2.5 erfüllt.*

a) Existiert zu einem Punkt $a = (a_1, \ldots, a_{m_1}) \in R^{m_1}$ *kein* $x \in \mathcal{X}$, *welches das System*

$$\begin{aligned} f'_{1i}(x_0)(x) &\leq a_i \qquad (i = 1, \ldots, m_1) \\ f'_{2k}(x_0)(x) &\leq 0 \qquad (k \in I_0) \\ f'_{3l}(x_0)(x) &= 0 \qquad (l = 1, \ldots, m_3) \end{aligned} \tag{5.13}$$

löst, so existiert ein Multiplikator $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ *gemäß Satz 2.5 mit* $\lambda_1 \neq 0^{m_1}$.

b) Existiert hingegen für alle $a \in R^{m_1}$ *eine Lösung* $x \in \mathcal{X}$ *des obigen Systems, so gilt für alle Multiplikatoren* $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, *die die in Satz 2.5 genannten Eigenschaften besitzen, stets* $\lambda_1 = 0^{m_1}$.

Beweis. Satz 2.5 folgt aus Theorem 2.3 unter Verwendung von $X_0 := \mathcal{X}$ und $F(x) := f'(x_0)(x)$. Wegen der Linearität von $f'(x_0)$ spezialisiert sich (5.7) zu

$$\begin{aligned} f'_{1i}(x_0)(\alpha x) &\leq a_i \qquad (i = 1, \ldots, m_1) \\ f'_{2k}(x_0)(\alpha x) &\leq 0 \qquad (k \in I_0) \\ f'_{3l}(x_0)(\alpha x) &= 0 \qquad (l = 1, \ldots, m_3). \end{aligned}$$

Wir können das Variablenpaar $(\alpha, x) \in R_+ \times \mathcal{X}$ durch eine einzige Variable $y \in \mathcal{X}$ mit $y = \alpha x$ substituieren. ■

Bemerkung 5.5 *Aus Bemerkung 5.3 folgt:*
Das System (5.11) hat bereits dann für alle $a \in R^{m_1}$ *eine Lösung, wenn es für wenigstens ein* $a \in -int\, R_+^{m_1}$ *eine Lösung besitzt.*

Es ergeben sich die folgenden *constraint qualifications*:

Satz 5.8 *Zusätzlich zu den Voraussetzungen von Satz 2.5 gelte:*

- *Es gibt ein* $\bar{x} \in \mathcal{X}$ *mit*

$$\begin{array}{rcll} f'_{2k}(x_0)(\bar{x}) & < & 0 & (k \in I_0), \\ f'_{3l}(x_0)(\bar{x}) & = & 0 & (l = 1, \ldots, m_3). \end{array}$$

- *Die Ableitungen* $f'_{3l}(x_0)$ $(l = 1, \ldots, m_3)$ *sind linear unabhängig.*

Dann existiert ein Multiplikator $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ *gemäß Satz 2.4 mit* $\lambda_1 \neq 0^{m_1}$.

Beweis. Man verwende in Satz 5.4 $X_0 = \mathcal{X}$ und $F(x) = f'(x_0)(x)$. ■