Nachwort

Die vorliegende Dissertation entstand in den Jahren 1996 bis 1999 während meines Promotionsstudiums am Institut für Optimierung und Stochastik im Fachbereich Mathematik und Informatik der Martin–Luther–Universität Halle–Wittenberg.

Mit der Thematik der dervierten Mengen bei multikriteriellen Optimierungsaufgaben habe ich mich bereits seit dem Jahr 1995 befaßt. Während der Untersuchungen zur Anfertigung der Diplomarbeit stand die Arbeit mit den im Jahre 1994 von Breckner [3] eingeführten K–Ableitungskegeln im Vordergrund.

Damals gelang es mir, ein Resultat, welches in [3] (Proposition 2.2) sowie in [37] (Lemma 3.4) jeweils als Folgerung eines Satzes von H. Tuy ([52], Theorem 1) verwendet wurde, auf einem direkten Weg zu beweisen, so daß der Inhalt dieses Resultats auch ohne Rückgriff auf die von Tuy betrachtete Theorie der Ungleichungssysteme dargestellt werden konnte (vgl. [43]).

Ein weiteres Ergebnis dieser Arbeiten war die Herleitung einer allgemeinen Transformation der zulässigen Menge, die als

$$\{x \in X|\ f_2(x) \in -K_2, f_3(x) \in -K_3\}$$

($K_2 \in R^{m_2}$, $K_3 \in R^{m_3}$, $int\, K_2 \neq \emptyset$) gegeben ist, in eine Menge der Gestalt

$$\{x \in X|\ \bar{f}_2(x) \in -\bar{K}_2, \bar{f}_3(x) = 0^k\}$$

($k \in [0, m_3]$, $\bar{K}_2 \subseteq R^{m_2+k}$, $int\, \bar{K}_2 \neq \emptyset$). Diese Transformation erlaubte unter anderem die Angabe der zweiten Komplementaritätsbedingung für die Brecknersche Multiplikatorenregel. Dargestellt ist dies in [6] und [44]. Andererseits erwies sich die Umwandlung der Relation $f_3(x) \in -K_3$ in einfache Gleichungen $\bar{f}_{3i}(x) = 0$ $(i = 1, \ldots, k)$ als hilfreich beim Umgang mit dem Beweis der Multiplikatorenregel. Dadurch konnte das oben beschriebene Resultat ([3], Proposition 2.2) über nichtlineare Ungleichungssysteme durch einen Auflösungssatz für Gleichungssysteme ersetzt werden, was wir auch in dieser Arbeit (siehe Abschnitt 2.3) ausgenutzt haben.

Die im Verlauf des Diplomstudiums gewonnenen Ergebnisse fanden auch Eingang in das am Institut betriebene und von der DFG geförderte Forschungsprojekt „Ekelandsches Variationsprinzip und Optimalitätsbedingungen in der Optimierung / Optimalen Steuerung“ unter Leitung von Herrn Prof. Göpfert.

Zu Beginn meines Promotionsstudiums hatte ich mich eingehender mit notwendigen Optimalitätsbedingungen für Näherungslösungen von multikriteriellen Aufgaben beschäftigt. Eine gute Übersicht über die unterschiedlichen Begriffe von näherungsweiser Effizienz findet man in [54]. Einblicke in die Struktur solcher Optimalitätsbedingungen gewährten Arbeiten wie [30], [38], [46], [53] und [55]. Einige dieser Arbeiten beschäftigen sich lediglich mit skalaren Aufgabenstellungen. Dennoch erwiesen die resultierenden Multiplikatorenregeln als hilfreich, da wesentliche Eigenschaften solcher Aussagen bereits hier auftraten. Die daraus gewonnenen Erkenntnisse habe ich in Abschnitt 4.2 dargestellt.

Einige Autoren, etwa [17], [30] oder [33], benutzten das Variationsprinzip von Ekeland zur Herleitung näherungsweiser Optimalitätsbedingungen. Insbesondere findet man bei Loridan [30] eine Formulierung des Variationsprinzips für vektorwertige Funktionen. Mit Hilfe dieser Methode gelangte ich zu den in Abschnitt 4.3 aufgeführten Multiplikatorenregeln.

Die Theorie der derivierten Mengen erlaubt auch Anwendungen bei Problemen der optimalen Steuerung (siehe [4]). Erwägenswert wäre für die Zukunft, unter Anlehnung an die Resultate von Abschnitt 4.3, nach Optimalitätsbedingungen für Näherungslösungen solcher Steuerprobleme zu suchen.

Die Untersuchungen zur Struktur näherungsweiser Optimalitätsbedingungen führten mich auch zu Erkenntnissen, die in dieser Arbeit keine Berücksichtigung fanden, weil zunächst keine Beziehungen zu den derivierten Mengen erkennbar war: In einer Arbeit von Vályi [53] werden die ε–Optimalitätsbedingungen für eine vektorwertige Aufgabe in Form von ε–Sattelpunktaussagen angegeben. Weiterhin wird dort eine ε–Dualitätstheorie für diese Aufgabe entwickelt. In Analogie zu den Resultaten von Vályi lassen sich näherungsweise Sattelpunktaussagen auch für das von Tammer/Tammer ([48], [49]) betrachtete vektorwertige Approximationsproblem nachweisen (vgl. [50]). Gemeinsam mit Frau Prof. Tammer und Herrn Prof. Breckner ist hierzu eine Veröffentlichung geplant (siehe [7]).

Eine andere Anwendung des Variationsprinzips im Zusammenhang mit näherungsweisen Trennungssätzen (siehe auch [28]) habe ich in [16] vorgestellt.

Bei den in Kapitel 3 festgehaltenen Ableitungseigenschaften des Brecknerschen K–Ableitungskegels handelt es sich um solche, die zum Teil bekannt oder in mündlichen Erörterungen und Diskussionen zumindest vermutet worden waren. Jedoch waren dieser Eigenschaften bislang nicht schriftlich festgehalten worden. Aus diesem Grunde hielt ich es für angebracht, die entsprechenden Aussagen hier aufzuführen und zu beweisen. Für Vermutungen, die sich als unzutreffend herausstellten, habe ich Gegenbeispiele angegeben.

Besonders bemerkenswert fand ich die Tatsache, daß zwar jede einzelne Richtungsableitung einen derivierten Kegel erzeugt, nicht aber eine Kollektion aus mehreren Richtungsableitungen. Denkbar wäre eine weitere Untersuchung der Zusammenhänge der derivierten Kegel mit modernen Ableitungs– oder Subdifferentialbegriffen und den damit formulierten Optimalitätsbedingungen (vgl. [10], [12], [13], [20], [21], [22]).

Im Kapitel 5 habe ich, durchaus einmal abseits der Theorie derivierter Mengen, Gedanken über Regularitätsbedingungen, die sowohl notwendige als auch hinreichende Aussagen liefern können, geäußert. Es fiel mir auf, daß die Hestenessche Regularitätsbedingung in [19] seither nur unwesentliche Beachtung gefunden hat. Andererseits wird die Suche nach möglichst schwachen Regularitätsbedingungen verstärkt fortgesetzt. In [25] beispielsweise wird für die (hinreichende) Reguläritätsbedingung von Kurcyusz, Robinson und Zowe gezeigt, daß sie derart schwache Anforderungen stellt, daß bereits eine leichte Abwandlung dieser Bedingung im Fall der Regularität notwendigerweise erfüllt sein muß. Ich habe dargestellt, warum bei Regularitätsbedingungen ohne Einbeziehung von Aussagen über die Zielfunktion stets eine Diskrepanz zwischen notwendiger und hinreichender Bedingung besteht.

Regularitätsaussagen tauchen in der jüngeren Literatur ([34], [26], [27], [51]) immer häufiger vereint mit dem Begriff der metrischen Regularität auf. Es stellt sich die Frage, ob sich auch mit den Bedingungen von Hestenesschen Typ eine solche Verbindung herstellen läßt; insbesondere, ob diese dann metrische Aussagen nicht nur über die Funktionen in den Restriktionen, sondern auch über die Zielfunktion liefern. Dieses soll demnächst unterucht werden. Besonders die von Thibault [51] vorgestellten Zusammenhänge geben hierfür einen Ausgangspunkt.

Abschließend möchte ich die Gelegenheit nutzen, mich bei Herrn Prof. A. Göpfert, der mich während meines Promotionsstudiums als Betreuer unterstützt hat, auf das herzlichste zu bedanken. Es waren nicht nur seine engagierte fachliche Anregung und Hilfe, sondern auch sein warmherziger Beistand in persönlichen Dingen, die mir den Abschluß dieser Arbeit ermöglichten. Weiterhin gilt mein Dank Frau Prof. Chr. Tammer und Herrn Prof. W. W. Breckner, die mir die Gelegenheit gaben, in zahlreichen interessanten Diskussionen neue Anregungen und Ideen für die Fortführung meiner Untersuchungen zu gewinnen.